COURS D'ALGÈBRE I (HIVER 2002-2003) - EXERCICES

SÉRIE I DISTRIBUÉE LE 24 OCTOBRE 2002

Rappel d'organisation. Veuillez rendre les exercices rédigés à votre assistant(e) d'ici au mercredi 30 octobre à 14 h.

Mémorisation de lettres grecques : α = alpha, β = bêta, γ = gamma, δ = delta, ϵ = epsilon.

Livre recommandé : S. Lang, *Linear algebra*, Springer, 1971 (troisième édition 1987).

Exercices

(1) Montrer par récurrence sur n l'identité

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(2) La *suite de Fibonacci* $(x_n)_{n\geq 0}$ est définie par

$$x_0 = 1\,, \quad x_1 = 1\,, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Montrer par récurrence que

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

pour tout $n \geq 0$. [Indication : vérifier la formule pour $n = 0$ *et* $n = 1$ avant de dérouler l'argument de récurrence.]

(3) Corriger les erreurs, y compris les fautes de frappe, dans les énoncés suivants.
(i) $2 \subset \mathbb{N}$.
(ii) $\frac{7}{2} \in \mathbb{Z}$.
(iii) Pour toute application α d'un ensemble X dans un ensemble Y et pour deux sous-ensembles $A, B \in X$, on a $\alpha(A \cap B) \supset \alpha(A) \cap \alpha(B)$.
(iv) Soient $\alpha : X \longrightarrow Y$ une application, A une partie de X et B une partie de Y. Alors $\alpha^{-1}(\alpha(A)) = A$ et $\alpha(\alpha^{-1}(B)) = B$.

(4) Compter le nombre de bijections $\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ pour $n \leq 4$.

(5) Résoudre le système linéaire

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 8I_1 + 2I_2 &= 65 \\ -2I_2 + 11I_3 &= 50 \end{aligned}$$

en trois inconnues I_1, I_2, I_3.

SÉRIE II DISTRIBUÉE LE 31 OCTOBRE 2002

Mémorisation de lettres grecques : ζ = dzêta, η =êta, θ = thêta, ι = iota, κ = kappa.

(1) Résoudre simultanément les systèmes linéaires

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 2 \\ x & + & y & & & + & t & = & 3 \\ & & & & z & + & t & = & 5 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ x & + & y & & & + & t & = & 5 \\ & & & & z & + & t & = & 2 \end{array}\right.$$

à 3 équations et 4 inconnues.

(2)$^\sharp$ Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système linéaire

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 2z & = & 4 \\ 3x & - & 4y & - & 9z & = & 5 \\ 4x & - & 7y & + & (a^2-20)z & = & a+6 \end{array}$$

a-t-il exactement une solution ? aucune solution ? une infinité de solutions ?
Lorsqu'il y a des solutions, les calculer.

(3) Pour tout entier $d \geq 0$, soit $d\mathbb{Z}$ le sous-ensemble des entiers rationnels formé des multiples de d. Enumérez les éléments de

$$\{n \in 6\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} \mid -100 \leq n \leq 100\} \qquad \text{et} \qquad \{n \in 6\mathbb{Z} \cup 10\mathbb{Z} \mid -20 \leq n \leq 20\}.$$

(4) Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble X. Vérifier que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(5)$^\sharp$ On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y.$$

(i) Repporter sur un dessin les valeurs de $f(x,y)$ lorsque $x+y \leq 20$.

(ii) Montrer que l'application f est injective. [Indication. Soient (x,y) et (x',y') deux points distincts de $\mathbb{N}^2$. Vérifier que $f(x,y) < f(x',y')$ d'abord lorsque $x+y < x'+y'$, ensuite lorsque $x+y = x'+y'$ et $y < y'$.]

(iii) Montrer que l'application f est surjective. [Indication. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit $n, j \in \mathbb{N}$ par $\frac{1}{2}n(n+1) \leq k < \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ et $j = k - \frac{1}{2}n(n+1)$. Vérifier que $f(n-j,j) = k$.]

SÉRIE III DISTRIBUÉE LE 7 NOVEMBRE 2002

Mémorisation de lettres grecques : λ = lambda, μ = mu, ν = nu, ξ = ksi, π = pi, ρ = rhô.

(1) Les ensembles de vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$

(iii) $t \longmapsto t$, $t \longmapsto \frac{1}{t}$ dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^*$.

(2) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$ des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $f : t \longmapsto a+bt+ct^2+dt^3$, avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, on considère les sous-ensembles définis par les conditions suivantes :

(i)	f est de degré 3,	*(v)*	$f(1-t) = f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$,
(ii)	$f(2) = 3f(4)$,	*(vi)*	$f(2) = 0$,
(iii)	$f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [-1,1]$,	*(vii)*	$f(2) = 1$,
(iv)	la dérivée f' de f est paire,	*(viii)*	$tf'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_3$?

(3) Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs dont la somme des coordonnées relativement à la base canonique est nulle. Ecrire une base de V.

(4)$^\sharp$ Pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$, on note f_k la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(t) = \left(\prod_{-2 \leq j \leq 2\,,\, j \neq k} (k-j) \right)^{-1} \prod_{-2 \leq j \leq 2\,,\, j \neq k} (t-j)\,;$$

par exemple $f_{-2}(t) = \frac{1}{24}(t+1)t(t-1)(t-2)$.

Calculer $f_k(l)$ pour $k, l \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, et montrer que $\{f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_4$ des fonctions polynomiales de degrés au plus 4.

Ecrire les coordonnées d'un vecteur $f \in \mathcal{P}_4$ en fonction des valeurs $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

(5) Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les fonctions $t \longmapsto e^{ct}$ $(c \in \mathbb{R})$ sont linéairement indépendantes.

SÉRIE IV DISTRIBUÉE LE 14 NOVEMBRE 2002

Lettres grecques : σ = sigma, τ = tau, ϕ ou φ = phi, χ = khi, ψ = psi, ω = omega.

Rédiger en priorité l'exercice n° 6, puis les n$^{\text{os}}$ 1, 2, et 5. Résoudre les exercices 3 et 4 oralement (révision de cours).

(1) Vérifier que l'application

$$\mathbb{N}^2 \ni (a,b) \longmapsto 2^a(2b+1) - 1 \in \mathbb{N}$$

est une bijection. Comparer avec l'exercice II.5

(2) Quelles sont les nombres λ tels que $\{(1+\lambda, 1-\lambda), (1-\lambda, 1+\lambda)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$?

(3) Etant donné un espace vectoriel V de dimension finie et un sous-espace vectoriel U de V, on considère les assertions suivantes. Sont-elles correctes ?

(i) Toute famille génératrice de V peut être complétée en une base ;
(ii) toute famille libre de V peut être complétée en une base ;
(iii) de toute famille génératrice de V, on peut extraire une base ;
(iv) de toute famille libre de V, on peut extraire une base ;
(v) $V \setminus \{0\}$ est une famille génératrice ;
(vi) $V \setminus \{0\}$ est une famille libre ;
(vii) de toute famille génératrice de V, on peut extraire une famille génératrice de U ;
(viii) toute famille de U libre dans U est libre dans V ;
(ix) toute base de U peut être complétée en une base de V.

(4) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel U_1 des vecteurs de la forme $(x, 0, 0)$, et de même les sous-espaces U_2, U_3, ainsi que le sous-espace $U_{1,2}$ des vecteurs de la forme $(x, y, 0)$, et de même les sous-espaces $U_{1,3}$, $U_{2,3}$. Indiquer lesquelles des relations suivantes sont correctes.

(i)	$U_1 + U_2 = U_{1,2}$;	(vi)	$U_1 + U_1 = U_1$;
(ii)	$U_1 + U_{2,3} = \mathbb{R}^3$;	(vii)	$U_1 + U_{1,2} = U_{1,2}$;
(iii)	$U_{1,2} + U_{2,3} = \mathbb{R}^3$;	$(viii)$	$U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^3$;
(iv)	$U_1 \oplus U_2 = U_{1,2}$;	(ix)	$U_{1,2} \oplus U_{2,3} = \mathbb{R}^3$;
(v)	$\{0\} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}$;	(x)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \oplus \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}$.

(5) Calculer ceux des cinq produits ci-dessous qui ont un sens :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles le système linéaire

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & -4b \\ x & + & by & + & az & = & 3 \end{array}$$

en x, y, z possède des solutions, et déterminer la solution générale dans chacun de ces cas.

SÉRIE V DISTRIBUÉE LE 21 NOVEMBRE 2002

Rédiger en priorité les exercices n$^{\text{os}}$ 4, 5 et 6.

(1) = exercice de lecture. Lire le chapitre concernant les espaces vectoriels dans votre livre favori. Par exemple :

S. Lang, *Linear algebra, third edition,* Springer, 1987, chapitre 1 ;

C. Houzel, *Analyse mathématique,* Belin, 1996, certains paragraphes du chapitre 5 ;

S. Axler, *Linear algebra done right, second edition,* Springer 1997, les chapitres 1 et 2.

(Il y a des dizaines d'autres choix possibles !)

(2) Dans l'espace $\mathcal{P}_5$ des applications polynomiales $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de degrés au plus 5, définir *plusieurs* espaces supplémentaires du sous-espace vectoriel U formé des applications de la forme $t \longmapsto at^3 + bt^4$ (où $a, b \in \mathbb{R}$).

(3) Soit a la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances a^2, a^3, a^4 et a^5.

(4) Soient $n \geq 1$ un entier et $a \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice.
- (i) Si $a^2 = 0$, montrer que $I_n + a$ est inversible, et que $(I_n + a)^{-1} = I_n - a$.
- (ii) Si $a^3 = 0$, montrer que $I_n + a$ est inversible, et trouver une formule analogue à celle de (i) pour $(I_n + a)^{-1}$.
- (iii)$^\sharp$ Plus généralement, s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $a^k = 0$, montrer que $I_n + a$ est inversible et trouver une formule pour $(I_n + a)^{-1}$.
- (iv) Ecrire une matrice non nulle $b \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $b^2 = 0$.
- (v) Ecrire une matrice $c \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $c^2 \neq 0$ et $c^3 = 0$.

(5) Soient V un espace vectoriel réel, $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire et $x \in V$ un vecteur tel que $\phi(x) \neq 0$. Montrer que V est somme directe du noyau $\mathrm{Ker}\phi$ et de la droite $\mathbb{R}x$. [Lorsque l'espace but d'une application linéaire est le corps des nombres réels, on dit, ici comme souvent, "forme linéaire" au lieu de "application linéaire".]

(6) On désigne par $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire les matrices relativement à $\mathcal{C}$ de

la projection $(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$ "sur le plan horizontal",
une rotation d'un tiers de tour autour de l'axe engendré par le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$.

SÉRIE VI DISTRIBUÉE LE 28 NOVEMBRE 2002

Rédiger les exercices n$^{\text{os}}$ 2 et 3.

Les notes du chapitre II sont disponibles sur le web :

http://www.unige.ch/math/biblio/polycops/liste.html

De plus, aux notes du chapitre I, on a corrigé quelques fautes de frappe et on a ajouté
des indications historiques sur la méthode de Gauss,
une correction de l'exercice 6 de la série IV
(nouvelles pages : 17 à 19).

(1) Les assertions suivantes sont-elles vraies on non ?
- (i) Si $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base d'un espace vectoriel V, alors $(b_1 - b_2, b_2 - b_3, \ldots, b_{n-1} - b_n, b_n)$ est aussi une base de V.
- (ii) Il existe une base de $\mathcal{P}_3$ qui ne contienne aucune fonction polynomiale de degré 2.
- (iii) Si V est un espace vectoriel de dimension n, il existe n sous-espaces vectoriels $U_1, \ldots, U_n$ de V, chacun de dimension 1, tels que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.
- (iv) Il existe une base (f_0, f_1, f_2, f_3) de $\mathcal{P}_3$ telle que $f_j(2) = 0$ pour tout $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(2) On considère les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $V = \mathbb{R}^3$, ainsi que la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.

(i) Vérifier que $\mathcal{B} = (a, b, d)$ est une base de V.

(ii) Ecrire la matrice de changement de base $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_V)$.

(iii) Résoudre les trois systèmes linéaires

$$\begin{cases} x & & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 1 \end{cases} .$$

(iv) Ecrire la matrice de changement de base $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_V)$.

(v) Vérifier que les matrices $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_V)$ et $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_V)$ sont inverses l'une de l'autre.

Soit E le sous-espace vectoriel de V engendré par a et b, soit D la droite engendrée par d, et soit $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la projection sur E parallèlement à D (= de noyau D).

(vi) Ecrire la matrice de π relativement à la base $\mathcal{B}$.

(vii) Ecrire la matrice de π relativement à la base $\mathcal{C}$.

(3) Soit λ un nombre réel, et soit V_λ l'espace vectoriel des fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \longmapsto (a + bt + ct^2)e^{\lambda t} \in \mathbb{R}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la base $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, v_2\}$ définie par $v_0(t) = e^{\lambda t}$, $v_1(t) = te^{\lambda t}$ et $v_2(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t}$.

Ecrire la matrice de l'endomorphisme $D : f \longmapsto \frac{df}{dt}$ de V_λ relativement à la base $\mathcal{B}$. Lorsque $\lambda \neq 0$, écrire la matrice de l'endomorphisme inverse relativement à cette même base. [Indication : voir l'exercice V.4.]

SÉRIE VII DISTRIBUÉE LE 5 DÉCEMBRE 2002

Rédiger en priorité les exercices n$^{\text{os}}$ 1, 2, 5 et 6.

(1) Soit $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer par récurrence sur k que, pour tout entier $k \geq 2$, tous les coefficients de la matrice a^k sont strictement positifs.

(2) On pose $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans $M_2(\mathbb{R})$, calculer les quatre matrices

$$(a+b)^2 \quad , \qquad a^2 + 2ab + b^2 \quad , \qquad a^2 + 2ba + b^2 \qquad \text{et} \qquad a^2 + ab + ba + b^2.$$

(3) Soient V, W deux espaces vectoriels, $\alpha : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de V.

Si l'application α est injective, montrer que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans V si et seulement si la famille $(\alpha(v_i))_{i\in I}$ est libre dans W.

Si l'application α est surjective, est-il vrai que la famille $(v_i)_{i\in I}$ engendre V si et seulement si la famille $(\alpha(v_i))_{i\in I}$ engendre W ?

(4) Dans chacune des sept lignes ci-dessous, corriger ce qui doit l'être.

(i) $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\qquad$ (iv) $\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = Sym_2(\mathbb{R}),$

(ii) $\quad \sqrt{2} \neq \mathbb{Q},$ $\qquad$ (v) $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Sym_2(\mathbb{R}) \oplus Ant_2(\mathbb{R}),$

(iii) $\quad \{1,2,3\} = \{1,3,2\},$ $\qquad$ (vi) $\quad (1,2,3) = (1,3,2).$

(vii) Pour $t \in]0, \pi/2[$, l'application $\quad \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto x \sin t + y \cos t \in \mathbb{R} \quad$ est linéaire.

(5) Soient V un espace vectoriel et e un endomorphisme de V tel que $e^2 = e$ (on désigne par e^2 la composition de e avec e).

(i) Montrer que V est la somme directe de $\mathrm{Im}(e)$ et $\mathrm{Ker}(e)$.

(ii) Vérifier que $\mathrm{Im}(1-e) = \mathrm{Ker}(e)$ et $\mathrm{Ker}(1-e) = \mathrm{Im}(e)$; le symbole 1 désigne ici l'automorphisme identique de l'espace vectoriel V (noté ailleurs id_V).

Note : un endomorphisme e de V est dit *idempotent* s'il est tel que $e^2 = e$.

(6) Soient V un espace vectoriel et α un automorphisme de V tel que $\alpha^2 = id_V$. On pose $e = \frac{1}{2}(1-\alpha)$; noter que cette égalité a un sens dans $\mathcal{L}(V)$.

(i) Vérifier que l'endomorphisme e de V est idempotent.

(ii) Vérifier que $\alpha(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}(e)$ et $\alpha(x) = -x$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(e)$.

SÉRIE VIII DISTRIBUÉE LE 12 DÉCEMBRE 2002

Rédiger en priorité les exercices n^{os} 1, 3, 5 et 6.

(1) Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degrés au plus 3, muni de la base $(f_j)_{j=0,1,2,3}$ définie par $f_j(t) = t^j$. On considère l'application $\alpha : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ qui applique une fonction polynomiale $P(t)$ sur le reste de la division de $(1+t+t^2+t^3)P(t)$ par t^4.

(i) Vérifier que l'application α est linéaire.

(ii) Ecrire sa matrice relativement à la base $(f_j)_{j=0,1,2,3}$.

(2) Soit a la matrice $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$. Sachant que $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, pouvez-vous décider *sans calcul* si a est de rang 3 ?

(3) Pour quelles valeurs des paramètres s et t le système linéaire en les inconnues x, y, z

$$\begin{aligned} sx + 2y + z &= 1 \\ (t-1)y + sz &= s \\ sx + 2ty + tz &= 1 \end{aligned}$$

possède-t-il une unique solution, zéro solution, une famille à **un** paramètre libre de solutions, une famille à **deux** paramètres libres de solutions ?

(4) Vérifier que, pour tout entier $d \geq 1$, l'ensemble des racines d-ièmes de l'unité est un groupe abélien d'ordre d.

(5) Soit $Sym(5)$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et soit $\sigma \in Sym(5)$ la permutation définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 5$ et $\sigma(5) = 3$.
(i) Quel est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que σ^k soit la transformation identique ?
(ii) Trouver tous les éléments $\tau \in Sym(5)$ tels que $\tau\sigma = \sigma\tau$.

(6) Ecrire la décomposition en cycles du produit $(1\,,\,2\,,\,3)(2\,,\,3\,,\,4)$ dans $Sym(4)$.

INDICATIONS POUR LES EXAMENS

EXAMENS POUR ÉTUDIANTS EN MATHÉMATIQUES

(i) Il y a un premier examen portant sur le semestre d'hiver, en février ou en octobre. C'est un examen écrit, avec des exercices analogues à certains des exercices distribués chaque semaine.
(ii) Il y a un second examen avec un écrit ET un oral, en juillet ou en octobre. La partie écrite porte sur les exercices du semestre d'été, la partie orale sur le cours de l'année entière.

Les conditions de réussite sont : au moins 3 au premier examen, au moins 3 au second examen, au moins 4 à la moyenne des deux.

Les étudiants sont automatiquement inscrits à l'écrit de février ainsi qu'à l'écrit et à l'oral de juillet. En cas de non présentation ou de retrait d'inscription, ils seront automatiquement inscrits en octobre.

EXAMENS POUR ÉTUDIANTS EN PHYSIQUE

(i) Il y a un premier examen écrit portant sur le semestre d'hiver, en février ou en octobre. Il y a un second examen écrit portant sur le semestre d'été, en juillet ou en octobre. La note d'écrit sera la moyenne des deux notes obtenues.
(ii) Il y a un examen oral, portant sur toute l'année, en juillet ou en octobre.

Chaque candidat peut choisir de faire l'examen sur le semestre d'été à la session de juillet même s'il ne s'est pas présenté au premier examen de février.
Pour les étudiants en physique (et seulement pour eux !) le choix de la session pour l'oral est indépendant du choix des sessions pour les écrits
Pour leurs conditions de réussite, les étudiants en physique se référeront au règlement de leur plan d'étude.

EXAMENS POUR ÉTUDIANTS EN INFORMATIQUE

Pour l'algèbre I, les étudiants en informatique ont un examen écrit portant sur la matière du premier semestre (et n'ont pas d'examen oral sur ce cours). L'examen est possible aux sessions de février 2003 (session conseillée) et octobre 2003 (session de repêchage).

SÉRIE IX DISTRIBUÉE LE 19 DÉCEMBRE 2002

Rédiger en priorité les exercices n$^{\text{os}}$ 4, 5 et 7.
Les exercices 1 à 3 sont à prendre comme une révision.

(1) Parmi les applications suivantes, décider lesquelles sont linéaires. Pour celles qui le sont, écrire les matrices correspondantes relativement aux bases canoniques.
(i) $\alpha : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \longmapsto (x,z) \in \mathbb{R}^2$.
(ii) $\beta : \mathbb{R}^4 \ni (x,y,z,t) \longmapsto (-x-y,0,z-t) \in \mathbb{R}^3$.
(iii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \longmapsto (x,0,y,z)+(0,1,0,0) \in \mathbb{R}^4$.
(iv) $\delta : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto xy \in \mathbb{R}$.

(2) Soient U, V, W des espaces vectoriels de dimensions $2, 3, 4$, respectivement. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(U,V), \mathcal{L}(U,W))$?

(3) Existe-t-il une application $\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $Ker(\alpha) = Im(\alpha)$? une application $\beta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $Ker(\beta) = Im(\beta)$?

(4) On considère un entier $n \geq 1$ et la matrice qui s'écrit

$$a = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3n,3n}(\mathbb{R})$$

en écriture par blocs. Calculer a^{1000}. [Indication : déterminer les images des vecteurs de la base canonique par les applications corresondant aux itérés a, a^2, a^3, ... de a.]

(5) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ où $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soit $\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'automorphisme linéaire défini par $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\alpha)$.

(6) Soient V un espace vectoriel de dimension finie m et W un sous-espace vectoriel de dimension notée $m-n$ (où $1 \leq n \leq m-1$). Soit $\pi : V \longrightarrow V/W$ la projection canonique ; avec les notations du § II.6, on a donc $\pi(x) = [x]_W$ pour tout $x \in V$.

Soient $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ une base de V telle que $(b_{n+1}, \ldots, b_m)$ soit une base de W et soit $\mathcal{C} = (\pi(b_1), \ldots, \pi(b_n))$.

Vérifier que $\mathcal{C}$ est une base de V/W et écrire la matrice $\pi_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\pi)$.

(7) Ecrire la décomposition en cycles du produit $(1\,,2)(2\,,3)(3\,,4)(1\,,2)(2\,,3)(3\,,4)$ dans $Sym(4)$.

SÉRIE X DISTRIBUÉE LE 9 JANVIER 2003

Rédiger les exercices n$^{\text{os}}$ 4 à 7. Les n$^{\text{os}}$ 1 à 3 et 8 à 9 sont à faire *oralement.*

(1) Calculer les déterminants des matrices suivantes : $a = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 53 & 59 & 61 \\ 67 & 71 & 73 \\ 79 & 83 & 89 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad d = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Soit $a \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\det(a) = 3$. Calculer $\det(2a)$.

(3) Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

(4) Soient $z, w \in \mathbb{C}$ et $a \in GL_n(\mathbb{C})$. Vérifier que

$$\det\left(zI_n + wa^{-1}\right) = \frac{\det(wI_n + za)}{\det(a)}.$$

(5 = problème d'examen en février 2001) Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 101 & 102 & 103 & 104 & 105 \\ 732 & 85 & 84 & 985 & 373 \\ 176 & 177 & 178 & 179 & 180 \\ 359 & 360 & 361 & 362 & 363 \\ 423 & 975 & -58 & 199 & 199 \end{pmatrix}$ et décider si le déterminant de $\begin{pmatrix} 97 & 81 & 101 \\ 1993 & 1200 & 1999 \\ 2003 & 15 & 2017 \end{pmatrix}$ est divisible par 3. [Remarque : $\det(a) \in \mathbb{Z}$ si $a \in M_n(\mathbb{Z})$.]

(6) Décrire TOUS les vecteurs propres des matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(7) Par définition, *l'adjointe* d'une matrice $b \in M_n(\mathbb{K})$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, où $n \geq 2$, est la matrice $adj(b) \in M_n(\mathbb{K})$ dont le (i,j)-ème coefficient est $(-1)^{i+j}det(B_{i,j})$, où $B_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ désigne (comme au cours) la matrice obtenue à partir de b par suppression de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.

(i) Ecrire $adj\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ et $adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

(ii) Pour $b \in M_n(\mathbb{K})$, montrer que $b\, adj(b) = adj(b)\, b = (det(b))I_n$.

(iii) Pour $b \in GL_n(\mathbb{K})$, déduire de (ii) une formule pour b^{-1}.

!!!!!!! Voir les corrections pour cette donnée au début de la série suivante !!!!!!!

(8) Réfléchir au moins une minute au sens des égalités

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\sum_{\sigma \in Sym(n)} \epsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in Sym(n)} \epsilon\left(\sigma^{-1}\right)$$

$$\int_0^1 s\, ds = \int_0^1 t\, dt$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(j+1)}.$$

(9)$^\sharp$ On considère l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (sic !!!), et on souhaite montrer qu'il est de *dimension infinie*. (Bien sûr, le cas le plus fréquent est celui où on considère $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel *réel*, et sa dimension est alors 1.)

Pour cela, on désigne par

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999,\\ 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, \ldots\}$$

l'ensemble des nombres premiers, et on demande de montrer que $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$. En d'autres termes, si $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des nombres *rationnels* tels que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \ln p_j = 0,$$

on demande de montrer que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$.

[Indication. Se ramener au cas où $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ pour tout j, puis utiliser le théorème d'arithmétique selon lequel tout nombre entier positif possède une unique décomposition en produit de nombres premiers.]

SÉRIE XI DISTRIBUÉE LE 16 JANVIER 2003

Rédiger en priorité les exercices n$^{\text{os}}$ 1 à 3.

(Correction à l'exercice X.7) Il faut d'une part remplacer la matrice définie précédemment par sa transposée, et d'autre part corriger la terminologie. Considérons donc une matrice carrée $b \in M_n(\mathbb{K})$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, où $n \geq 2$. Par définition, la *matrice des cofacteurs* ou *comatrice* de b est la matrice $co(b) \in M_n(\mathbb{K})$ dont le (i, j)-ème coefficient est $(-1)^{i+j} det(B_{j,i})$, où $B_{j,i} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ désigne (comme au cours) la matrice obtenue à partir de b par suppression de la j-ème ligne et de la i-ème colonne.

L'exercice X.7 devient donc :

(i) Ecrire $co\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ et $co\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

(ii) Pour $b \in M_n(\mathbb{K})$, montrer que $b\, co(b) = co(b)\, b = (det(b))I_n$.

(iii) Pour $b \in GL_n(\mathbb{K})$, déduire de (ii) une formule pour b^{-1}.

(1) Pour tout entier $n \geq 1$, soit

$$a_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

la matrice définie par

$$a_n(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |i-j| = 1 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

et soit $p_n(t)$ son polynôme caractéristique.

(i) Calculer $p_1(t)$ et $p_2(t)$.
(ii) Etablir une relation linéaire entre $p_n(t)$, $p_{n-1}(t)$ et $p_{n-2}(t)$ pour tout $n \geq 3$.
(iii) Calculer $p_3(t)$ et $p_4(t)$.

(2) On considère la matrice $a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de a.
(ii) Pour chaque valeur propre de a, écrire au moins un vecteur propre correspondant.
(iii) Vérifier que a est inversible
(iv) Calculer les valeurs propres de a^{-1}.
(v) Pour chaque valeur propre de a^{-1}, écrire au moins un vecteur propre correspondant.

(3) Soient n un entier et $a \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $a^4 = I_n$. Montrer que toute valeur propre de a est l'un des nombres $1, i, -1, -i$.

($4^{\sharp\sharp}$ = exercice pour faire trébucher les calculettes)

On considère l'équation aux différences $u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}$ où p et q sont deux constantes réelles telles que $p^2 + 4q > 0$.

(i) Vérifier que les solutions de cette équation sont de la forme $u_n = \alpha s^n + \beta t^n$, où α, β sont des constantes et où s, t sont les racines du polynôme $x^2 - px - q$.

(ii) Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$ pour la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$ et $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2}$.

(iii) Progammez votre calculette selon (ii) et contemplez la suite u_{25k} pour $1 \leq k \leq 20$.

Indications pour comprendre ces résultats.

(iv) Si $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, vérifier que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

(v) On suppose p, q et les notations telles que $s > 1$ et $|t| < 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$ d'abord lorsque $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ est sur l'axe propre correspondant à s, ensuite sur l'axe propre correspondant à t.

Les données numériques de (ii) correspondent-elles à l'un de ces cas ?

(vi) Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$ lorsque $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ n'est pas sur l'un des axes propres de a.

(vii) Dans la situation de (ii), observer que les pentes des axes propres de a sont irrationnelles, et expliquer le résultat de (ii) par une approximation rationnelle d'un nombre irrationnel.

SÉRIE XII DISTRIBUÉE LE 23 JANVIER 2003

Rédiger les exercices n$^{\text{os}}$ 2 à 6[1]

(1) Pour $j \in \{1,2,3,4\}$, écrire une matrice $a_j \in M_4(\mathbb{C})$ pour laquelle le nombre 2 est une valeur propre de multiplicité algébrique 4 et de multiplicité géométrique j.

(2) Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les espaces propres de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(3) Déterminer dans $\mathbb{C}^2$ les espaces propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(4) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Trouver une matrice $s \in GL(2,\mathbb{C})$ telle que la matrice

$$s \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} s^{-1}$$

soit triangulaire.

(5) Soient α un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe V tel que $\alpha^2 = \mathrm{id}_V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $\lambda \neq \pm 1$. Trouver une combinaison linéaire de id_V et α égale à $(\lambda\,\mathrm{id}_V - \alpha)^{-1}$.

(6) Soit V l'espace des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 e^{-t^2}\, dt \;<\; \infty.$$

Soient $f_0, \dots, f_n \in V$ les fonctions définies par $f_j(t) = t^j$, et soient $h_0, \dots, h_n$ les fonctions obtenues à partir des f_j par le procédé de Gram-Schmidt. Calculer h_j pour $j \leq 2$.

[Pour cet exercice, on admet que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.]

(7) On considère un entier $n \geq 1$, un nombre complexe λ, l'espace vectoriel complexe V des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme $f(t) = (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)e^{\lambda t}$, avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, la suite $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_n)$ d'éléments de V définie par $b_j(t) = \frac{1}{j!} t^j e^{\lambda t}$, et l'endomorphisme $\alpha \in \mathcal{L}(V)$ défini par $\alpha(f) = f'$ (dérivée).

(i) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de V.
(ii) Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(\alpha)$.

---

[1] Et ne rédigez pas les autres !!!

Quelles sont les valeurs propres de cette matrice ? leurs multiplicités ?

(8) Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'on considère les b_j comme des vecteurs à coordonnées complexes, montrer qu'ils forment encore une base de $\mathbb{C}^n$.

SÉRIE XIII DISTRIBUÉE LE 30 JANVIER 2003

Rédiger les exercices n$^{\text{os}}$ 5 à 8[2]

(1) Soient α, β deux opérateurs autoadjoints sur un espace hermitien. Montrer que $\alpha\beta$ est autoadjoint si et seulement si α et β commutent.

(2) Ecrire un opérateur dans l'espace $\mathbb{C}^2$ (muni de son produit scalaire canonique) qui n'est pas autoadjoint.

(3) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ? autoadjointe ? unitaire ?

(4) Vérifier que l'application $h : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(a, b) = \mathrm{trace}(a^*b)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$. [Rappel : la trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.]

(5) Déterminer les valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{C}$ pour lesquelles le système linéaire

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array}$$

possède des solutions complexes, et déterminer la solution générale dans chaque cas.

(6) Pour tout entier $n \geq 1$, soit $c_n = (c_n(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par

$$c_n(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i+j = n, \\ 2 & \text{si} \quad i+j = n+1, \\ 3 & \text{si} \quad i+j = n+2, \\ 0 & \text{dans les autres cas ;} \end{cases} \qquad \text{par exemple :} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calculer $\det(c_n)$ pour $n \leq 2$.
(ii) Etablir une relation linéaire entre $\det(c_n)$, $\det(c_{n-1})$ et $\det(c_{n-2})$ pour $n \geq 3$.
(iii) Calculer $\det(c_n)$ pour $n = 3, 4, 5$.

[2] Et ne rédigez pas les autres !!!

(7) Soit V l'espace des fonctions continues $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-t}dt < \infty$. Soient $f_0, f_1, \ldots$ les fonctions définies par $f_j(t) = t^j$, et soient $e_0, e_1, \ldots$ les fonctions obtenues à partir des f_j par le procédé de Gram-Schmidt. Calculer e_0, e_1 et e_2.
[Rappel : en intégrant par parties, on calcule $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = \ldots = n!$ pour tout entier $n \geq 0$.]

(8) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, trouver une base orthonormale formée de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

RÉSERVE

(A) Soient V un espace hermitien, U un sous-espace de V et $p \in \mathcal{L}(V)$ la projection orthogonale de V sur U. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 \neq \lambda \neq 1$, écrire $(\lambda\,\mathrm{id}_V - p)^{-1}$ en termes de id_V et p. [Comparer avec l'exercice XII.5.]

(B) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $a = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ puisse s'écrire comme un produit $a = lu$, avec $l = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & t \end{pmatrix}$, $r \neq 0$, $t \neq 0$, et $u = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[Les lettres “l” et “u” sont les initiales de “lower triangular” et “upper triangular”.]

(C) Soit $x = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $x_{1,1} \neq 0$, $\det\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \neq 0$, et $\det(x) \neq 0$. Montrer qu'on peut écrire un produit de la forme

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $acf \neq 0$. Calculer alors les inverses des deux matrices apparaissant dans le membre de droite de cette égalité, en fonction des nombres $a, b, c, d, e, f, p, q, r$.