

COMPLÉMENT A – ESPACES HERMITIENS

PIERRE DE LA HARPE

Comparer ce chapitre avec les §§ 15, 16, 21, 25, 26 du semestre d'hiver, sur les espaces euclidiens et le théorème spectral pour les matrices réelles symétriques.

FORMES LINÉAIRES ET ANTILINÉAIRES, FORMES HERMITIENNES

1. Rappel sur le dual. Soit V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} (par exemple \mathbb{C}). Le *dual* de V est l'espace vectoriel des formes linéaires sur V , ici noté \check{V} . Si V, W sont deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et $f : V \rightarrow W$ une application linéaire (on écrit “ \mathbb{K} -linéaire” si on tient à préciser), la transposée $\check{f} : \check{W} \ni \phi \mapsto \phi f \in \check{V}$ est une application linéaire (où ϕf désigne, évidemment, la composition de $f : V \rightarrow W$ et $\phi : W \rightarrow \mathbb{K}$).

2. Rappel d'un résultat du § 7. Soit V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} . On suppose V de dimension finie, et on considère une base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ de V . Soit W un espace vectoriel sur \mathbb{K} et $\{w_1, \dots, w_m\}$ une suite *quelconque* de vecteurs de W . Alors il existe une unique application linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que $f(b_j) = w_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.

3. Conséquence. Si V et W sont de dimensions finies, respectivement m et n , alors l'espace $\mathcal{L}(V, W)$ des applications linéaires de V dans W est de dimension mn . En particulier, \check{V} est de dimension m , c'est-à-dire $\dim(\check{V}) = \dim(V)$.

On suppose désormais dans ce chapitre que le corps de base est le corps \mathbb{C} des nombres complexes. On laisse au lecteur de soin d'adapter la discussion aux espaces euclidiens, sur le corps des réels.

4. Définition. Soient V, W deux espaces vectoriels *complexes*. Une application f de V dans W est *antilinéaire* si

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) &= \bar{\lambda} f(x) \end{aligned}$$

pour tous pour tous $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. Remarque. Soit $f : V \rightarrow W$ une application antilinéaire entre espaces vectoriels complexes. Le *noyau* $\text{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel complexe de V , et l'*image* $\text{Im}(f) = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } w = f(v)\}$ est un sous-espace vectoriel complexe de W .

6. Proposition. Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ une base de V . Soient W un espace vectoriel complexe et $\{w_1, \dots, w_m\}$ une famille quelconque de vecteurs de W .

Alors il existe une unique application antilinéaire $f : V \longrightarrow W$ telle que $f(b_j) = w_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.

Preuve : analogue à la preuve du théorème rappelé au numéro 2 ci-dessus, avec ici

$$f\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j b_j\right) = \sum_{j=1}^m \overline{\lambda_j} w_j$$

pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. \square

7. Notation. Si V est un espace vectoriel complexe, $\overline{\mathcal{L}(V, C)}$ désigne l'espace des applications antilinéaires de V dans \mathbb{C} .

Cet espace a naturellement une structure d'espace vectoriel complexe : pour f, f' dans $\overline{\mathcal{L}(V, C)}$ et λ dans \mathbb{C} , on définit

$$f + f' \text{ par } (f + f')(v) = f(v) + f'(v) \text{ et}$$

$$\lambda f \text{ par } (\lambda f)(v) = \lambda(f(v))$$

pour tout $v \in V$.

C'est une conséquence de la proposition 6 que, si V est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors $\overline{\mathcal{L}(V, C)}$ est aussi de dimension finie, égale à celle de V .

8. Définition. Une *forme hermitienne* sur un espace vectoriel complexe V est une application $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$(i = \text{antilinéarité en la première variable}) \quad h(x + x', y) = h(x, y) + h(x', y)$$

et $h(\lambda x, y) = \overline{\lambda} h(x, y)$ pour tous $x, x', y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(ii = \text{linéarité en la seconde variable}) \quad h(x, y + y') = h(x, y) + h(x, y')$$

et $h(x, \lambda y) = \lambda h(x, y)$ pour tous $x, y, y' \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(iii) \quad h(y, x) = \overline{h(x, y)} \text{ pour tous } x, y \in V.$$

9. Remarques. La condition (ii) résulte de (i) et (iii); de même (i) résulte de (ii) et (iii). La condition (iii) implique que $h(x, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in V$.

!!! De nombreux auteurs décident de définir les formes hermitiennes linéaires en la première variable et antilinéaire en la seconde, contrairement au choix adopté ici !!!

10. Définitions. On dit qu'une forme hermitienne h sur V est

non dégénérée si, pour $x \in V$, on a $x = 0 \iff h(x, y) = 0$ pour tout $y \in V$,

positive si $h(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in V$,

définie positive si $h(x, x) > 0$ pour tout $x \in V, x \neq 0$.

Il est évident qu'une forme définie positive est non dégénérée.

11. Exemples. Sur \mathbb{C}^3 , on définit

une forme positive dégénérée h_I par $h_I(x, y) = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_3}y_3$,

une forme non dégénérée h_{II} par $h_{II}(x, y) = \overline{x_1}y_1 - \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$,

une forme définie positive h_{III} par $h_{III}(x, y) = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$

(cette dernière forme étant le produit scalaire standard).

12. Proposition. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'une forme hermitienne h .

(i) L'application $\begin{cases} V \longrightarrow \check{V} \\ x \longmapsto {}^b x \end{cases}$ définie par ${}^b x(y) = h(x, y)$ est antilinéaire.

(ii) L'application $\begin{cases} V \longrightarrow \overline{\mathcal{L}(V, \mathbb{C})} \\ y \longmapsto y^b \end{cases}$ définie par $y^b(x) = h(x, y)$ est linéaire.

(iii) Si la forme h est non dégénérée (par exemple si elle est définie positive), alors l'application de (i) est bijective. En particulier, toute forme linéaire sur V peut s'écrire

$$y \longmapsto h(a, y)$$

pour $a \in V$ convenable (et uniquement déterminé).

(iv) De même, si h est non dégénérée, toute forme antilinéaire sur V peut s'écrire

$$x \longmapsto h(x, b)$$

pour $b \in V$ convenable (et uniquement déterminé).

Preuve. Les assertions (i) et (ii) sont des conséquences immédiates des définitions.

Pour (iii), on observe que l'application de (i) a pour noyau le sous-espace vectoriel

$$N = \{x \in V \mid h(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in V\}.$$

Alors, si h est non dégénérée, $N = \{0\}$ et l'application de (i) est injective; elle est aussi bijective, puisque V est de dimension finie et que V et \check{V} ont donc la même dimension.

La preuve de (iv) est analogue. \square

13. Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit V un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne positive h . Alors

$$|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y)$$

pour tous $x, y \in V$.

Preuve. Étant donnés $x, y \in V$, posons $a = h(x, x)$, $b = h(x, y)$ et $c = h(y, y)$. On remarque que a et c sont réels et ≥ 0 . Il s'agit de montrer que $|b|^2 \leq ac$.

Notons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$(*) \quad h(x + \lambda y, x + \lambda y) = a + \overline{\lambda b} + \lambda b + |\lambda|^2 c \geq 0.$$

On distingue alors trois cas :

si $c \neq 0$, on pose $\lambda = -\overline{b}/c$ et on trouve $a - \frac{b\overline{b}}{c} \geq 0$, c'est-à-dire $ac \geq |b|^2$;

si $a \neq 0$, on procède de manière analogue;

enfin, si $a = c = 0$, on pose $\lambda = -\overline{b}$ et on trouve $-2|b|^2 \geq 0$, c'est-à-dire $b = 0$.

\square

Note. Au lieu de “Cauchy-Schwarz”, on dit parfois “Bunyakovski”. Cauchy est responsable de cette inégalité pour des vecteurs de \mathbb{R}^n (1821), Bunyakovski pour des intégrales (1859), avec une forme hermitienne comme aux exemples 15.ii à 15.iv ci-dessous, et H.A. Schwarz pour des intégrales doubles (1885). Il ne faut pas confondre ce Schwarz avec de nombreux mathématiciens dont les noms se prononcent de la même manière, par exemple avec Laurent Schwartz (à qui nous devons la “théorie des distributions”).

14. Définition principale du chapitre. Un *produit scalaire hermitien* (on dit aussi plus simplement *produit scalaire*) sur un espace vectoriel complexe est une forme hermitienne définie positive sur cet espace.

Un *espace hermitien* est un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d’un produit scalaire.

15. Exemples de produits scalaires. (i) L’espace \mathbb{C}^n muni du produit scalaire “canonique”

$$\langle (w_1, \dots, w_n) \mid (z_1, \dots, z_n) \rangle = \sum_{j=1}^n \overline{w_j} z_j.$$

(ii) L’espace $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}[a, b]$ des fonctions continues à valeurs complexes sur un intervalle compact (= fermé borné) $[a, b]$ de l’axe réel, muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

(iii) Le même espace muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle_w = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) w(t) dt$$

où $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue par morceaux donnée.

(iv) L’espace des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques, muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Comparer avec l’exemple (ii) !

(v) Tout sous-espace vectoriel d’un espace hermitien.

En analyse, il est important de distinguer les produits scalaires qui définissent des espaces *complets*, aussi nommés *espaces de Hilbert*. Il se trouve qu’un espace hermitien de dimension finie est nécessairement complet. La question en dimension infinie est plus délicate, et n’est pas abordée ici.

16. Définitions. Soit V un espace vectoriel complexe muni d’un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$.

On définit la *norme* $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ d'un vecteur $x \in V$ et on établit ses propriétés comme dans le cas euclidien :

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \text{ pour tous } x, y \in V, \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \text{ pour tous } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } x \in V, \\ \|x\| &\geq 0 \text{ pour tout } x \in V, \text{ avec égalité si et seulement si } x = 0. \end{aligned}$$

On a des notions naturelles de *suite orthogonale*, *base orthogonale*, *projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel*, et *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*.

17. Exercice. (i) Soit V l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$. Montrer que V est un espace vectoriel (pour les opérations naturelles d'addition et de multiplication par un nombre complexe), et que $\langle f | g \rangle_V = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}g(t)dt$ définit un produit scalaire sur V .

(ii) Idem pour l'ensemble W des fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \infty$ et pour le produit scalaire $\langle f | g \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}g(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

(iii) Quelles sont les fonctions polynomiales qui appartiennent à V ? à W ?

(iv) Soit $Mat_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes à n lignes et n colonnes. On définit la *matrice adjointe* d'une matrice complexe comme la matrice A^* dont les coefficients sont les transposés conjugués de ceux de A . Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 3 - i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & 3 + i \end{pmatrix}.$$

Vérifier que la forme

$$\langle A | B \rangle = \text{trace}(A^*B)$$

définit un produit scalaire sur $Mat_n(\mathbb{C})$.

OPÉRATEURS AUTO-AJDOINTS ET UNITAIRES

Après les considérations précédentes sur les *espaces* munis de produits scalaires, passons à l'étude des *applications linéaires* entre deux espaces de ce type. Étant donné deux espaces hermitiens V et W , on dit indifféremment “applications linéaire de V dans W ” ou “opérateur linéaire de V dans W ”; si $W = V$, on dit encore “opérateur linéaire sur V ”.

On suppose désormais que V, W, \dots sont des espaces vectoriels complexes de dimensions finies munis de produits scalaires. Si nécessaire, on ajoute un indice “ v ” au produit scalaire $\langle x | y \rangle_V$ de deux vecteurs d'un espace V .

18. Définition. Soient V, W deux espaces hermitiens et $A : V \rightarrow W$ une application linéaire. On définit l'*application adjointe* $A^* : W \rightarrow V$ de A par

$$\langle A^*w | v \rangle_V = \langle w | Av \rangle_W$$

pour tous $v \in V$ et $w \in W$.

Plus précisément, on considère d'abord, pour $w \in W$, l'application linéaire

$$\begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{C} \\ v & \longmapsto \langle w \mid Av \rangle_W \end{cases}$$

et il résulte de la proposition 12.iii qu'il existe un unique vecteur $a_w \in V$ tel que

$$\langle a_w \mid v \rangle_V = \langle w \mid Av \rangle_W$$

pour tout $v \in V$. On remarque ensuite que l'application $w \mapsto a_w$ est linéaire et définit un opérateur $W \rightarrow V$ qui est l'adjoint A^* de A .

Attention : ne pas confondre l'adjoint $A^* : W \rightarrow V$ et le transposé $\check{A} : \check{W} \rightarrow \check{V}$; comparez en particulier la proposition 20 ci-dessous avec un énoncé apparenté concernant la transposée de la composition de deux applications linéaires.

19. Propriétés immédiates. Soient $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} (A + B)^* &= A^* + B^*, \\ (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} A^*, \\ (A^*)^* &= A. \end{aligned}$$

Si $I \in \mathcal{L}(V)$ désigne l'application identique, alors $I^* = I$.

20. Proposition. Soient U, V, W trois espaces hermitiens et $A \in \mathcal{L}(U, V), B \in \mathcal{L}(V, W)$ deux applications linéaires. On a

$$(B A)^* = A^* B^*.$$

Preuve. Pour tous $u \in U$ et $w \in W$, on a

$$\langle (BA)^* w \mid u \rangle_U = \langle w \mid BA \rangle_W = \langle B^* w \mid Au \rangle_V = \langle A^* (B^* w) \mid u \rangle_U.$$

On en déduit d'abord

$$(BA)^* w = A^* (B^* w)$$

pour tout $w \in W$, et ensuite $(B A)^* = A^* B^*$. \square

21. Conséquence. Si $A : U \rightarrow V$ est inversible, alors $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

22. Proposition. Dans la situation de la définition 18, on suppose de plus V et W munis respectivement de bases orthonormales $\{e_1, \dots, e_m\}$ et $\{f_1, \dots, f_n\}$. Alors les matrices $M(A)$ de A et $M(A^*)$ de A^* relativement à ces bases satisfont la relation

$$M(A^*)_{j,k} = \overline{M(A)_{k,j}}$$

pour tous $j \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$.

Preuve. On a

$$M(A^*)_{j,k} = \langle e_j | A^* f_k \rangle = \langle A e_j | f_k \rangle = \overline{\langle f_k | A e_j \rangle} = \overline{M(A)_{k,j}}.$$

□

23. Théorème. Soient V un espace hermitien et $A \in \mathcal{L}(V)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) l'application $h : \begin{cases} V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \longmapsto \langle x | Ay \rangle \end{cases}$ est une forme hermitienne,
- (ii) $\langle x | Ax \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in V$,
- (iii) $A^* = A$.

Preuve. L'implication (i) \implies (ii) résulte des définitions (voir les remarques 9). Réciproquement, supposons que la propriété (ii) est vérifiée, c'est-à-dire que $h(z, z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in V$. Alors, pour tous $x, y \in V$, on a

$$\begin{aligned} 4h(x, y) &= h(x + y, x + y) - h(x - y, x - y) - ih(x + iy, x + iy) + ih(x - iy, x - iy) \\ &= h(x + y, x + y) - h(-(x - y), -(x - y)) \\ &\quad - ih(-i(x + iy), -i(x + iy)) + ih(i(x - iy), i(x - iy)) \\ &= h(y + x, y + x) - h(y - x, y - x) + ih(y + ix, y + ix) - ih(y - ix, y - ix) \\ &= 4\overline{h(y, x)} \end{aligned}$$

de sorte que la propriété (i) est aussi vérifiée.

L'équivalence (i) \iff (iii) se montre comme suit :

$$\begin{aligned} h(x, y) = \overline{h(y, x)} \text{ pour tous } x, y \in V &\quad \text{si et seulement si} \\ \langle x | Ay \rangle = \overline{\langle y | Ax \rangle} = \langle A^* y | x \rangle = \langle x | A^* y \rangle \text{ pour tous } x, y \in V &\quad \text{si et seulement si} \\ Ay = A^* y \text{ pour tout } y \in V &\quad \text{si et seulement si} \\ A = A^*. & \end{aligned}$$

□

24. Définition. Un opérateur satisfaisant les propriétés du théorème précédent est dit *autoadjoint* ou *hermitien*.

Il y a une définition analogue pour les matrices complexes (voir la proposition 22) : la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est *autoadjointe* ou *hermitienne* si elle est égale à sa transposée conjuguée, ce qu'on écrit $A^* = A$.

Les opérateurs autoadjoints sur les espaces hermitiens sont des analogues des opérateurs symétriques (au sens du semestre d'hiver) sur les espaces euclidiens.

Les opérateurs autoadjoints (et leurs analogues en dimension infinie) jouent un rôle fondamental dans le formalisme de la physique quantique.

25. Exercice. (i) Soient A, B deux opérateurs autoadjoints sur un espace hermitien. Montrer que AB est autoadjoint si et seulement si A et B commutent.

(ii) Ecrire un opérateur dans l'espace \mathbb{C}^2 (muni de son produit scalaire canonique) qui n'est pas autoadjoint.

(iii) Il résulte en particulier du théorème 23 qu'un opérateur A sur un espace hermitien V tel que $\langle x | Ax \rangle \geq 0$ pour tout $x \in V$ (on dit alors que A est *positif*) est nécessairement autoadjoint.

L'analogie de ce fait pour un espace euclidien (espace vectoriel *réel* muni d'un produit scalaire) n'est *pas* vrai : vérifier par exemple que, sur l'espace \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire standard, la matrice *non symétrique* $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ définit un opérateur $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\langle x | Ax \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Soient V un espace hermitien, V_0 un sous-espace et V_1 l'orthogonal de V_0 dans V . Tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique $v = v_0 + v_1$ avec $v_0 \in V_0$ et $v_1 \in V_1$. On définit l'opérateur de *projection orthogonale* sur V_0

$$P_0 : \begin{cases} V \rightarrow V \\ v \mapsto v_0. \end{cases}$$

Vérifier que

$$P_0^* = P_0 = P_0^2.$$

Si $V_0 \neq \{0\}$ et $V_1 \neq \{0\}$, vérifier que les valeurs propres de P_0 sont 0 et 1, que celles de $I - 2P_0$ sont 1 et -1 , et que $I - 2P_0$ est à la fois autoadjoint et unitaire (au sens de la définition 27 ci-dessous). L'opérateur de projection orthogonale sur V_1 est $P_1 = I - P_0$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, trouver $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que $(\lambda - P_0)^{-1} = \mu P_0 + \nu P_1$.

26. Théorème. Soient V, W deux espaces hermitiens et $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\|A(z)\| = \|z\|$ pour tout $z \in V$,
- (ii) $\langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle$ pour tous $x, y \in V$,
- (iii) $A^*A = id_V$.

De plus, si $\dim(W) = \dim(V)$, ces conditions sont équivalentes à $AA^* = id_W$.

Preuve. Les implications (ii) \implies (i) et (ii) \iff (iii) résultent immédiatement des définitions, et il s'agit de montrer que (i) \implies (ii).

On vérifie d'abord qu'on a

$$\begin{aligned} 4\langle x | y \rangle &= \langle x + y | x + y \rangle - \langle x - y | x - y \rangle - i\langle x + iy | x + iy \rangle + i\langle x - iy | x - iy \rangle \\ &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2 \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in V$ (comparer avec la preuve du théorème 23), puis on établit que (i) implique (ii).

La preuve de la dernière assertion est laissée au lecteur. \square

27. Définition. Une application linéaire satisfaisant les propriétés du théorème précédent est une *isométrie* de V dans W . Si l'espace but W coïncide avec l'espace source V , on dit aussi qu'une telle application est un *opérateur unitaire* sur V .

Exercice : si A, B sont deux opérateurs unitaires sur V , alors les opérateurs AB et A^{-1} sur V sont aussi unitaires.

Le *groupe unitaire* $\mathcal{U}(V)$ d'un espace hermitien V est le groupe constitué des opérateurs unitaires sur V . Si V est l'espace \mathbb{C}^n muni du produit scalaire canonique, on écrit $\mathcal{U}(n)$ au lieu de $\mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$.

Pour tout $A \in \mathcal{L}(V)$, la proposition 22 montre que $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$. Par suite, si A est unitaire, alors $1 = \det(A^*A) = \overline{\det(A)}\det(A)$, et $|\det(A)| = 1$. Le déterminant fournit donc un homomorphisme $\det : \mathcal{U}(V) \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ dont le noyau (l'image inverse de $\{1\}$) est par définition le *groupe unitaire spécial*, noté $\mathcal{SU}(V)$; si $V = \mathbb{C}^n$, on obtient ainsi le groupe noté $\mathcal{SU}(n)$.

Exercice : montrer que le déterminant $\mathcal{U}(V) \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un homomorphisme de groupes qui est surjectif.

28. Analogie d'un résultat du semestre d'hiver. Une matrice complexe à n lignes et n colonnes est unitaire si et seulement si ses colonnes constituent une base orthonormale de l'espace hermitien \mathbb{C}^n (muni du produit scalaire canonique). Plus généralement, pour un espace hermitien V de dimension n muni d'une base orthonormale, un opérateur linéaire sur V est unitaire si et seulement si sa matrice relativement à la base donnée a des colonnes qui constituent une base orthonormale de \mathbb{C}^n .

29. Définition. Un opérateur A sur un espace hermitien est *normal* s'il commute avec son adjoint, c'est-à-dire si $A^*A = AA^*$.

On définit de même les matrices complexes carrées qui sont normales.

30. Exemples. (i) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est *pas* normale.

(ii) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ est normale pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$; elle est autoadjointe si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$, unitaire si et seulement si $\lambda = 0$.

(iii) Tout opérateur unitaire est normal, tout opérateur autoadjoint est normal.

31. Lemme. Soit $A : V \longrightarrow V$ un opérateur normal. Alors

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^*).$$

De plus, si $x \in V$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ , alors x est aussi un vecteur propre de A^* de valeur propre $\bar{\lambda}$.

Preuve. Soit $y \in V$. On a

$$\|Ay\|^2 = \langle Ay | Ay \rangle = \langle A^*Ay | y \rangle = \langle AA^*y | y \rangle = \langle A^*y | A^*y \rangle = \|A^*y\|^2.$$

Il en résulte que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^*)$.

Soit x un vecteur propre comme dans l'énoncé, de sorte que $x \in \text{Ker}(A - \lambda I)$. Vu ce qui précède, on a aussi $x \in \text{Ker}((A - \lambda I)^*) = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$, c'est-à-dire $A^*x = \bar{\lambda}x$. \square

32. Théorème. Soient V un espace hermitien et A un opérateur linéaire sur V .

(i) Si A est normal, deux vecteurs propres de A pour les valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

(ii) Si A est autoadjoint, toute valeur propre de A est un nombre réel.

(iii) Si A est unitaire, toute valeur propre de A est un nombre complexe de module 1.

Preuve. (i) Soient $x, y \in V \setminus \{0\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$. On a

$$\mu \langle x | y \rangle = \langle x | Ay \rangle = \langle A^*x | y \rangle = \langle \bar{\lambda}x | y \rangle = \bar{\lambda} \langle x | y \rangle$$

(la troisième égalité en vertu du lemme précédent), donc $\langle x | y \rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$.

(ii) Pour A autoadjoint, si $Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $Ax = \bar{\lambda}x$ par le lemme 31.

(iii) Pour A unitaire, si $Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0$, on a

$$\|x\| = \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

et par suite $|\lambda| = 1$. \square

LE THÉORÈME SPECTRAL

33. Lemme. Soient V un espace hermitien et $A : V \rightarrow V$ un opérateur linéaire.

(i) Soit V_0 un sous-espace de V . Alors V_0 est invariant par A si et seulement si son orthogonal V_0^\perp est invariant par A^* .

(ii) On suppose A normal ; soit e_1 un vecteur propre de A . Alors la restriction de A à l'orthogonal V_1 de e_1 est un opérateur normal.

Preuve. (i) Le sous-espace V_0 est invariant par A , c'est-à-dire $A(V_0) \subset V_0$, si et seulement si $\langle Ax | y \rangle = 0$ pour tous $x \in V_0$ et $y \in V_0^\perp$. Cette condition est évidemment équivalente à : $\langle x | A^*(y) \rangle = 0$ pour tous $x \in V_0$ et $y \in V_0^\perp$, c'est-à-dire à : V_0^\perp est invariant par A^* .

(ii) Il résulte du lemme 31 que la droite $\mathbb{C}e_1$ est invariante par A et par A^* , et de l'assertion (i) que V_1 est également invariant par A et A^* . Si $A_1 \in \mathcal{L}(V_1)$ désigne la restriction de A à V_1 , on vérifie que l'adjoint de A_1 est la restriction de A^* à V_1 ; si A_1^* désigne cette restriction, on vérifie enfin que A_1 et A_1^* commutent (car A et A^* commutent par hypothèse). \square

34. Théorème spectral. *Tout opérateur normal A sur un espace hermitien V est diagonalisable relativement à une base orthonormale de V .*

Indication pour la preuve. Soit n la dimension de V . Le théorème est évident si $n = 1$. Si $n \geq 2$, on procède par récurrence sur n , et on suppose donc le théorème démontré pour tout espace de dimension strictement inférieure à n .

On peut choisir un vecteur propre e_1 de A de norme 1. L'espace $\mathbb{C}e_1$ est invariant par A^* (lemme 31), donc l'orthogonal $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ est invariant par A (lemme 33). On vérifie que la restriction de A à $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ est un opérateur normal, et on achève en appliquant l'hypothèse de récurrence à cette restriction. [Comparer avec la preuve tout à fait analogue du semestre d'hiver pour les opérateurs symétriques.] \square

35. Remarques. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie et soit A un opérateur linéaire sur V . Il a été vu au semestre d'hiver que A est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de V relativement à laquelle la matrice de A est triangulaire. *Exercice* : vérifier que la même preuve montre que, si de plus V est muni d'un produit scalaire, alors il existe une base *orthonormale* de V relativement à laquelle la matrice de A est triangulaire.

En général, un opérateur linéaire A sur un espace vectoriel V n'est pas diagonalisable (exemple : un opérateur non nul de carré nul). Lorsque V est muni d'un produit scalaire, même si A est diagonalisable, il n'existe en général pas de base *orthonormale* relativement à laquelle la matrice de A est diagonale (exemple : une projection oblique).

Lorsque V possède un produit scalaire, un opérateur linéaire A sur V est diagonalisable relativement à une base orthonormale si et seulement s'il est normal; l'une des implications est le théorème spectral énoncé ci-dessus, et la vérification de l'autre est un exercice facile (toute matrice diagonale est normale).

36. Corollaire. *Soit M une matrice complexe à n lignes et n colonnes. Si M est normale, il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(n)$ telle que la matrice UMU^* est diagonale. Si la matrice M est de plus autoadjointe [respectivement unitaire], les coefficients diagonaux de UMU^* sont réels [resp. de module 1].*

Preuve. On peut considérer la matrice M comme un opérateur sur l'espace \mathbb{C}^n muni de la base canonique et du produit scalaire canonique. Il suffit de prendre alors pour U la matrice de changement de base associée à la base canonique et une base orthonormale de vecteurs propres, seconde base dont l'existence est assurée par le théorème spectral. \square

37. Corollaire. *Soit A un opérateur normal.*

Pour que A soit autoadjoint, il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de A soient réelles.

Pour que A soit unitaire, il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de A soient de module 1.

38. Exercices. Soient V, W des espaces hermitiens.

(i) Pour tout opérateur $B : V \longrightarrow W$, vérifier que $\text{Ker}(B^*) = (\text{Im}(B))^\perp$.

(ii) Vérifier que $A \in \mathcal{L}(V)$ est normal si et *seulement si* $\|A^*x\| = \|Ax\|$ pour tout $x \in V$. [Indication : calculer $\langle (A^*A - AA^*)x \mid x \rangle$ et appliquer un argument de la preuve du théorème 23.]

(iii) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(V)$ deux opérateurs autoadjoints. Vérifier que $A_1 + iA_2$ est normal si et seulement A_1 et A_2 commutent.

(iv) Soit V un espace hermitien et $A, B \in \mathcal{L}(V)$ des opérateurs hermitiens tels que $AB = BA$. Montrer qu'il existe une base orthonormale de V formée de vecteurs propres *communs* à A et B .

(v) Soit U_ϵ une matrice complexe de la forme $\begin{pmatrix} 1 + i\epsilon a & i\epsilon b \\ i\epsilon c & 1 + i\epsilon d \end{pmatrix}$, dépendant d'un paramètre ϵ auquel on pense comme étant *petit*, et soit X la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que la relation " $U_\epsilon^* U_\epsilon = I + \text{termes en } \epsilon^2$ " équivaut à la relation " $X^* = X$ ".

(vi) Soit $A \in \mathcal{L}(V)$ un opérateur autoadjoint. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) $\langle x \mid Ax \rangle \geq 0$ pour tout $x \in V$;
- (b) $\lambda \geq 0$ pour toute valeur propre λ de A ;
- (c) il existe un opérateur autoadjoint $C \in \mathcal{L}(V)$ dont toutes les valeurs propres sont ≥ 0 tel que $A = C^2$;
- (d) il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(V)$ tel que $A = B^*B$.

[Indication : pour (b) \implies (c), diagonaliser A .]

Les opérateurs satisfaisant ces conditions sont dits *positifs*. Montrer que la somme de deux opérateurs positifs est un opérateur positif.

CAS EUCLIDIEN

39. Opérateurs sur les espaces euclidiens. Un *espace euclidien* est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soient V, W deux espaces euclidiens et $A \in \mathcal{L}(V, W)$ un opérateur linéaire. L'*adjoint* de A est l'opérateur $A^t \in \mathcal{L}(W, V)$ défini par

$$\langle A^t w \mid v \rangle_V = \langle w \mid Av \rangle_W \quad \text{pour tous } v \in V \quad \text{et } w \in W$$

(voir la définition 18). Supposons V, W munis de bases orthonormales ; soient $M(A)$ et $M(A^t)$ les matrices de A et A^t relatives à ces bases. On vérifie que la matrice $M(A^t)$ est la *transposée* de la matrice $M(A)$; voir la proposition 22. Voir aussi le § 25 du semestre d'hiver.

40. Proposition. Soit V un espace euclidien. Pour un opérateur $A : V \rightarrow V$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\|A(z)\| = \|z\|$ pour tout $z \in V$,
- (ii) $\langle Ax \mid Ay \rangle = \langle x \mid y \rangle$ pour tous $x, y \in V$,
- (iii) $A^t A = id_V$,
- (iv) $AA^t = id_V$,

Preuve : voir celle du théorème 26. \square

41. Définition. L'ensemble des opérateurs possédant les propriétés de la proposition précédente constitue un groupe noté $\mathcal{O}(V)$ et appelé le *groupe orthogonal de V* .

Si $V = \mathbb{R}^n$, on écrit $\mathcal{O}(n)$ au lieu de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

42. Proposition. Pour $A \in \mathcal{O}(n)$, le déterminant satisfait $\det(A) \in \{1, -1\}$.

Preuve : résulte du calcul immédiat $1 = \det(I) = \det(A^t A) = \det(A)^2$. \square

43. Proposition-définition. L'application déterminant $\mathcal{O}(V) \rightarrow \{1, -1\}$ est un homomorphisme de groupes qui est surjectif. Son noyau est le groupe orthogonal spécial de V , noté $\mathcal{SO}(V)$.

Lorsque $V = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, on écrit

$$\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$$

au lieu de $SO(V)$.

Le théorème 34 possède une variante qui s'applique aux opérateurs symétriques sur des espaces euclidiens (voir le semestre d'hiver) : *tout opérateur égal à son symétrique (ou adjoint) sur un espace euclidien est diagonalisable relativement à une base orthonormale convenable*. Pour les opérateurs orthogonaux sur les espaces euclidiens, il faut toutefois une formulation légèrement différente, que voici.

44. Proposition. Pour tout opérateur orthogonal A sur un espace euclidien V , il existe une base orthonormale de V relativement à laquelle la matrice de A est diagonale par blocs, chaque bloc étant ou bien à deux lignes et deux colonnes, et alors de la forme $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ pour un angle $\alpha \in \mathbb{R}$ convenable, ou bien un nombre (i.e. un bloc à une ligne et une colonne), et alors l'un des nombres $1, -1$.

Pour la preuve : voir par exemple la fin du chapitre VIII dans S. Lang, *Linear algebra, third edition*, Springer, 1987. \square

Les deux corollaires qui suivent résultent de cette version réelle du théorème spectral, *mais sont aussi des conséquences presque immédiates des calculs ad hoc du numéro 47*.

45. Corollaire. Soient V un espace euclidien de dimension 2 et $A \in \mathcal{O}(V)$.

Si $\det(A) = 1$, il existe une base de V relativement à laquelle la matrice de A est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ convenable; A est donc une rotation d'angle α autour de l'origine.

Si $\det(A) = -1$, il existe une base de V relativement à laquelle la matrice de A est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; et A est donc une symétrie orthogonale relativement au premier axe.

46. Corollaire. Soient V un espace euclidien de dimension 3 et $A \in \mathcal{O}(V)$.

Si $\det(A) = 1$, il existe une base de V relativement à laquelle la matrice de A est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ convenable; A est donc une rotation d'angle α autour du troisième axe.

Si $\det(A) = -1$, il existe une base de V relativement à laquelle la matrice de A est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ convenable; A possède donc un vecteur propre (sur le troisième axe) de valeur propre -1 .

47. Deux calculs de déterminant. Voici par ailleurs deux calculs simples montrant l'existence de valeurs propres 1 ou -1 sans faire appel à la proposition 44.

Soit $A \in \mathcal{SO}(2n+1)$; alors 1 est valeur propre de A . En effet :

$$\begin{aligned} \det(I - A) &= \det(I - A)\det(A^t) = \det(A^t - AA^t) = \det((A - I)^t) = \det(A - I) \\ &= (-1)^{2n+1}\det(I - A) \end{aligned}$$

de sorte que $\det(I - A) = 0$, et par suite 1 est bien valeur propre de A .

Soit $A \in \mathcal{O}(n)$, $A \notin \mathcal{SO}(n)$; alors -1 est valeur propre de A . En effet :

$$\begin{aligned} \det(I + A) &= -\det(I + A)\det(A^t) = -\det(A^t + AA^t) = -\det((I + A)^t) \\ &= -\det(I + A) \end{aligned}$$

de sorte que $\det(I + A) = 0$, et par suite -1 est bien valeur propre de A .

48. Illustration. Toute matrice $A \in O(2) \setminus SO(2)$ représente une symétrie orthogonale relativement à une droite de \mathbb{R}^2 (droite engendrée par un vecteur propre de valeur propre -1).

Toute matrice $A \in SO(3)$ représente une rotation autour d'un axe de \mathbb{R}^3 (axe engendré par un vecteur propre de valeur propre $+1$).

APPENDICE : L'HOMOMORPHISME $SU(2) \rightarrow SO(3)$

L'objet de cet appendice est de définir l'homomorphisme surjectif du titre. Cet homomorphisme apparaît à de nombreux endroits, notamment en physique dans l'étude des moments cinétiques et des spins. En 2001, l'appendice ne fait pas partie du programme d'examen (mais "spectres de graphes", ci-dessous, en fait partie !).

On désigne par $Mat_2(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices 2-fois-2 à coefficients complexes; ici, "algèbre" signifie d'une part que $Mat_2(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel, et d'autre part qu'on a une règle de *multiplication* des matrices, cette règle vérifiant des règles bien précises (que nous n'énumérons pas ici). Rappelons que le *groupe unitaire spécial* $SU(2)$ est le groupe des matrices $A \in Mat_2(\mathbb{C})$ telles que

$$\langle A\xi \mid A\eta \rangle = \langle \xi \mid \eta \rangle \text{ pour tous } \xi, \eta \in \mathbb{C}^2, \\ \det(A) = 1$$

où $\langle \xi \mid \eta \rangle = \sum_{j=1}^2 \bar{\xi}_j \eta_j$ désigne le produit scalaire canonique de deux vecteurs ξ, η de \mathbb{C}^2 .

1. Proposition. *On a*

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{C})$. Si $A \in SU(2)$, on a

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ \bar{a}b + \bar{c}d = ad - bc - 1 = 0.$$

Si $b = 0$, ces équations impliquent successivement

$$|d| = 1 \quad c = 0 \quad |a| = 1 \quad ad = 1$$

de sorte que A a bien la forme décrite dans l'énoncé.

Si $b \neq 0$, on a

$$\bar{a}b + \bar{c}d = 0 \implies a = -\frac{c\bar{d}}{\bar{b}}, \\ ad - bc = 1 \implies -\frac{c|d|^2 + |b|^2c}{\bar{b}} = -\frac{c}{\bar{b}} = 1$$

donc $c = -\bar{b}$ et $a = \bar{d}$. \square

2. Lemme. *Pour tout $A \in SU(2)$, il existe une application continue de l'intervalle unité dans $SU(2)$ qui applique 0 sur la matrice unité et 1 sur la matrice A .*

Preuve. Tout point de la sphère unité

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$$

peut s'écrire

$$(a, b) = \left(\sqrt{1-r^2} e^{i\phi}, r e^{i\psi} \right)$$

avec $r \in [0, 1]$ et $\phi, \psi \in]-\pi, \pi]$. (Note : une telle écriture est unique si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.)

La fonction continue

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ t \longmapsto \left(\sqrt{1-t^2} e^{it\phi}, t e^{it\psi} \right) \end{cases}$$

définit un "chemin continu dans \mathbb{S}^3 " d'origine $\gamma(0) = (1, 0)$ et d'extrémité $\gamma(1) = (a, b)$.

Comme $SU(2)$ s'identifie à \mathbb{S}^3 , ceci prouve le lemme. \square

(En topologie, le résultat du lemme 2 s'exprime par : "le groupe $SU(2)$ est connexe par arcs, et en particulier connexe".)

3. Définition. On désigne par \mathbb{H} l'ensemble des matrices de $Mat_2(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

L'ensemble $Mat_2(\mathbb{C})$, qui est naturellement un espace vectoriel (et une algèbre) *complexe* de dimension 4, est aussi un espace vectoriel (et une algèbre) *réel* de dimension 8; l'espace \mathbb{H} est un sous-espace *réel* de dimension 4 de cet espace réel de dimension 8.

(!!! \mathbb{H} n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe $Mat_2(\mathbb{C})$!!!)

4. Remarque et définition. Le produit de deux matrices de \mathbb{H} est encore dans \mathbb{H} :

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

où

$$z = z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 \quad w = z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2.$$

Avec le produit des matrices, \mathbb{H} est connu sous le nom *d'algèbre des quaternions*, ou plus précisément d'algèbre des quaternions *de Hamilton*.

5. Base. Les éléments

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'espace vectoriel *réel* \mathbb{H} .

Exercice : écrire la table de multiplication pour cette base.

6. Remarque. En physique, les matrices

$$\sigma_x = -ie_3 \quad \sigma_y = -ie_2 \quad \sigma_z = -ie_1$$

s'appellent les *matrices de Pauli*. (!!! On trouve aussi d'autres normalisations !!!)

7. Produit scalaire euclidien. On définit un produit scalaire sur l'espace réel \mathbb{H} en posant

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \Re(\bar{z}_1 z_2 + \bar{w}_1 w_2).$$

La norme associée est donnée par

$$\left\| \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \right\|^2 = \det \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = |z|^2 + |w|^2.$$

La base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ est orthonormale pour ce produit scalaire, et le groupe $SU(2)$ s'identifie à la sphère unité de l'espace euclidien \mathbb{H} de dimension 4.

Attention. Comme déjà noté au N° 3, il faut bien prendre garde au fait qu'on considère \mathbb{H} comme un espace vectoriel *réel*, et que ce produit scalaire en fait un espace *euclidien*, même si z et w désignent ci-dessus des nombres complexes ! (De même qu'on peut - et que parfois on doit - considérer \mathbb{C}^2 comme un espace vectoriel *réel* de dimension 4.)

Exercices (i) Vérifier que le produit scalaire défini au numéro précédent s'écrit aussi $\langle X \mid Y \rangle = \frac{1}{2} \text{trace}(X^* Y)$ pour $X, Y \in \mathbb{H}$.

(ii) Soit $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{C}^2 . Pour toute paire (v, w) de vecteurs dans l'espace \mathbb{C}^2 considéré comme espace vectoriel *réel* de dimension 4, espace noté V plus bas, on pose

$$\langle v \mid w \rangle_{\mathbb{R}} = \Re(\langle v \mid w \rangle).$$

Vérifier que $\langle v \mid w \rangle_{\mathbb{R}}$ est un produit scalaire euclidien sur l'espace V . En déduire qu'il existe un homomorphisme de groupes $U(2) \rightarrow O(4)$.

On peut montrer que l'image de cet homomorphisme est en fait dans $SO(4)$.

Plus généralement, on a un homomorphisme de groupes $U(n) \rightarrow SO(2n)$ pour tout $n \geq 1$.

8. Lemme. Soit $A \in SU(2)$. Alors, pour tout $X \in \mathbb{H}$, on a $AX \in \mathbb{H}$ et $XA \in \mathbb{H}$. De plus les applications

$$\begin{cases} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ X \longmapsto AX \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ X \longmapsto XA \end{cases}$$

sont orthogonales.

Preuve. Les inclusions $AX \in \mathbb{H}$ et $XA \in \mathbb{H}$ résultent du N^o 4. Comme $\det(A) = 1$, on a

$$\|AX\|^2 = \det(AX) = \det(X) = \|X\|^2$$

de sorte que l'application $X \mapsto AX$ est orthogonale. De même, l'application $X \mapsto XA$ est orthogonale. \square

9. L'orthogonal $i\mathbb{E} \approx \mathbb{R}^3$ de e_0 dans \mathbb{H} . On désigne par \mathbb{E} l'espace des matrices hermitiennes 2-fois-2 de trace nulle, c'est-à-dire l'espace des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Cet espace a un produit scalaire naturel avec norme associée définie par

$$\|X\|^2 = -\det(X) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

D'une part, on observe que $i\mathbb{E}$ s'identifie à l'orthogonal de e_0 dans \mathbb{H} ; d'autre part, on peut identifier \mathbb{E} à l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^3 (avec coordonnées x_1, x_2, x_3), et donc le groupe orthogonal de \mathbb{E} à $\mathcal{O}(3)$ [respectivement le groupe orthogonal spécial de \mathbb{E} à $\mathcal{SO}(3)$].

10. Théorème : l'homomorphisme surjectif de $SU(2)$ sur $\mathcal{SO}(3)$.

(i) Pour tout $A \in SU(2)$ et pour tout $X \in \mathbb{E}$, on a

$$AXA^* \in \mathbb{E}.$$

De plus $\|AXA^*\| = \|X\|$; par suite l'opérateur linéaire $P(A) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ défini par

$$P(A) : X \mapsto AXA^*$$

est orthogonal.

(ii) L'application

$$P : \begin{cases} SU(2) & \rightarrow \mathcal{O}(3) \\ A & \mapsto P(A) \end{cases}$$

est un homomorphisme de groupes.

(iii) L'image de P est dans le sous-groupe $\mathcal{SO}(3)$ de $\mathcal{O}(3)$.

(iv) L'homomorphisme $P : SU(2) \rightarrow \mathcal{SO}(3)$ est surjectif.

(v) Le noyau de P est le sous-groupe à deux éléments $\{e_0, -e_0\}$ de $SU(2)$.

Preuve. (i) Le lemme 8 montre que l'application $\begin{cases} \mathbb{H} & \rightarrow \mathbb{H} \\ Y & \mapsto AYA^* \end{cases}$ est orthogonale. Comme elle préserve e_0 , elle préserve aussi l'orthogonal $i\mathbb{E}$ de e_0 dans \mathbb{H} .

Par suite, pour tout $X \in \mathbb{E}$, on a $A(iX)A^* \in i\mathbb{E}$ et $\|A(iX)A^*\| = \|iX\|$, c'est-à-dire $AXA^* \in \mathbb{E}$ et $\|AXA^*\| = \|X\|$.

(ii) Cela résulte du calcul

$$P(A)(P(B)(X)) = P(A)(BXB^*) = ABXB^*A^* = (AB)X(AB)^* = P(AB)(X)$$

où $A, B \in SU(2)$ et $X \in \mathbb{H}$.

(iii) Soit $A \in SU(2)$. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow SU(2)$ est comme dans le preuve du lemme 2, l'application

$$\delta : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \{1, -1\} \\ t \mapsto \det(P(\gamma(t))) \end{cases}$$

est continue. Comme $\delta(0) = \det(P(e_0)) = \det(I_3) = +1$, on a aussi par continuité $\delta(1) = \det(P(A)) = +1$, de sorte que A est bien dans $\mathcal{SO}(3)$. (On a noté e_0 , comme au n° 5, la matrice unité à deux lignes et deux colonnes, qui est l'élément neutre de $SU(2)$, et I_3 la matrice unité à trois lignes et colonnes, qui est l'élément neutre de $\mathcal{SO}(3)$.)

(iv) La preuve se décompose en plusieurs pas

Premier pas. Toute rotation autour du premier axe est dans l'image de P .

En effet, pour tout $\phi \in \mathbb{R}$, on a $\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \in SU(2)$ et

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & e^{2i\phi}(x_2 + ix_3) \\ e^{-2i\phi}(x_2 - ix_3) & -x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_2 + iy_3 \\ y_2 - iy_3 & -x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} y_2 &= (\cos(2\phi))x_2 - (\sin(2\phi))x_3 \\ y_3 &= (\sin(2\phi))x_2 + (\cos(2\phi))x_3. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$P\left(\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\phi) & -\sin(2\phi) \\ 0 & \sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{pmatrix}$$

est la rotation d'angle 2ϕ autour du premier axe. (Noter le facteur 2 !)

Deuxième pas. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$, il existe $A \in SU(2)$ tel que $P(A)(X) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$, où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

En effet, comme $\text{tr}(X) = 0$ et $\det(X) = -r^2$, les valeurs propres de X sont r et $-r$. Comme X est une matrice autoadjointe, il existe en vertu du chapitre C une matrice $B \in \mathcal{U}(2)$ telle que $BXB^* = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$. Choisissons une racine carrée β de $\det(B)$; comme B est unitaire, $|\det(B)| = 1$ et $|\beta| = 1$. (Remarque importante : il n'y a pas de choix canonique pour la racine β qui dépende continûment de la matrice B .) Posons $A = \beta^{-1}B$; on a $A \in \mathcal{U}(2)$ et $\det(A) = \beta^{-2}\det(B) = 1$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{SU}(2)$, et on a encore

$$AXA^* = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}.$$

Conséquence du deuxième pas. L'action naturelle de l'image de P sur la sphère unité de \mathbb{E} est transitive.

Rappelons que la notion d'action d'un groupe G sur un ensemble Ω a été définie au chapitre A. Ajoutons qu'une action $G \times \Omega \rightarrow \Omega$ est *transitive* si, pour tous $\omega, \omega' \in \Omega$, il existe $g \in G$ tel que $g\omega = \omega'$.

Il y a une action naturelle du groupe des rotations sur la sphère unité, et donc aussi de tout sous-groupe du groupe des rotations - par exemple l'image de P ci-dessus - sur cette même sphère. C'est de cette action-là qu'il s'agit dans la conséquence énoncée ci-dessus.

Troisième pas. Les deux premiers pas achèvent la preuve du point (iv) en vertu du lemme ci-dessous.

(v) Il est évident que $P(-e_0) = I_3$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{SU}(2)$ tel que $P(A) = I_3$. On a $AXA^* = X$ pour tout $X \in \mathbb{E}$, et en particulier

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A$$

d'où il résulte que la matrice A est diagonale. Le calcul du premier pas de la preuve de (iv) montre alors que $P(A) = I_3$ implique $A = e_0$ ou $A = -e_0$. \square

11. Lemme. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$ possédant les deux propriétés suivantes :

- (i) H contient toutes les rotations autour du premier axe,
- (ii) H agit transitivement sur la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 .

Alors $H = \mathcal{SO}(3)$.

Preuve. Notons M le premier vecteur de coordonnées, vu comme un point de \mathbb{S}^2 . Soit $g \in \mathcal{SO}(3)$. Par (ii), il existe $h \in H$ tel que $h(M) = g(M)$. Par suite $h^{-1}g(M) = M$, de sorte que $h^{-1}g$ est une rotation autour du premier axe. Par (i), $h^{-1}g \in H$; il en résulte que $g = h(h^{-1}g) \in H$. \square

Exercice. Soient $X \in \mathbb{E}$ tel que $\|X\| = 1$ et $\phi \in \mathbb{R}$. Vérifier que la matrice $A = (\cos \theta)e_0 + (\sin \theta)iX$ est dans $\mathcal{SU}(2)$ et que $P(A)$ est une rotation d'angle 2θ fixant les points $X, -X$ de la sphère unité de \mathbb{E} .

12. Exemples de sous-groupes finis de $SO(3)$.

(i) Pour toute droite d passant par l'origine de \mathbb{R}^3 et pour tout entier $k \geq 1$, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$ et ses itérés constituent un sous-groupe à k éléments de $SO(3)$ qui est un *groupe cyclique d'ordre k* , isomorphe à $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

(ii) On considère une droite d comme ci-dessus, un entier $k \geq 2$, un plan \mathbb{E}^2 de \mathbb{R}^3 contenant l'origine et orthogonal à d , ainsi qu'un polygone régulier \mathbb{P} à k sommets dans \mathbb{E}^2 .

A toute droite e de \mathbb{E}^2 contenant l'origine et un sommet de \mathbb{P} on associe le demi-tour A_e d'axe e . Les k demi-tours ainsi définis et le groupe de (i) constituent un sous-groupe à $2k$ éléments de $SO(3)$ qui est un *groupe diédral d'ordre $2k$* .

(iii) Soit \mathbb{T} [respectivement \mathbb{O} , \mathbb{I}] un tétraèdre régulier [resp. un octaèdre régulier, un icosaèdre régulier] centré à l'origine de \mathbb{R}^3 et soit $SG_{\mathbb{T}}$ [resp. $SG_{\mathbb{O}}$, $SG_{\mathbb{I}}$] le sous-groupe de $SO(3)$ formé des rotations g telles que $g(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ [resp. $g(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$, $g(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$].

Par exemple, $SG_{\mathbb{T}}$ contient

l'identité,

pour chaque sommet de \mathbb{T} , deux rotations d'un tiers de tour laissant fixe ce sommet,
pour chaque arête de \mathbb{T} , une rotation d'un demi-tour laissant fixe son milieu,

soit $1 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = 12$ éléments.

Un calcul analogue montre que $SG_{\mathbb{O}}$ est d'ordre 24 et $SG_{\mathbb{I}}$ d'ordre 60.

13. Théorème. *Tout sous-groupe fini de $SO(3)$ apparaît dans la liste du numéro précédent.*

Faute d'indiquer la preuve de ce théorème, nous recommandons la lecture du livre de Hermann Weyl intitulé *Symmetry* (Princeton University Press, 1952). Il s'agit de la rédaction de quatre leçons données par Weyl en 1951 et destinées à un large public. Pour le théorème ci-dessus, voir la fin de la deuxième leçon ainsi que l'appendice A.

Les sous-groupes finis de $SO(3)$ s'organisent donc en deux familles infinies (les groupes cycliques et les groupes diédraux) et trois cas exceptionnels (correspondant aux polytopes réguliers). On peut aussi classer les sous-groupes finis du groupe $\mathcal{O}(3)$ tout entier; on trouve alors 5 familles infinies supplémentaires et quatre cas exceptionnels supplémentaires (voir l'appendice B du livre de Weyl).

Ces groupes finis jouent un rôle important en chimie-physique, dans la description des cristaux et des molécules. Ils jouent bien sûr un rôle tout aussi important en géométrie; ainsi qu'en de nombreux autres chapitres de mathématiques, comme par exemple la théorie de l'équation du cinquième degré (sujet qui n'est en général pas évoqué dans les cours de premier ou second cycle) ou les fonctions d'une variable complexe (sujet abordé en Analyse 2).

A sous-groupe fini G de $SO(3)$ correspond un sous-groupe fini $P^{-1}(G)$ de $SU(2)$, et on a $|P^{-1}(G)| = 2|G|$.

COMPLÉMENT B : SPECTRES DE GRAPHES

1. Motivation. Soit F une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur un intervalle de la droite, et suffisamment régulière. La dérivée première de F en un point x est donnée par

$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

et la seconde dérivée par

$$F''(x) \approx \frac{F'(x) - F'(x-h)}{h} \approx \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

pour h assez petit. De même, si F est une fonction définie sur un domaine U de \mathbb{R}^2 et suffisamment régulière, le *laplacien* de F en un point (x, y) du plan est donné par

$$\begin{aligned} (\Delta F)(x, y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) \\ &\approx \frac{1}{h^2} \left(F(x+h, y) + F(x-h, y) + F(x, y+h) + F(x, y-h) - 4F(x, y) \right) \end{aligned}$$

pour h assez petit. “Assez petit” dépend bien sûr des unités choisies, et il est toujours possible de supposer $h = 1$.

Supposons pour simplifier que le domaine U soit un rectangle, et supposons qu’il est quadrillé par une fine grille de sommets $(x_{i,j})_{0 \leq i \leq k+1, 0 \leq j \leq l+1}$. L’étude des fonctions F sur U qui sont *harmoniques dans U* , c’est-à-dire telles que $\Delta F(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$, motive l’étude des fonctions f définies aux seuls sommets de la grille et satisfaisant les relations

$$\frac{f(x_{i+1,j}) + f(x_{i-1,j}) + f(x_{i,j+1}) + f(x_{i,j-1})}{4} = f(x_{i,j})$$

pour tous $i \in \{1, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, l\}$.

D’autres situations conduisent à considérer des “grilles” de formes autres que rectangulaires, et plus généralement des “graphes”, au sens suivant.

2. Définitions. Un *graphe* G est un couple (V, E) où V est un ensemble (dont les éléments sont les *sommets* du graphe) et E un sous-ensemble de l’ensemble des parties à deux éléments de V (les éléments de E sont les *arêtes* du graphe); les deux sommets d’une arête sont ses *extrémités*.

Un tel graphe est *connexe* si, pour toute paire $x, y \in V$ de sommets, il existe une suite $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ de sommets telle que $\{x_{i-1}, x_i\} \in E$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dans ce chapitre, tous les graphes sont supposés *finis*.

L’ensemble $C(V)$ des fonctions de V dans \mathbb{R} est naturellement un espace vectoriel réel. Il possède une *base canonique* $(\delta_x)_{x \in V}$, où pour tout $x \in V$ la fonction $\delta_x \in C(V)$ est définie par

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur d'adjacence $A : C(V) \rightarrow C(V)$ est défini par

$$(Af)(x) = \sum_{y \sim x} f(y)$$

où la notation indique une somme sur les sommets $y \in V$ qui sont liés à x par une arête. La *matrice d'adjacence* est la matrice de A relativement à la base canonique $(\delta_x)_{x \in V}$; par abus d'écriture, on la note également A ; c'est donc la matrice de coefficients $(A_{x,y})_{x,y \in V}$ donnés par

$$A_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{x,y\} \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Noter que, en général, il n'y a pas d'ordre *naturel* sur l'ensemble V des sommets du graphe G , ni par conséquent sur les lignes et colonnes de cette matrice.

Le *polynôme caractéristique* du graphe G est le polynôme caractéristique de sa matrice d'adjacence. Le *spectre* de G est le spectre de A , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A , avec leurs multiplicités; la matrice d'adjacence étant par définition symétrique, le spectre d'un graphe est nécessairement *réel*.

L'exemple de la motivation est un graphe fini donné par un quadrillage d'un domaine du plan.

3. Exemples à deux et trois sommets. (i) Si G est un segment à deux sommets,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le spectre de G est $(1, -1)$. Si G est un segment à trois sommets,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le spectre de G est $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$. Ce sont des cas particuliers du calcul de Lagrange (§ 26 du semestre d'hiver).

(ii) Si G est un triangle, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le spectre de G est $(2, -1^2)$, où l'exposant 2 indique que -1 est valeur propre de multiplicité 2.

(iii) Si G a 2 sommets et 0 arête (G est non connexe), son spectre est (0^2) . Plus généralement, si G possède n sommets et 0 arête, alors A est la matrice nulle à n lignes et n colonnes, de spectre (0^n) .

(iv) Si G possède 3 sommets et une seule arête (G est non connexe), sa matrice d'adjacence est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et son spectre est $(1, 0, -1)$.

Plus généralement, si $G = (V, E)$ est une réunion disjointe de deux graphes non vides, c'est-à-dire s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles disjoints V_1, V_2 tels que toute arête $e \in E$ ait ses deux extrémités dans V_1 ou ses deux extrémités dans V_2 , alors le spectre de G est la réunion des spectres des sous-graphes G_1 et G_2 , déterminés respectivement par V_1 et V_2 .

Ceci réduit essentiellement l'étude des spectres de graphes au cas des graphes *connexes*.

4. Exemple des graphes complets. Soient $n \geq 1$ un entier et K_n le *graphe complet* à n sommets $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire le graphe pour lequel toute paire $\{x, y\} \subset \{1, \dots, n\}$ (avec $x \neq y$) est une arête. Pour calculer le spectre de K_n , on peut procéder comme suit.

Soit J_n la matrice n -fois- n dont tous les coefficients sont $+1$, et soit I_n la matrice unité d'ordre n ; la matrice d'adjacence de K_n est $J_n - I_n$.

On a $J_n^2 = nJ_n$, donc $(\frac{1}{n}J_n)^2 = \frac{1}{n}J_n$. La matrice $\frac{1}{n}J_n$, vue comme une application linéaire de l'espace euclidien \mathbb{R}^n dans lui-même, est donc la projection orthogonale de \mathbb{R}^n sur la droite formée des vecteurs de la forme (t, t, \dots, t) avec $t \in \mathbb{R}$. Par suite, le spectre de $\frac{1}{n}J_n$ est $(1, 0^{n-1})$. Il en résulte que le spectre de $J_n - I_n$ est $(n - 1, -1^{n-1})$.

En résumé, le spectre du graphe complet à n sommets est $(n - 1, -1^{n-1})$.

Rappel du chapitre IV (§ 18) du semestre d'hiver, et complément. Soient \mathbb{K} un corps, $n \geq 1$ un entier et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{K} . Pour un entier $p \in \{1, \dots, n\}$, un *mineur principal d'ordre p* de A est un déterminant de la forme

$$\det (a_{i,j})_{i,j \in H}$$

où $H = \{i_1, \dots, i_p\}$ est une partie de $\{1, \dots, n\}$ à p éléments ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$). ainsi la matrice A a-t-elle exactement

- (1) n mineurs principaux d'ordre 1, qui sont ses éléments diagonaux $a_{i,i}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$,
- (2) $\frac{n(n-1)}{2}$ mineurs principaux d'ordre 2, qui sont

$$\det \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix} = a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}a_{j,i},$$

- (3) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ mineurs principaux d'ordre 3, qui sont

$$\det \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} & a_{i,k} \\ a_{j,i} & a_{j,j} & a_{j,k} \\ a_{k,i} & a_{k,j} & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

pour $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ avec $i < j < k$,

- (...)
- (n-1) n mineurs principaux d'ordre $n - 1$, qui sont les déterminants des matrices obtenues à partir de A en effaçant la j -ème ligne et la j -ème colonne ($1 \leq j \leq n$),
- (n) 1 mineur principal d'ordre n , qui est le déterminant de A .

Rappelons que le déterminant d'une matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ est donné par la formule

$$(*) \quad \det(B) = \sum_{\sigma \in Sym(n)} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \dots b_{\sigma(n),n} \in \mathbb{K}.$$

Pour une matrice $B(X)$ à coefficients dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{K} , la même formule fournit

$$\det(B(X)) \in \mathbb{K}[X].$$

Soient en particulier $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B = XI_n - A$. Les formules ci-dessus montrent que $\det(XI_n - A)$ est un polynôme de degré n , c'est-à-dire un polynôme de la forme

$$\det(XI_n - A) = X^n + c_1(A)X^{n-1} + c_2(A)X^{n-2} + \dots + c_{n-1}(A)X + c_n(A)$$

où $c_1(A), \dots, c_n(A) \in \mathbb{K}$.

Pour $p \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient $c_p(A)$ de X^{n-p} provient de termes qui, dans l'analogie du développement (*) pour $XI_n - A$, contient exactement

p termes diagonaux $X - a_{i_1, i_1}, \dots, X - a_{i_p, i_p}$ et $n - p$ autres termes,

où $\sigma \in \text{Sym}(n)$ est une permutation telle que $\sigma(i_1) = i_1, \dots, \sigma(i_p) = i_p$. Lorsque $p = 1$, on a simplement

$$c_1(A) = - \sum_{i=1}^n a_{i,i} = -\text{trace}(A).$$

Pour $p = 2$,

$$c_2(A) = (-1)^2 \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(i), i} a_{\sigma(j), j}.$$

Pour i, j fixés, la permutation σ , qui est a priori une permutation des entiers $\{1, \dots, n\}$ fixant tous les entiers distincts de i et j , peut être vue comme une permutation de l'ensemble à deux éléments $\{i, j\}$; par suite

$$c_2(A) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} \det \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix}$$

est la somme de tous les mineurs d'ordre 2 de A . De même $-c_3(A)$ est la somme de tous les mineurs d'ordre 3 de A , etc. Il est évident que le terme constant du polynôme $\det(XI_n - A)$ est $(-1)^n \det A$. En résumé :

Proposition. *Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est égal à*

$$\det(XI_n - A) = X^n - \text{trace}(A)X^{n-1} + c_2(A)X^{n-2} + \dots \\ + c_p(A)X^{n-p} + \dots + c_{n-1}(A)X + (-1)^n \det(A)$$

où $(-1)^p c_p(A)$ est la somme de tous les mineurs principaux d'ordre p de A , pour $p \in \{1, \dots, n\}$.

Dans cet énoncé, on a écrit $\text{trace}(A)$ au lieu de $c_1(A)$ et $\det(A)$ au lieu de $c_n(A)$.

Pour toute matrice inversible $S \in GL(n, \mathbb{K})$, on a évidemment

$$\det(XI_n - A) = \det(S(XI_n - A)S^{-1}) = \det(XI_n - SAS^{-1}).$$

En particulier, s'il existe une matrice $S \in GL(n, \mathbb{K})$ telle que $SAS^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, la somme des mineurs principaux non nuls d'ordre p de A est égale à la somme des mineurs principaux non nuls d'ordre p de $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, c'est-à-dire à la somme des produits de p valeurs propres de A .

Corollaire. Avec les notations de la proposition, on suppose de plus que A possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans \mathbb{K} . Alors

$$(-1)^p c_p(A) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p},$$

où la somme porte sur tous les sous-ensembles à p éléments de $\{1, \dots, n\}$.

5. Proposition. Soit G un graphe à n sommets et

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + c_2 T^{n-2} + c_3 T^{n-3} + \dots + c_n$$

son polynôme caractéristique. Alors¹

- $c_1 = 0$,
- $-c_2$ est le nombre d'arêtes de G ,
- $-c_3$ est deux fois le nombre de triangles de G .

Exercice préliminaire à la preuve : vérifier la proposition 5 lorsque G est un triangle.

Rappel. Les coefficients c_j du polynôme P de la proposition 5 s'expriment facilement en termes des valeurs propres du graphe; par exemple, $-c_1$ est la somme des valeurs propres de G .

Preuve. Pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, le nombre $(-1)^p c_p$ est la somme des mineurs principaux d'ordre p de la matrice d'adjacence A du graphe G . On peut donc raisonner comme suit.

- (i) Comme les termes diagonaux de A sont tous nuls, on a $c_1 = 0$.
- (ii) Comme les mineurs principaux de A à 2 lignes et colonnes qui sont non identiquement nuls sont de la forme $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ et correspondent bijectivement aux arêtes du graphe, on a bien

$$(-1)^2 c_2 = -(\text{nombre d'arêtes}).$$

- (iii) Pour les mineurs principaux de A à 3 lignes et colonnes qui sont non identiquement nuls, il y a à permutation près des lignes et colonnes trois possibilités qui sont

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Les deux premiers déterminants sont nuls, et le troisième vaut 2. Ce troisième cas correspond à trois sommets mutuellement adjacents dans le graphe, de sorte que

$$(-1)^3 c_3 = 2(\text{nombre de triangles}). \quad \square$$

¹ Il est possible de continuer; par exemple, c_4 est le nombre de paires d'arêtes disjointes moins deux fois le nombre de cycles de longueur 4 dans G .

6. Définitions. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *degré* d'un sommet $x \in V$ est le nombre d'arêtes de la forme $\{x, y\}$ dans E . Le *degré maximum* de G est le maximum $d_{max}(G)$ des degrés des sommets de G . Un graphe G est *régulier* si tous ses sommets ont le même degré, et *régulier de degré k* si de plus ce degré est k .

Le *rayon spectral* de G , noté $\lambda_{max}(G)$, est la plus grande valeur absolue de valeur propre de la matrice d'adjacence de G .

7. Théorème. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

(i) Le rayon spectral et le degré maximum satisfont l'inégalité $\lambda_{max}(G) \leq d_{max}(G)$.

(ii) Si G est connexe, alors $\lambda_{max}(G)$ est une valeur propre simple de G .

(iii) Si G est régulier de degré k , alors $\lambda_{max}(G) = k$.

Preuve, dans le cas particulier d'un graphe régulier de degré k (donc tel que $\lambda_{max} = k$).

(i) Soit λ une valeur propre de G et $f \in C(V)$ une fonction propre correspondante. Soit $x_0 \in V$ un sommet tel que $|f(x_0)| \geq |f(x)|$ pour tout $x \in V$; quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f(x_0) > 0$. Alors

$$|\lambda|f(x_0) = |(Af)(x_0)| = \left| \sum_{y \sim x} f(y) \right| \leq \sum_{y \sim x} |f(y)| \leq kf(x_0)$$

car la somme $\sum_{y \sim x}$ contient k termes, et par suite $|\lambda| \leq k$.

(iii) La fonction constante de valeur 1 est une fonction propre de A de valeur propre k (que le graphe G soit connexe ou non).

(ii) Il s'agit de montrer que, si G est connexe, toute fonction propre de valeur propre k est constante. Soit à nouveau $x_0 \in V$ un point où une telle fonction f est maximum ; on peut de nouveau supposer $f(x_0) > 0$. Comme

$$kf(x_0) = \sum_{y \sim x} f(y)$$

on a nécessairement $f(y) = f(x_0)$ pour tout $y \in V$ entrant dans la somme, c'est-à-dire tel que $\{x, y\} \in E$. On montre ainsi de proche en proche que $f(z) = f(x_0)$ pour tout $z \in V$. \square

Preuve dans le cas général. Cela résulte d'un *théorème de Perron-Frobenius* qu'on trouve par exemple au chapitre XIII d'un livre de F.R. Gantmacher, *The theory of matrices, Volume two*, Chelsea 1959.

8. Exercice. On considère les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessiner les graphes correspondants, et vérifier qu'ils ne sont pas isomorphes. (Cela fait partie de l'exercice de formuler une définition raisonnable de "graphes isomorphes".)

Vérifier ensuite que ces deux graphes ont le même polynôme caractéristique, qui est

$$T^6 - 7T^4 - 4T^3 + 7T^2 + 4T - 1,$$

et donc aussi même spectre.

9. Définition. Un graphe $G = (V, E)$ est *biparti* s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles V_I, V_{II} disjoints non vides (penser à une coloration des sommets en deux couleurs) telle que toute arête $e \in E$ ait une extrémité dans V_I et l'autre dans V_{II} .

Exemples de graphes bipartis : un segment, un carré, les sommets et les arêtes d'un cube.

Exemples de graphes non bipartis : un triangle et plus généralement un graphe complet à $n \geq 3$ sommets, les sommets et les arêtes d'un octaèdre, un pentagone.

10. Théorème. Soit G un graphe connexe.

(i) Si G est biparti, pour toute valeur propre λ de G , le nombre $-\lambda$ est aussi valeur propre; en particulier, $-\lambda_{max}$ est valeur propre de G .

(ii) Si $-\lambda_{max}(G)$ est une valeur propre de G , alors G est biparti.

Preuve de (i). La matrice d'adjacence A de G définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $C(V)$ des fonctions $V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(Af)(x) = \sum f(y)$$

pour $f \in C(V)$ et x un sommet de G , où la somme porte sur les sommets y de G joints à x par une arête. Si λ est valeur propre de A , il existe une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $f \neq 0$, telle que $Af = \lambda f$. Soit $V = V_I \amalg V_{II}$ comme dans la définition 9, et soit $g \in C(V)$ la fonction définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \in V_I$, $g(x) = -f(x)$ pour $x \in V_{II}$. On vérifie que $Ag = -\lambda g$.

Preuve de (ii), dans le cas particulier où G est régulier de degré k , et où par suite $\lambda_{max}(G) = k$. Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle telle que $Af = -kf$. On choisit un sommet $x \in V$ tel que $|f(x)| \geq |f(y)|$ pour tout $y \in V$; quitte à remplacer f par $(1/f(x))f$, on peut supposer que $f(x) = 1$. Si y_1, \dots, y_k sont les sommets voisins de x , on a

$$(Af)(x) = -kf(x) = -k = \sum_{j=1}^k f(y_j)$$

$$\left| \sum_{j=1}^k f(y_j) \right| \leq \sum_{j=1}^k |f(y_j)| \leq k$$

et par suite $f(y_1) = \dots = f(y_k) = -1$. On montre de proche en proche que, pour tout sommet $z \in V$, on a ou bien $f(z) = 1$ et $f(v) = -1$ pour tout voisin v de z , ou bien

$f(z) = -1$ et $f(v) = 1$ pour tout voisin v de z . Le graphe G est donc biparti, avec sous-ensembles V_I et V_{II} de V respectivement définis par les équations $f(z) = 1$ et $f(z) = -1$. \square

La proposition 5 et les théorèmes 7 et 10 montrent qu'il y a des liens étroits entre le spectre d'un graphe et ses propriétés géométriques. Le résultat de l'exercice 8 montre que le spectre d'un graphe ne caractérise *pas* complètement le graphe lui-même.

Dans la fin de ce chapitre, nous allons présenter un autre de ces liens, découvert plus récemment et qui est encore l'objet de recherches fondamentales. *La matière qui suit ne fait pas partie du programme d'examen.*

11. Définition. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini connexe. Pour tout sous-ensemble U de V , on définit le *bord* ∂U de U comme le sous-ensemble de E formé des arêtes de la forme $\{x, y\}$ avec $x \in U$ et $y \notin U$.

La *constante isopérimétrique* de G est le nombre

$$h(G) = \min \left\{ \frac{|\partial U|}{|U|} : U \subset V, 0 < |U| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

où $|\partial U|$, $|U|$ et $|V|$ désignent respectivement les nombres d'éléments de ∂U , U et V .

Si G est vu comme un circuit de transmission, la grandeur de $h(G)$ mesure la qualité de G à transmettre de l'information.

12. Problème fondamental : construire *explicitement* des suites infinies

$$(G_m = (V_m, E_m))_{m \geq 1}$$

de graphes finis connexes, tous réguliers d'un même degré k , avec $\lim_{m \rightarrow \infty} |V_m| = \infty$ et $\liminf_{m \rightarrow \infty} h(G_m)$ strictement positif.

13. Notation. Il se trouve qu'il n'est pas facile de contrôler directement la constante $h(G)$ d'un graphe G ; on préfère introduire le nombre $\mu_1(G)$ défini ci-dessous, et tirer profit du théorème 14.

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini connexe régulier de degré k ; on note $\mu_1(G)$ la plus grande des valeurs propres de G qui sont strictement inférieure à k . Par exemple, si G est un triangle, $\mu_1(G) = -1$. (La plupart du temps, on a néanmoins $\mu_1(G) > 0$.)

14. Théorème. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini connexe et régulier de degré k . Alors

$$\frac{k - \mu_1(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1(G))}.$$

Preuve : voir par exemple le chapitre 3 dans le livre de Y. Colin de Verdière, *Spectres de graphes*, Cours spécialisé N° 4, Soc. Math. France, 1998. \square

Le résultat suivant, dû à Allon et Boppana, date du milieu des années 1980.

15. Théorème. *Etant donné un entier $k \geq 3$ et une famille $(G_m = (V_m, E_m))_{m \geq 1}$ de graphes finis connexes réguliers de degré k tels que $\lim_{m \rightarrow \infty} |V_m| = \infty$, on a*

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mu_1(G_m) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

La terminologie suivante est motivée par des travaux importants de la première moitié du siècle en arithmétique.

16. Définition. Un graphe fini connexe $G = (V, E)$ régulier de degré k est un *graphe de Ramanujan* si toute valeur propre μ de G distincte de k et de $-k$ satisfait

$$|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}.$$

Il résulte du théorème 15 que, pour un graphe de Ramanujan G de degré k , la constante isopérimétrique satisfait l'inégalité $h(G) \geq \frac{1}{2}(k - 2\sqrt{k-1})$.

17. Reformulation du problème fondamental : étant donné un entier $k \geq 3$, construire *explicitement* des suites infinies de graphes de Ramanujan.

A la suite de nombreux travaux, on connaît de telles suites pour des degrés de la forme $k = p^a + 1$ avec p premier et a entier (de sorte que $k - 1$ est l'ordre d'un corps fini).

18. Problème ouvert : existe-t-il des suites infinies de graphes de Ramanujan pour d'autres degrés, par exemple pour le degré $k = 7$?

Les graphes de Ramanujan ont été l'objet de nombreuses recherches ces dernières années, à Genève et à Neuchâtel notamment. Voir par exemple

A. Lubotzky et T. Smirnov-Nagnibeda, *Not every uniform tree covers Ramanujan graphs*, Journal of Combinatorial Theory B (1999).

A. Valette, *Graphes de Ramanujan et applications*, séminaire Bourbaki **829**, mars 1997.

La théorie des graphes est un sujet de recherche très actif. Elle donne lieu chaque année à un nombre considérable d'articles et de livres, parmi lesquels il n'est pas facile de repérer les résultats les plus importants et les arguments les plus élégants. J'aimerais terminer ces notes en recommandant la lecture d'un livre récent

M. Aigner et G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer 1988

dont la cinquième et dernière partie traite de théorie des graphes (après : théorie des nombres, géométrie, analyse, combinatoire). Le livre se réfère à un personnage unique des mathématiques du XXème siècle, Paul Erdős (1913-1997). La dernière liste de ses publications que j'ai vue comptait 1542 entrées ! Il aimait à parler du LIVRE, dans lequel

Dieu conserve les preuves parfaites des théorèmes mathématiques (il n'y a pas de place durable pour les mathématiques laides). Erdős disait aussi qu'il n'est pas nécessaire de croire en Dieu, mais qu'un mathématicien devrait croire en le LIVRE. Paul Erdős s'était enthousiasmé pour tenter une très modeste approximation du LIVRE, et en avait suggéré de nombreuses pages. La publication de Aigner et Ziegler est, pour l'instant, l'achèvement de ce projet.

PIERRE.DELAHARPE@MATH.UNIGE.CH