

Cohomologie équivariante de
certaines variétés hamiltoniennes
et de leur partie réelle

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur en mathématiques
par
Cédric SCHMID

Table des matières

1	Introduction	2
2	Cohomologie équivariante pour les actions de tores	6
2.1	Définitions	6
2.2	L'anneau $H_T^*(pt; \Lambda)$	7
2.3	Classes caractéristiques équivariantes	8
2.4	Actions sur S^2	9
3	Actions Λ-pures	13
3.1	Actions Λ -pures	13
3.2	Le théorème du 1-squelette	20
3.3	Le théorème GKM sur un anneau factoriel	24
4	Cohomologie équivariante pour les actions de 2-tores	27
4.1	L'anneau $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$	27
4.2	Classes caractéristiques équivariantes	28
4.3	Actions sur S^1	29
5	Actions hamiltoniennes avec conjugaison	31
5.1	Définitions	31
5.2	Le théorème du 1-squelette pour la partie réelle	34
5.3	Le théorème GKM pour les parties réelles	34
5.4	Le théorème du \mathbb{Z}_2 -isomorphisme	35
6	Exemples et applications	37
6.1	Cohomologie non-équivariante	37
6.2	Variétés toriques complexes et réelles	40
6.3	Les orbites coadjointes	47
6.4	Les orbites coadjointes de $SU(n)$	48

Chapitre 1

Introduction

Considérons une variété symplectique compacte V munie d'une involution antisymplectique $i : V \rightarrow V$. La variété lagrangienne V' formée des points fixes de i est appelée la *partie réelle* de V (pour l'involution i). Par exemple, si $V \subset \mathbb{C}P^n$ est une variété projective complexe, définie sur les réels, et si i est la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}P^n$, on aura $V' = V \cap \mathbb{R}P^n$.

Dans plusieurs cas, des similarités apparaissent entre les anneaux de cohomologie de V et de V' , lorsque l'on prend le corps à deux éléments \mathbb{Z}_2 comme anneau de coefficients. Par exemple,

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}_2) &\approx \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1}) \quad (\text{degré}(u) = 2) \\ H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) &\approx \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1}) \quad (\text{degré}(u) = 1). \end{aligned}$$

On a donc un isomorphisme d'anneau

$$H^{2*}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}_2) \approx H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \tag{1.1}$$

De tels isomorphismes, modulo l'opération de "compression (ou doublage) des degrés", semble être étudiés pour la première fois par A. Borel et A. Haefliger [BH, § 5.15]. On en rencontre, par exemple, pour les grassmanniennes ([BH, § 5.16] et [MS]), les variétés toriques [DJ, Theorem 4.14], les espaces de configurations de polygones [HK, § 9]. Ces isomorphismes proviennent de l'étude de décompositions cellulaires i -invariantes de V , comme les cellules de Schubert, induisant une décomposition cellulaire de V' . Ces décompositions peuvent, le plus souvent, être obtenues via des fonctions de Morse i -invariantes.

Le point commun des variétés mentionnées ci-dessus est qu'elles admettent une action hamiltonnienne effective d'un tore T . Cette action et l'involution i sont compatibles, en ce sens qu'elles s'étendent en une action sur V

du produit semi-direct $T \ltimes \{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ agit sur T par passage à l'inverse. Dans ce contexte, si la partie réelle V' est non-vide, J. Duistermaat [Du] a montré l'égalité des nombres de Betti : $\dim H^*(V; \mathbb{Z}_2) = \dim H^{2*}(V'; \mathbb{Z}_2)$. Cette égalité est obtenue en utilisant l'application moment de l'action hamiltonienne sur V pour obtenir des fonction de Morse i -invariantes sur (V, V') .

Le résultat de Duistermaat ne donne pas directement la structure multiplicative des anneaux de cohomologie. Il est naturellement tentant de conjecturer que l'égalité des nombres de Betti provient d'un isomorphisme d'anneau et c'est l'un des buts de notre travail que de le démontrer. Pour cela, nous comparons la cohomologie équivariante $H_T^{2*}(V; \mathbb{Z}_2)$ de l'action de T sur V à la cohomologie équivariante $H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2)$ du groupe de 2-torsion T_2 de T , qui agit sur V' vu les hypothèses de compatibilité. Sous l'hypothèse que l'action est \mathbb{Z}_2 -pure, nous construisons, au § 5.4, un isomorphisme

$$H_T^{2*}(V; \mathbb{Z}_2) \approx H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2). \quad (1.2)$$

Il s'agit d'un isomorphisme d'algèbres au dessus d'un épimorphisme naturel d'anneaux $H_T^{2*}(pt; \mathbb{Z}_2) \approx H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$. Une action sur V est Λ -pure, pour un anneau factoriel Λ , si, en tout point fixe c , les poids de la représentation d'isotropie sur $T_c V$ sont Λ -primitifs et deux-à-deux linéairement indépendants sur Λ (voir § 3.1).

Pour obtenir l'isomorphisme (1.2), on observe que les actions Λ -pures sont des cas particuliers d'actions considérées par M. Goresky, R. Kottwitz et R. MacPherson [GKM]. Soit $F \subset V$ l'ensemble des points fixes (isolés si l'action est Λ -pure). Il est connu depuis la thèse de F. Kirwan [Ki] que l'homomorphisme de restriction $\rho : H_T^*(V; \mathbb{C}) \rightarrow H_T^*(F; \mathbb{C})$ est injectif. Le théorème 7.2 de [GKM] affirme que, sous certaines hypothèses, l'image est formée des solutions d'un système d'équations linéaires à coefficients entiers (que nous appellerons *équations GKM*). Nous démontrons au § 3.3, que pour une application Λ -pure, ce théorème est vrai pour $H_T^*(V; \Lambda)$, avec le *même* système d'équations. Notre démonstration suit l'idée de S. Tolman et J. Weitsman [TW] qui tire parti d'une fonction de Morse sur V obtenue en évaluant l'application moment sur un élément générique de l'algèbre de Lie de T . La même approche permet de décrire l'anneau $H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2)$ pour une action \mathbb{Z}_2 -pure (voir § 5.3). L'isomorphisme (1.2), démontré au théorème 5.4.1), découle alors de ces descriptions.

Dans le § 6.1, nous montrons que si l'action de T sur V est Λ -pure, elle est cohomologiquement formelle, c'est-à-dire que la suite spectrale $H^p(BT; H^q(V; \Lambda)) \Rightarrow H_T^{p+q}(V; \Lambda)$ dégénère au terme E_2 . Ceci provient simplement du fait que la cohomologie de BT et celle de V sont nulles en degrés

impairs. En utilisant des théorèmes délicats de Duistermaat [Du] et Allday-Puppe [AP], nous montrons que si l'action de T sur V est \mathbb{Z}_2 -pure, l'action de T_2 sur V' est cohomologiquement formelle avec coefficients \mathbb{Z}_2 . Ceci permet, à partir de l'isomorphisme 1.2, de déduire l'isomorphisme (1.1) pour les anneaux de cohomologie ordinaire (théorème 6.1.5).

Les actions \mathbb{Z} -pures sont particulièrement intéressantes car, alors, nos techniques permettent de calculer la cohomologie équivariante à coefficients dans n'importe quel anneau factoriel, ainsi que la cohomologie équivariante mod 2 de la partie réelle. Un exemple d'actions \mathbb{Z} -pures est donné par les variétés toriques (voir § 6.2). Dans [Br2], M. Brion a déjà observé que l'on peut utiliser le théorème de Goresky-Kottwitz-MacPherson pour décrire la cohomologie équivariante rationnelle $H_T^*(V; \mathbb{Q})$ d'une variété torique V . Dans le § 6.2, nous donnons une présentation par générateurs et relations de la cohomologie équivariante de V à coefficients dans n'importe quel anneau factoriel (et de la cohomologie équivariante mod 2 de sa partie réelle). Cette présentation s'envoie, par l'épimorphisme $H_T^*(V; \Lambda) \rightarrow H^*(V; \Lambda)$, sur la présentation classique de Danilov [Fu, chapitre 5]. Ceci constitue une nouvelle démonstration du théorème de Danilov ainsi que du calcul par M. Davis et T. Januszkiewicz de la cohomologie mod 2 des parties réelles [DJ, Theorem 4.14].

Un autre exemple d'action \mathbb{Z} -pures est fourni, pour le groupe $SU(n)$, par l'action d'un tore maximal sur les orbites coadjointes. Ceci est montré dans le § 6.3. Comme application, nous donnons une présentation par générateurs et relations de la cohomologie équivariante, à coefficients dans n'importe quel anneau factoriel, des orbites co-adjointes génériques de $SU(3)$ ainsi que de la cohomologie équivariante mod 2 leur partie réelle. Cette présentation s'envoie, par l'épimorphisme $H_T^*(V; \Lambda) \rightarrow H^*(V; \Lambda)$, sur une présentation classique donnée par le calcul de Schubert.

Observons que d'autres description de la cohomologie équivariante des orbites co-adjointes de $SU(n)$ et des variétés toriques (en tout cas à coefficients rationnels ou complexes) peut être déduite de travaux de différents auteurs (voir [Br, p. 229] pour des références). Nos présentations sont différentes.

Terminons cette introduction par une remarque générale. Dans la littérature sur les variétés hamiltoniennes, les cohomologies équivariantes ou non-équivariantes sont souvent calculées à coefficients dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Cette situation s'explique par trois raisons :

- l'usage de la cohomologie de de Rham et des modèles de Cartan pour la cohomologie équivariante avec les formes différentielles.
- le désir d'éviter les difficultés techniques liées aux stabilisateurs finis

(en fait, une action est Λ -pure si les points fixes sont isolés et si l'ordre de tout stabilisateur fini est inversible dans Λ).

- l'impression que, lorsque les groupes de cohomologie d'une variété V sont nuls en degrés impairs, la structure d'anneau de $H^*(V; \mathbb{C})$ détermine celle de $H^*(V; \Lambda)$ pour $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Ceci est incorrect. Par exemple, en tant qu'anneau :

$$\begin{aligned} H^*(S^2 \times S^2; \mathbb{C}) &\approx H^*(\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}; \mathbb{C}) \approx H^*(\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2; \mathbb{C}) \\ H^*(S^2 \times S^2; \mathbb{R}) &\approx H^*(\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}; \mathbb{R}) \not\approx H^*(\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2; \mathbb{R}) \\ H^*(S^2 \times S^2; \mathbb{Q}) &\not\approx H^*(\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}; \mathbb{Q}) \not\approx H^*(\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2; \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Cela provient de la classification des formes d'intersections qui sont, respectivement,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc considérer comme remarquable le fait que les présentations des anneaux de cohomologie réelle ou complexe des variétés hamiltoniennes considérées dans ce travail donnent, dans le cas d'actions \mathbb{Z} -pures, également des présentations des anneaux de cohomologie sur n'importe quel anneau de coefficients.

Je tiens à remercier les membres de la section de Mathématiques de Genève pour l'ambiance stimulante dont j'ai pu bénéficier pendant mes études et mes années d'assistantat. Plusieurs discussions avec A. Knutson et V. Puppe m'ont été fort utiles. La lecture de [GZ] m'a inspiré pour les calculs du § 6.2. Je remercie également M. Audin, M. Brion et Cl. Weber d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et de m'avoir fait des commentaires utiles pour améliorer la présentation de la première version. Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance au prof. J-Cl. Hausmann pour son aide tout au long de la préparation de cette thèse.

Chapitre 2

Cohomologie équivariante pour les actions de tores

2.1 Définitions

Ce chapitre fixe les notations et introduit les notions de cohomologie équivariante des actions de tores dont nous aurons besoin. La plupart des résultats est “bien connue” des spécialistes.

Soit G un groupe topologique agissant à gauche sur un espace V . Soit Λ un anneau commutatif.

La *cohomologie équivariante* $H_G^*(V; \Lambda)$ de V à coefficients dans Λ est définie de la manière suivante. Soit $EG \rightarrow BG$ le G -fibré principal universel de Milnor. On pose

$$H_G^*(V; \Lambda) := H^*(EG \times_G V; \Lambda)$$

où $EG \times_G V$ (la “construction de Borel”) est le quotient de $EG \times V$ par la relation d’équivalence $(zg, u) \sim (z, gu)$, pour tout $(z, u) \in EG \times V$ et $g \in G$ (G est supposé agir à droite sur le joint infini EG). Par exemple, $EG \times_G pt = EG/G = BG$, donc, si V est réduit à un point, l’anneau $H_G^*(pt, \Lambda)$ s’identifie à $H^*(BG, \Lambda)$.

La projection de $EG \times V$ sur EG passe aux quotients, définissant une application $EG \times_G V \rightarrow BG$, qui est le fibré de fibre V associé au fibré principal universel $EG \rightarrow BG$. On en déduit un homomorphisme d’anneau $H_G^*(pt, \Lambda) \rightarrow H_G^*(V; \Lambda)$, ce qui munit la cohomologie équivariante $H_G^*(V; \Lambda)$ d’une structure de $H_G^*(pt, \Lambda)$ -algèbre. Il est donc important de décrire explicitement l’anneau $H_G^*(pt, \Lambda)$, ce que nous allons faire dans le §2.2 pour G un tore et, au chapitre 4, pour G un 2-groupe fini abélien élémentaire.

Observons que si $\alpha : G' \rightarrow G$ est un homomorphisme continu, on a un homomorphisme $\alpha^* : H_G^*(pt, \Lambda) \rightarrow H_{G'}^*(pt, \Lambda)$ ce qui fait de $H_G^*(pt, \Lambda)$ un foncteur contravariant en G .

2.2 L'anneau $H_T^*(pt; \Lambda)$

Soit T un tore (groupe de Lie abélien compact et connexe), et t son algèbre de Lie. On sait que l'application exponentielle $\exp : t \rightarrow T$ est un homomorphisme. Soit $\Gamma = \Gamma(t) := \ker \exp$ son noyau, qui est un réseau dans t .

Soit Λ un anneau commutatif. On désigne par $\Gamma_\Lambda^* := \text{Hom}(\Gamma, \Lambda)$, l'ensemble des homomorphismes de groupe de Γ dans Λ . Observons que la correspondance $T \mapsto \Gamma_\Lambda^*(T)$ est un foncteur contravariant : si $\alpha : T' \rightarrow T$ est un homomorphisme différentiable, on a un homomorphisme $L_\alpha : t' \rightarrow t$ tel que $L_\alpha(\Gamma(t')) \subset \Gamma(t)$ d'où un homomorphisme $\alpha^* : \Gamma_\Lambda^*(T) \rightarrow \Gamma_\Lambda^*(T')$.

Proposition 2.2.1 *Il existe un isomorphisme de groupes*

$$H_T^2(pt; \Lambda) \approx \Gamma_\Lambda^*(T)$$

qui est fonctoriel en T .

PREUVE: On commence par $\Lambda = \mathbb{Z}$. Considérons le cercle $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Un homomorphisme différentiable de T dans S^1 est recouvert par un homomorphisme différentiable de t dans \mathbb{R} envoyant Γ dans \mathbb{Z} . Il est clair que cela donne un isomorphisme

$$\Gamma_\mathbb{Z}^* \approx \text{Hom}(T, S^1)$$

D'autre part, on a les isomorphismes

$$\text{Hom}(T, S^1) \approx [BT, BS^1] \approx H^2(BT; \mathbb{Z}), \quad (2.1)$$

où $[BT, BS^1]$ dénote l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de BT dans BS^1 (c'est un groupe car $BS^1 = K(\mathbb{Z}, 2)$ est un H -espace). Le dernier isomorphisme utilise une identification de BS^1 avec $K(\mathbb{Z}, 2)$ qui, pour nous, sera obtenue de la manière suivante. Il suffit d'identifier $\pi_2(BS^1)$ avec \mathbb{Z} . Cela se fait en prenant comme générateur de $\pi_2(BS^1)$ la classe d'homotopie de la composition

$$S^2 \xrightarrow{a} \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{b} BS^1,$$

où a est une équivalence d'homotopie que l'on choisit préservant l'orientation (ceci est unique à homotopie près; $\mathbb{C}P^1$ est orienté par sa structure complexe)

et b induit le fibré canonique (S^1 -fibré principal de Hopf $S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$). Avec cette identification, si ξ est un S^1 -fibré principal sur un CW-complexe X induit par $X \xrightarrow{f} BS^1$, alors sa classe d'Euler $e(\xi) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ correspond à $[f] \in [X, BS^1]$.

On a ainsi montré la proposition pour $\Lambda = \mathbb{Z}$. Le cas général s'en déduit en utilisant que BT est 1-connexe ce qui, par le théorème des coefficients universels, donne l'isomorphisme

$$H^2(BT, \Lambda) \approx H^2(BT; \mathbb{Z}) \otimes \Lambda.$$

Quant à la functorialité, elle est évidente, vu les constructions que l'on a utilisées. \square

Choisissons une base $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ de Γ , comme groupe abélien libre. Notons u_i^* les éléments de la base duale de $\Gamma_{\mathbb{Z}}^*$ et également leur image dans Γ_{Λ}^* . On sait que l'anneau $H^*(BT; \Lambda) = \Lambda[u_1^*, \dots, u_n^*]$. Intrinséquement, cela signifie que $H^*(BT; \Lambda)$ est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(H^2(BT; \Lambda)) = S(\Gamma_{\Lambda}^*)$. On a ainsi montré :

Proposition 2.2.2 *L'anneau $H_T^*(pt; \Lambda)$ est functoriellement isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\Gamma_{\Lambda}^*)$.*

Remarque Lorsqu'on a choisi une base $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ de Γ , on peut servir dans les calculs de l'isomorphisme $H^*(BT; \Lambda) = \Lambda[u_1^*, \dots, u_n^*] \approx \Lambda[u_1, \dots, u_n]$. Si $\Lambda = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , ceci, avec le fait que t est maintenant identifié à \mathbb{R}^n , identifie l'anneau $\Lambda[u_1, \dots, u_n]$ aux fonctions polynomiales sur $t = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans Λ . Ceci est abondamment utilisé, par exemple dans [GKM].

2.3 Classes caractéristiques équivariantes

Soit $\xi : W \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel complexe de rang n qui soit T -équivariant. On vérifie que $ET \times_T W \rightarrow ET \times_T X$ est un fibré vectoriel complexe de même rang. Ce dernier fibré a donc une classe de Chern (totale) dans $H^*(ET \times_T X; \mathbb{Z}) = H_T^*(X; \mathbb{Z})$ que l'on appelle la *classe de Chern équivariante* de ξ , notée $c^T(\xi) = 1 + c_1^T(\xi) + \dots + c_n^T(\xi)$. La composante de plus haut degré $c_n^T(\xi) \in H_T^{2n}(X; \mathbb{Z})$ est la *classe d'Euler équivariante* de ξ et sera notée également $e^T(\xi)$.

Par exemple, soit $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)$. On lui associe une représentation complexe de T de degré 1, c'est-à-dire une action linéaire de T sur \mathbb{C} . On peut voir cela comme un fibré vectoriel complexe T -équivariant de rang 1 sur un point, noté $\eta(\gamma)$. Sa classe de Chern équivariante $c^T(\eta(\gamma))$ est un élément de $H_T^*(pt; \mathbb{Z})$

qui, par la proposition 2.2.2 est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T))$. Avec ces identifications, on a :

Proposition 2.3.1 $c^T(\eta(\gamma)) = 1 + \gamma$. En particulier, $e^T(\eta(\gamma)) = \gamma$.

PREUVE: L'homomorphisme $\gamma : \Gamma(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ induit un homomorphisme continu $\gamma : T \rightarrow S^1$. Soit $E\gamma : ET \rightarrow ES^1$ l'application induite par γ . On vérifie que l'application $\tilde{E}\gamma : ET \times \mathbb{C} \rightarrow ES^1 \times \mathbb{C}$ donnée par $(q, z) \mapsto (E\gamma(q), z)$ passe aux quotients et donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} ET \times_T \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{E}\gamma} & ES^1 \times_{S^1} \mathbb{C} \quad (\text{où } S^1 \text{ agit sur } \mathbb{C} \text{ par la multiplication}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ ET \times_T pt & \xrightarrow{B\gamma} & BS^1. \end{array} \quad (2.2)$$

La classe de Chern de $\eta(\gamma)$ est donc l'image par $(B\gamma)^*$ de celle du fibré canonique $ES^1 \rightarrow BS^1$. Cette dernière, en degré 2, est $[\text{id}_{BS^1}] \in [BS^1, BS^1] \approx H^2(BS^1; \mathbb{Z})$. On a donc $c_1^T(\eta(\gamma)) = [B\gamma] \in H^2(BT; \mathbb{Z})$, ce qui, avec les identifications de (2.1), donne $c_1^T(\eta(\gamma)) = \gamma \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*$. \square

Comme cas particulier, soit V un espace vectoriel complexe de dimension r sur lequel T agit linéairement, via un homomorphisme $\gamma : T \rightarrow U(r)$. Comme ci-dessus, cela donne un fibré vectoriel complexe de rang r équivariant sur un point. La représentation γ se décompose en somme directe de représentations V_i de rang 1, correspondant à des poids $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)$. Comme $ET \times_T V \rightarrow BT$ est la somme de Whitney des $ET \times_T V_i$, la démonstration de la proposition 2.3.1 donne, avec la formule de produit pour les classes de Chern :

Proposition 2.3.2 $c^T(\eta(\gamma)) = \prod_{i=1}^r (1 + \gamma_i)$. En particulier, $e^T(\eta(\gamma)) = \prod_{i=1}^r \gamma_i$.

2.4 Actions sur S^2

Considérons la sphère S^2 comme

$$S^2 : = \{(z, \theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + \theta^2 = 1\}.$$

L'action naturelle de $U(1) = S^1$ sur \mathbb{C} donne une action de $U(1)$ sur S^2 , avec les deux pôles $p_{\pm} : = (0, \pm 1)$ comme points fixes. Soit T un tore et $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)$. Notons q_{γ} l'entier ≥ 0 tel que $\text{Image}(\gamma) = \mathbb{Z} \cdot q_{\gamma}$. L'élément γ détermine un homomorphisme continu $\gamma : T \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ce dernier peut être

identifié à $U(1)$ par $t \mapsto e^{2i\pi t}$. L'élément γ détermine donc une action de T sur S^2 ayant les pôles p_{\pm} comme points fixes.

Soit Λ un anneau commutatif. On note $\gamma^{\Lambda} \in \Gamma_{\Lambda}^*$ la composition de γ avec l'unique homomorphisme d'anneau $\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda$. Le but de ce paragraphe est de démontrer le

Théorème 2.4.1 *Supposons que $q_{\gamma} \neq 0$ si Λ est de caractéristique 0 ou que, sinon, q_{γ} est une unité de Λ . Alors, l'homomorphisme de $H_T^*(pt; \Lambda)$ -algèbre*

$$H_T^*(S^2; \Lambda) \rightarrow H_T^*(p_-; \Lambda) \oplus H_T^*(p_+; \Lambda) \approx S(\Gamma_{\Lambda}^*) \oplus S(\Gamma_{\Lambda}^*)$$

induit par l'inclusion $\{p_-, p_+\} \subset S^2$ est injectif et son image est la sous- $H_T^(pt; \Lambda)$ -algèbre de $S(\Gamma_{\Lambda}^*) \oplus S(\Gamma_{\Lambda}^*)$ engendrée par $(1, 1)$ et $(0, \gamma^{\Lambda})$.*

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.4.2 *Soit G un groupe topologique agissant transitivement sur un espace W . Soit G_0 le groupe d'isotropie de $w_0 \in W$. Alors, pour tout anneau commutatif Λ , on a un isomorphisme de $H_G^*(pt; \Lambda)$ -algèbre*

$$H_G^*(W; \Lambda) \approx H^*(BG_0, \Lambda).$$

PREUVE: Comme l'action est transitive, on a

$$EG \times_G W \approx EG/G_0 \approx BG_0. \quad \square$$

PREUVE DU THÉORÈME 2.4.1 :

Soient $D_+ := S^2 - \{p_-\}$ et $D_- := S^2 - \{p_+\}$. Les espaces $(ET \times_T S^2, ET \times_T D_{\pm})$ donnent lieu à une suite de Mayer-Vietoris. L'intersection $D_+ \cap D_-$ a le type d'homotopie équivariant de S^1 sur lequel T agit par $s \cdot z = \gamma(s)z$. Comme $q := q_{\gamma} \neq 0$, cette action est transitive. Le groupe d'isotropie d'un élément de S^1 est alors isomorphe à $T' \times C_q$, où T' est un tore et C_q est un groupe cyclique d'ordre q . Par le lemme 2.4.2, on a $H_T^*(S^1, \mathbb{Z}) \approx H^*(BT' \times BC_q; \mathbb{Z})$. Le calcul de la cohomologie de BC_q , isomorphe à la cohomologie du groupe C_q est classique et donne :

$$H^*(BC_q; \mathbb{Z}) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 0 \\ \mathbb{Z}_q & \text{si } * = 2k > 0 \\ 0 & \text{si } * = 2k + 1 \end{cases} .$$

De même, si Λ est de caractéristique non-nulle, comme alors q est une unité de Λ , on aura $H^*(BC_q; \Lambda) = 0$ si $* > 0$. Par la formule de Künneth, on en

déduit que $H^*(BT' \times BC_q; \Lambda) = 0$ si $*$ est pair. La suite de Mayer-Vietoris se coupe donc en suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow H_T^*(S^2; \Lambda) \rightarrow H_T^*(p_-; \Lambda) \oplus H_T^*(p_+; \Lambda) \rightarrow H^*(BT' \times BC_p; \Lambda) \rightarrow 0.$$

On en déduit l'injectivité de $H_T^*(S^2; \Lambda) \rightarrow H_T^*(p_-; \Lambda) \oplus H_T^*(p_+; \Lambda)$.

L'inclusions $pt = p_- \in D_- \subset S^2$ donne le diagramme commutatif (avec \mathbb{Z} comme coefficients)

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(S^2) & \longrightarrow & H_T^*(D_-) \\ & \searrow & \downarrow \approx \\ & & H_T^*(pt) \end{array}$$

On en déduit que la suite exacte de la paire (S^2, D_-) donne une suite exacte de $H_T^*(pt)$ -module

$$0 \rightarrow H_T^*(S^2, D_-) \rightarrow H_T^*(S^2) \rightarrow H_T^*(D_-) \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

qui est scindée. On a

$$H_T^*(S^2, D_-) \approx H_T^*(D_+, D_+ - \{p_+\}) \approx H_T^{*-2}(p_+),$$

le dernier isomorphisme étant l'isomorphisme de Thom. Appelons $a \in H_T^2(D_+, D_+ - \{p_+\})$ la classe correspondant à $1 \in H^0(p_+)$ (classe de Thom). On dénotera aussi par a les images de a dans $H_T^2(S^2, D_-)$ et dans $H_T^2(S^2)$. Par le théorème de Leray-Hirsch [Hu, ch. 16], le groupe gradué $H_T^*(S^2, D_-)$ est un $H_T^*(pt)$ -module libre de base a . Observons que l'action sur D_+ est conjuguée à l'action linéaire de T sur C donnée par γ , c'est-à-dire le fibré $\eta(\gamma)$ du §2.3. L'image de a par $H_T^2(S^2) \rightarrow H_T^2(p_+)$ est donc la classe d'Euler équivariante de $\eta(\gamma)$ qui est aussi $c_1^T(\eta(\gamma))$. Par la proposition 2.3.1, l'image de a par $H_T^2(S^2) \rightarrow H_T^2(p_+)$ est donc égale à γ . Ceci montre que, dans le cadre du théorème 2.4.1, l'élément $(0, \gamma) \in S(\gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)) \times S(\gamma_{\mathbb{Z}}^*(T))$ est l'image de $a \in H_T^2(S^2)$. D'autre part, les éléments diagonaux sont dans l'image de $H_T^*(pt) \rightarrow H_T^*(S^2) \rightarrow S(\gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)) \times S(\gamma_{\mathbb{Z}}^*(T))$.

La suite exacte (2.3) étant scindée, on a que $H_T^*(S^2) \approx H_T^*(pt) \oplus H_T^*(S^2, D_-)$ (isomorphisme de $H_T^*(pt)$ -module). Cela prouve que les éléments diagonaux et $(0, \gamma)$ engendrent toute l'image de $H_T^*(S^2)$.

Le théorème 2.4.1 est ainsi démontré. \square

Le théorème 2.4.1 nous permet de donner, dans le théorème 2.4.3 ci-après, une présentation de $H_T^*(S^2; \Lambda)$ (sans hypothèse, ni sur q_γ , ni sur Λ). Observons que le fibré $ET \times_T S^2 \rightarrow BT$, de fibre S^2 donne un homomorphisme d'anneau $i^* : H_T^*(S^2; \Lambda) \rightarrow H^*(S^2; \Lambda)$ (induit par l'inclusion de la fibre dans l'espace total).

Théorème 2.4.3 *L'anneau $H_T^*(S^2; \Lambda)$ est isomorphe à la $S(\Gamma_\Lambda^*)$ -algèbre libre de base a (où a est de degré 2) quotientée par l'idéal engendré par $a^2 - \gamma \otimes a$. L'image de a par i^* est le générateur de $H^2(S^2; \Lambda)$ (correspondant à l'orientation standard de S^2).*

PREUVE: Si $q_\gamma = 0$, l'action de T sur S^2 est triviale et on a $ET \times_T S^2 \approx BT \times S^2$. Donc

$$H_T^*(S^2; \Lambda) \approx H^*(BT; \Lambda)[a]/(a^2).$$

Si $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $q_\gamma \neq 0$, le théorème 2.4.3 est un corollaire du théorème 2.4.1. En effet, dans $S(\gamma_\mathbb{Z}^*(T)) \times S(\gamma_\mathbb{Z}^*(T))$, on a $(0, \gamma)^2 = (\gamma, \gamma) \cdot (0, \gamma)$. Cet argument est valable aussi lorsque q_γ est une unité dans Λ .

Dans le cas général, on utilise que $H_T^*(S^2; \Lambda) \approx H_T^*(S^2; \mathbb{Z}) \otimes \Lambda$. En effet, comme S^2 n'a que de la cohomologie en degrés pairs, ainsi en est-il de l'homologie $H_*(ET \times_T S^2; \mathbb{Z})$ puisque la suite spectrale de la fibration $S^2 \rightarrow ET \times_T S^2 \rightarrow BT$ dégénère au terme E_2 pour des raisons de degré. Par le théorème des coefficients universels, on a

$$H^*(ET \times_T S^2; \Lambda) \approx \text{Hom}(H_*(ET \times_T S^2; \mathbb{Z}), \Lambda) \approx H^*(ET \times_T S^2; \mathbb{Z}) \otimes \Lambda.$$

Chapitre 3

Actions Λ -pures

3.1 Actions Λ -pures

Soit T un tore agissant différentiablement (à gauche) sur une variété symplectique (V, ω) , toujours supposée compacte. Pour chaque $\xi \in \mathfrak{t} = \text{Lie } T$, on dénote par $\underline{\xi}$ le “champ fondamental” sur V , dont le flot est l’action du sous-groupe à un paramètre $\exp(s\xi)$. On dit que l’action est *hamiltonienne* s’il existe une application invariante $\mu : V \rightarrow \mathfrak{t}^*$ telle que, pour tout $\xi \in \mathfrak{t}$, l’application $\mu_\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mu_\xi(x) := \langle \mu(x), \xi \rangle$ admet le champ $-\underline{\xi}$ pour champ hamiltonien. En d’autres termes,

$$d\mu_\xi = -\iota_\xi \omega \tag{3.1}$$

(cette convention de signe correspond à celle de [Gu]). Un tel “hamiltonien global” μ s’appelle une *application moment* de l’action. Deux applications moment diffèrent par l’addition d’une constante de \mathfrak{t}^* et, par abus de langage, on parlera parfois de “l’application moment”. Pour diverses propriétés des actions hamiltoniennes de tores, voir [Au], [Gu] et [MSa]. Par exemple, le théorème d’Atiyah-Guillemin-Sternberg [Au, § III.4.2] affirme que l’image $\mu(V)$ est un polytope convexe (le *polytope moment*) formé par l’enveloppe convexe de l’image des points fixes de l’action (rappelons que V est supposée compacte).

Pour une action hamiltonienne, on note $V_i \subset V$ l’ensemble des points dont le stabilisateur T_x est de codimension $\leq i$ dans T . Ainsi, V_0 est l’ensemble des points fixes qui sera le plus souvent désigné par F . On appelle V_i le *i -squelette* de l’action. Il découle du [Au, ch. III, prop. 1.2.1] que l’espace $V_i - V_{i-1}$ est une sous-variété symplectique T -invariante de V , et que l’action de T sur $V_i - V_{i-1}$ est hamiltonienne ($\mu|_{V_i - V_{i-1}}$ en étant une application moment).

Rapelons que (V, ω) peut être munie d'une structure presque Kaehlerienne (structure complexe sur le fibré tangent, avec métrique hermitienne dont ω est la partie imaginaire) qui est T invariante [Au, § II.1.5 et III.1.2]. Pour chaque point fixe $x_0 \in F$, l'action de T sur $T_{x_0}V$ donne une représentation complexe de T . Celle-ci se décompose en n représentations irréductibles (si $\dim V = 2n$), déterminées par des poids $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T) = H_T^2(pt; \mathbb{Z})$. Les γ_i sont les *poids* (ou poids d'isotropie) de l'action (en x_0). Observons que $\Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)$ peut être vu comme un réseau dans t^* :

$$\Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T) \approx \{\alpha \in t^* \mid \alpha(\Gamma(T)) \subset \mathbb{Z}\}.$$

Ceci permet de voir les poids γ_i en x_0 comme des vecteurs tangents à t^* en $\mu(x_0)$.

Dans tout ce chapitre, Λ désignera un anneau non-trivial, commutatif et factoriel, c'est-à-dire où tout élément se factorise de manière unique, à l'ordre près, en produit d'éléments premiers. Une action hamiltonienne de T sur V est dite Λ -*pure* si, pour tout point fixe $x_0 \in F$, les deux conditions suivantes sont remplies :

- les poids en x_0 sont deux-à-deux linéairement indépendants dans le Λ -module $\Gamma_{\Lambda}^*(T)$.
- chaque poids $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)$ en x_0 , est Λ primitif, c'est-à-dire que l'entier q_{γ} défini par $q_{\gamma} \cdot \mathbb{Z} = \text{Image}(\gamma)$ est une unité dans Λ .

Exemples :

3.1.1 Considérons le tore $T = U(1) = S^1$. Son algèbre de Lie t est égale à $i\mathbb{R}$ et le réseau $\Gamma = \ker \exp$ est $2i\pi\mathbb{Z}$. Le couplage $\mathbb{R} \times t \rightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$\langle \alpha, it \rangle := \frac{1}{2\pi} \alpha t \tag{3.2}$$

a l'avantage d'identifier $(t^*, \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T))$ avec (\mathbb{R}, \mathbb{Z}) .

Considérons l'action de S^1 sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ donnée par $\lambda \cdot z := \lambda^k z$. On munit \mathbb{R}^2 de la forme symplectique $\omega := \frac{1}{\pi} dx \wedge dy$. L'action considérée est alors hamiltonienne avec application moment $\mu(z) = k|z|^2$. En effet, si l'on prend le générateur $\xi = 2\pi i \in i\mathbb{R}$, on a

$$\mu_{\xi}(z) = \langle k \frac{|z|^2}{2}, 2\pi i \rangle = k \frac{|z|^2}{2} = \mu(z). \tag{3.3}$$

On a donc bien l'équation

$$d\mu_{\xi} = 2kx dx + 2ky dy = -i(-2\pi ky \frac{\partial}{\partial x} + 2\pi kx \frac{\partial}{\partial y})\omega = -i(\underline{\xi})\omega.$$

Le poids en 0 est bien sûr l'entier k (que l'on dessinera comme le vecteur $0\vec{k}$). L'action est donc Λ -pure si et seulement si $1/k \in \Lambda$.

Si à la place du couplage (3.2), on prend simplement $\langle \alpha, it \rangle := \alpha t$ et si l'on prend pour ω la forme standard $\omega := dx \wedge dy$, l'action est aussi hamiltonienne, avec application moment $\mu(z) = k \frac{|z|^2}{2}$. Cette fois, le réseau des poids est $\frac{1}{2\pi}\mathbb{Z}$ et le poids en 0 doit être dessiné comme le vecteur de longueur $1/2\pi$.

3.1.2 Sur $\mathbb{C}^n = (\mathbb{R}^2)^n$ avec la forme symplectique $\omega := \frac{1}{2\pi} \sum dx_i \wedge dy_i$, l'action de $T := (S^1)^n$ donnée par

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (\lambda_1^{k_1} z_1, \dots, \lambda_n^{k_n} z_n)$$

est hamiltonienne avec application moment $\mu(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n k_j |z_j|^2$. On utilise ici une identification du type (3.2) entre $(t^*, \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T))$ et $(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n)$. Les poids en 0 sont les vecteurs $(k_1, 0, \dots, 0)$, $(0, k_2, 0, \dots, 0)$, etc, et l'image de μ est le cône positif sur ces poids.

Cette action est Λ -pure si et seulement si $1/k_i \in \Lambda$ pour tout $i = 1 \dots n$.

3.1.3 Plus généralement, soient $\gamma_i \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T) \subset t^*$ un ensemble de n poids. On considère (\mathbb{C}^n, ω) comme dans l'exemple 3.1.2. L'action de T donnée, pour $\xi \in t$, par

$$\exp(\xi) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (e^{2i\pi\gamma_1(\xi)} z_1, \dots, e^{2i\pi\gamma_n(\xi)} z_n)$$

est hamiltonienne avec application moment

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \gamma_j. \quad (3.4)$$

En effet, soit $\xi \in t$. En $z = (z_1, \dots, z_n)$, le champ $\underline{\xi}$ vaut $\underline{\xi}_z = \dot{c}(0)$, où $c(t) = \exp(\xi t) \cdot (z_1, \dots, z_n)$. On a donc

$$\underline{\xi}_z = 2\pi i (\gamma_1(\xi) i z_1, \dots, \gamma_n(\xi) i z_n).$$

Avec les coordonnées $z_j = x_j + iy_j$, cela donne

$$\underline{\xi} = 2\pi \sum_{j=1}^n \left(-y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

On a donc bien

$$d\mu_\xi = \frac{2}{\pi} \gamma(\xi) (x dx + y dy) = -i(\underline{\xi})\omega.$$

L'image de μ est le cône positif sur les γ_i qui sont les poids en 0.

3.1.4 Considérons, comme au § 2.4, la 2-sphère $S^2 := \{(z, \theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + \theta^2 = 1\}$. On la munit de l'unique forme symplectique ω qui est $SO(3)$ -invariante, qui détermine l'orientation standard et telle que $\int_{S^2} \omega = 2$. L'action de $T = S^1$ sur S^2 donnée par $\lambda \cdot (z, \theta) := (\lambda^{-k}z, \theta)$ est hamiltonienne, avec application moment $\mu(z, \theta) = \theta$. L'identification de \mathbb{R} avec t^* est celle de (3.2), donc le réseau des poids est \mathbb{Z} . L'image de μ est le segment $[-1, 1]$, le poids en $(0, -1)$ est k et celui en $(0, 1)$ est $-k$. Cette action est Λ -pure si et seulement si $1/k \in \Lambda$.

3.1.5 Considérons le plan projectif complexe $(\mathbb{C}P^2, \omega)$, où ω est la forme de Fubini-Study [MSa, p. 130]. Les points $\mathbb{C}P^2$ sont notés en coordonnées homogènes par $(z_0 : z_1 : z_2)$. L'action de $T = (S^1)^2$ donnée par

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (z_0 : z_1 : z_2) := (z_0 : \lambda_1^{k_1} z_1 : \lambda_2^{k_2} z_2)$$

est hamiltonienne avec application moment

$$\mu(z_0 : z_1 : z_2) = \frac{1}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2} (k_1 |z_1|^2, k_2 |z_2|^2).$$

On utilise ici l'identification entre \mathbb{R}^2 et t^* similaire à (3.2) qui identifie le réseau des poids avec \mathbb{Z}^2 . Il suffit de vérifier que μ est une application moment sur l'ouvert dense où $z_0 \neq 0$. Par rapport aux coordonnées locales $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (1 : x_1 + iy_1 : x_2 + iy_2)$, la forme de Fubini-Study prend l'expression ([MSa, p. 130]) :

$$\omega = \frac{1}{\pi(1 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2} (dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2).$$

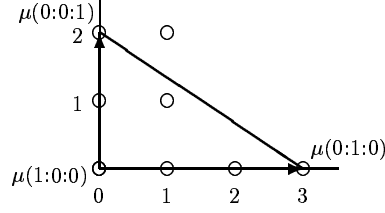
Vu la définition de μ , les calculs sont similaires à ceux des des exemples 3.1.1 et 3.1.2.

Avec nos conventions, l'image de μ est le triangle constitué par l'enveloppe convexe de l'image des 3 points fixes

$$\mu(1:0:0) = (0, 0) \quad \mu(0:1:0) = (k_1, 0) \quad \mu(0:0:1) = (0, k_2).$$

Les poids en $(1:0:0)$ sont $(k_1, 0)$ et $(0, k_2)$, ceux en $(0:1:0)$ sont $(-k_1, 0)$ et $(-k_1, k_2)$ et les poids en $(0:0:1)$ sont $(0, -k_2)$ et $(k_1, -k_2)$. On voit que, comme dans l'exemple 3.1.2, le polytope moment est, au voisinage de l'image d'un point fixe c , le cône positif engendré par les poids en c . La figure ci-dessous représente le polytope moment pour le cas $(k_1, k_2) = (3, 2)$; on y a

dessiné les deux poids en $(1:0:0)$.



Cette action est Λ -pure si et seulement si $1/k_1$ et $1/k_2$ sont dans Λ .

3.1.6 Considérons la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$ munie d'une forme symplectique $U(2)$ -invariante (un multiple de la forme de Fubini-Study). On considère un tore T agissant sur $\mathbb{C}P^1$ par

$$\exp(s) \cdot (z_0 : z_1) := (z_0 : e^{2i\pi\gamma(s)} z_1), \quad s \in \mathfrak{t},$$

où $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T) \subset \mathfrak{t}^*$ est un poids. Cette action est hamiltonienne et toute application moment est de la forme

$$\mu(z_0 : z_1) = cte + K \frac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \gamma, \quad (3.5)$$

avec $0 \neq K \in \mathbb{R}$. En effet, comme dans l'exemple 3.1.5, on travaille sur l'ouvert dense $z_0 \neq 0$ avec les coordonnées locales $x + iy \mapsto (1 : x + iy)$. La forme ω prend l'expression

$$\omega = L \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad L \neq 0.$$

Pour $\xi \in \mathfrak{t}$, on a

$$d\mu_{\xi} = \frac{2Kx dx + 2Ky dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \gamma(\xi) = -\iota(\eta_{x+iy}) \omega,$$

où η est le champ de vecteur

$$\eta_{x+iy} = \frac{-2Ky}{L} \gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{-Kx}{L} \gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Quant au champ $\underline{\xi}$, on a $\underline{\xi}_{x+iy} = \dot{c}(0)$, où $c(t) := e^{2i\pi\gamma(\xi t)}(x + iy) = e^{2i\pi\gamma(\xi)t}(x + iy)$. Donc, $\underline{\xi}_{x+iy} = 2i\pi\gamma(\xi)(x + iy)$ et la formule (3.5) est vérifiée pour $K = \pi L$.

Le polytope moment est ainsi le segment $[\mu(1:0), \mu(0:1)]$ et $\mu(0:1) - \mu(1:0) = K\gamma$. Les poids d'isotropie en $(1:0)$ et en $(0:1)$ sont $\pm\gamma$, le signe déterminé par le fait qu'ils rentrent dans le segment $[\mu(1:0), \mu(0:1)]$. Ceci découle de la formule (3.5) lorsque $L > 0$ (puisqu'alors $K > 0$) et du fait que changer le signe de ω change le signe de μ et de chaque poids d'isotropie.

Pour désigner un exemple de cette forme, on parlera d'un γ - $\mathbb{C}P^1$. Par ce qui précède, le poids γ est déterminé au signe près par le polytope moment. Il n'est d'ailleurs pas possible de distinguer un γ - $\mathbb{C}P^1$ d'un $(-\gamma)$ - $\mathbb{C}P^1$, ces deux actions étant conjuguées par le symplectomorphisme $(z_0: z_1) \mapsto (z_1: z_0)$.

Voyons maintenant quelques propriétés des actions Λ -pures.

Lemme 3.1.7 *Dans une action hamiltonienne Λ -pure, chaque poids en un point fixe x_0 a multiplicité 1 et deux tels poids distincts sont premiers entre eux dans l'anneau $H_T^*(pt; \Lambda)$.*

PREUVE: La multiplicité 1 est banale, autrement, il y aurait deux poids égaux. Pour la seconde assertion, soit $\alpha \in H_T^*(pt; \Lambda)$ un diviseur commun de deux poids $a, b \in H_T^2(pt; \Lambda)$. Si α est de degré 2, alors a et b ne sont pas linéairement indépendants. Si α est de degré 0 et n'est pas une unité, l'un des deux poids a ou b n'est pas Λ primitif. \square

Lemme 3.1.8 *Pour une action hamiltonienne Λ -pure sur V , les points fixes sont isolés.*

PREUVE: En un point fixe non-isolé, l'un des poids au moins est nul, ce qui contredit le fait qu'ils sont deux-à-deux linéairement indépendants (on utilise ici que Λ est non-trivial). \square

Pour une action hamiltonienne Λ -pure de T sur (V, ω) , avec application moment μ , un élément $\xi \in t$ est dit *générique* si $\gamma(\xi) \neq 0$ pour tout poids γ de l'action. Le lemme ci-dessous est un cas particulier du théorème de Frankel (voir [Au, § III.2.2]).

Lemme 3.1.9 *Si $\xi \in t$ est générique, la fonction μ_ξ est une fonction de Morse dont l'ensemble des points critiques est F . L'indice de $c \in F$ est égal à 2 fois le nombre de poids γ en c tels que $\gamma(\xi) < 0$.*

PREUVE: Comme ω est non-dégénérée le fait que l'ensemble des points critiques de μ_ξ soit F découle directement de l'équation (3.1). Au voisinage d'un point fixe c , isolé par le lemme 3.1.8, le théorème de Darboux équivariant

[Au, ch. II, 1.3.2 et 1.3.3] assure que l'action est symplectomorphe à l'action linéaire sur $T_c V$. Une telle action est de la forme de l'exemple 3.1.3 et la formule (3.4) est valable à une constante additive près, ce qui implique que $\mu_\xi(z) = \mu_\xi(c) + \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \gamma(\xi)$. \square

La propriété la plus importante des actions Λ -pures est que leur 1-squelette est un "graphe de 2-sphères".

Lemme 3.1.10 *Considérons une action hamiltonienne Λ -pure d'un tore T sur une variété symplectique compacte V , avec application moment $\mu : V \rightarrow t^*$. Alors,*

1. *le 1-squelette V_1 est une union finie de 2-sphères, chacune rencontrant F en exactement 2 points. Pour $a \neq b$ dans F , il existe au plus une 2-sphère de V_1 contenant $\{a, b\}$, que nous noterons $S_{\{a,b\}}$. L'intersection de $S_{\{a,b\}}$ avec $S_{\{a',b'\}}$ est*

$$S_{\{a,b\}} \cap S_{\{a',b'\}} = \begin{cases} S_{\{a,b\}} = S_{\{a',b'\}} & \text{si } \{a, b\} = \{a', b'\}, \\ \{a, b\} \cap \{a', b'\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. *Chaque $S_{\{a,b\}}$ est une sous-variété symplectique de V . Elle est T -invariante et la restriction de l'action à $S_{\{a,b\}}$ est hamiltonienne avec application moment $\mu|_{S_{\{a,b\}}}$.*
3. *$\mu(S_{\{a,b\}})$ est le segment $[\mu(a), \mu(b)]$.*
4. *$\mu(b) - \mu(a) = k\gamma_a$ et $\mu(a) - \mu(b) = k\gamma_b$, où $k \in \mathbb{R}_{>0}$ et γ_a (respectivement: γ_b) est un poids en a (respectivement: en b) de l'action de T sur V . On a donc $\gamma_b = -\gamma_a$.*
5. *L'action de T à S_i est hamiltonienne et est symplectomorphe à un γ - $\mathbb{C}P^1$ de l'exemple 3.1.6, où γ est bien défini au signe près: $\gamma = \pm\gamma_a$.*
6. *V_1 est connexe.*

Exemple : Dans l'exemple 3.1.5, où $V = \mathbb{C}P^2$, F est formé des trois points $a := (1:0:0)$, $b := (0:1:0)$ et $c := (0:0:1)$. Le 1-squelette V_1 est constitué de trois 2-sphères, les droites de coordonnées dans $\mathbb{C}P^2$

$$\begin{aligned} S_{\{a,b\}} &= \{(z_0:z_1:z_2) \mid z_2 = 0\}, \\ S_{\{b,c\}} &= \{(z_0:z_1:z_2) \mid z_0 = 0\}, \\ S_{\{c,a\}} &= \{(z_0:z_1:z_2) \mid z_1 = 0\}. \end{aligned}$$

PREUVE DU LEMME 3.1.10: Soit T' un sous-tore de codimension 1 de T . Le sous-espace V' de V formé des points qui sont laissés fixes par T' est une sous-variété symplectique compacte de V ([Au, Ch. III, Prop. 1.2.1]). De plus, V' est invariant sous l'action de T . L'action sur V étant hamiltonienne, sa restriction à V' l'est aussi, avec $\mu|_{V'}$ pour application moment. Une action hamiltonienne sur une variété compacte a au moins deux points fixes, les extrema de l'application moment. Il s'ensuit que l'adhérence de chaque composante connexe de $V' - V'_0$ rencontre le sous-espace F en au moins 2 points.

Au voisinage d'un tel point fixe c (isolé par le lemme 3.1.8), l'action est équivalente à l'action linéaire sur $T_c V$. Comme l'action est Λ -pure, les espaces propres pour chaque poids sont de dimension réelle 2 par le lemme 3.1.7. Il s'en suit que $V'_1 - V'_0$ est de dimension 2.

L'adhérence S d'une composante connexe de $V'_1 - V'_0$ est donc une sous-variété symplectique connexe, compacte et de dimension 2, équipée d'une action hamiltonienne non-triviale de T/T' . L'application moment $\mu^S : S \rightarrow \text{Lie}(T/T')$ est une fonction de Morse avec point critiques d'indice pair par le lemme 3.1.9. La variété S est donc forcément une 2-sphère et l'action a exactement 2 points fixes. En fait, l'action est équivalente à un $\gamma\text{-}\mathbb{C}P^1$. Cette dernière assertion peut se montrer, par exemple, de la manière suivante: en passant éventuellement au quotient de T/T' par le noyau de l'action, on peut supposer que l'action est libre. L'action de T/T' sur S fait alors de S une variété torique qui est déterminée par son polytope moment (théorème de Delzant, [De, Théorème 2.1]).

Les différents points du lemme 3.1.10 découlent des considérations ci-dessus et de celles de l'exemple 3.1.6. Quant au point 6, soit \hat{V}_1 une composante connexe de V_1 et $\hat{F} = \hat{V}_1 \cap F$. Soit $\xi \in t$ un élément générique et soit $c \in \hat{F}$ un point maximal pour $\mu_{\xi}|_{\hat{F}}$. Par le lemme 3.1.9, tout poids γ en c doit satisfaire $\gamma(\xi) < 0$, d'où c est un maximum de μ_{ξ} . Mais, comme les points critiques de μ_{ξ} sont d'indice pair (toujours par le lemme 3.1.9), la fonction μ_{ξ} n'a qu'un seul maximum, ce qui implique que $\hat{F} = F$ et donc V_1 est connexe. \square

3.2 Le théorème du 1-squelette

Théorème 3.2.1 (Théorème du 1-squelette) *Soit V une variété symplectique compacte connexe munie d'une action hamiltonienne Λ -pure d'un tore T . Alors*

1. *Le morphisme $\rho : H_T^*(V, \Lambda) \rightarrow H_T^*(F, \Lambda)$ induit par l'inclusion de F*

dans V est injectif.

2. Le morphisme $\delta : H_T^*(V_1, \Lambda) \rightarrow H_T^*(F, \Lambda)$ induit par l'inclusion de F dans V_1 a même image que ρ .

Ce théorème a été démontré, dans des cadres divers et pour la cohomologie rationnelle, par T. Chang et T. Skjelbred [CT, Lemme 2.3], M. Goresky, R. Kottwitz et R. MacPherson [GKM, th. 6.3]. Notre démonstration suit essentiellement celle de S. Tolman et T. Weitsman [TW, Th. 1]. Quelques préparatifs sont nécessaires.

Soit ξ un élément générique de t . Alors, si $\mu : V \rightarrow t^*$ est l'application moment, l'application $f(z) = \mu_\xi(z)$ est une fonction de Morse avec F comme ensemble de points critiques.

Soit c une valeur critique de f . Soit $\epsilon > 0$ tel que $[c-\epsilon, c+\epsilon] \cap f(\text{Crit } f) = \{c\}$. Soit $W_c^- = f^{-1}(-\infty, c-\epsilon)$, $W_c^+ = f^{-1}(-\infty, c+\epsilon)$ et $F_c = f^{-1}(\{c\}) \cap F$. Comme F est discret par le lemme 3.1.8, l'espace F_c est un ensemble fini de points x_c^i ($i = 1, \dots, k_c$). Soit D_c le fibré en disque négatif à F_c et S_c son fibré en sphères associé. L'espace D_c est une union disjointe de disques, celui contenant x_c^i étant de dimension λ_c^i , l'indice de Morse de x_c^i . Chacun de ces disques étant muni d'une action de T équivalente à une action linéaire, on a une classe d'Euler $e_c \in H^*(F_c; \mathbb{Z})$ qui est la somme de ses composantes $e_c^i \in H^{\lambda_c^i}(x_c^i; \mathbb{Z})$.

Pour simplifier la notation la cohomologie équivariante de V pour l'action de T sera toujours à coefficients dans Λ : ($H_T^*(-) := H_T(-; \Lambda)$). Le lemme suivant est démontré dans [AB, prop. 1.9] pour Λ un corps (voir aussi [TW, prop. 2.1]).

Lemme 3.2.2 *La suite exacte pour la paire (W_c^+, W_c^-) se rompt en suites exactes courtes:*

$$0 \longrightarrow H_T^*(W_c^+, W_c^-) \longrightarrow H_T^*(W_c^+) \longrightarrow H_T^*(W_c^-) \longrightarrow 0$$

De plus l'application de $H_T(W_c^+)$ dans $H_T(F_c)$ induite par l'inclusion envoie isomorphiquement $H_T^(W_c^+, W_c^-)$ sur l'ensemble des multiples de la classe d'Euler équivariante e_c du fibré normal négatif à F_c .*

PREUVE: La paire (W_c^+, W_c^-) a même cohomologie équivariante que la paire (D_c, S_c) . Par l'isomorphisme de Thom en cohomologie équivariante on a:

$$H_T^*(D_c, S_c) \approx \bigoplus_i H_T^*(D^{\lambda_c^i}, S^{\lambda_c^i-1}) \approx \bigoplus_i H_T^{*-\lambda_c^i}(x_c^i)$$

Nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & H_T^*(W_c^+, W_c^-) & \xrightarrow{\gamma_c} & H_T^*(W_c^+) & \longrightarrow & H_T^*(W_c^-) \\
& \downarrow \approx & & \downarrow & & \\
& H_T^*(D_c, S_c) & \longrightarrow & H_T^*(F_c) & \xrightarrow{\approx} & \bigoplus_i H_T^{*-\lambda_c^i}(x_c^i) \\
& \downarrow \approx & & \nearrow \cup e_c & & \\
& \bigoplus_i H_T^{*-\lambda_c^i}(x_c^i) & & & &
\end{array}$$

La classe e_c^i est un produit de poids de l'action en x_c^i (voir lemme 2.3.2). Aucun de ces poids n'est nul puisqu'ils sont Λ -primitifs. Dans tout les cas, on en déduit que l'application $-\cup e_c$ est injective et, par conséquent, que γ_c est injective. \square

Remarque: Si Λ est de caractéristique 0 le lemme 3.2.2 est vrai sans l'hypothèse de Λ -primitivité des poids. Il suffit, en fait que les points fixes soient isolés.

Lemme 3.2.3 *Avec les notations du lemme 3.2.2, soit $r : H_T^*(V_1 \cap W_c^+) \rightarrow H_T^*(F \cap W_c^-)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion. Alors, l'homomorphisme de $H_T(W_c^+)$ dans $H_T(F_c)$ induit par l'inclusion envoie isomorphiquement $\ker r$ sur l'ensemble des multiples de la classe d'Euler équivariante e_c du fibré normal négatif à F_c .*

PREUVE: Soit $\eta \in H_T^*(V_1 \cap W_c^+)$. Soit X_i l'ensemble des composantes de $V_1 \cap W_c^-$ telles que $x_c \in \bar{X}_i$, pour l'un des $x_c \in F_c$, et $f(X_i) \in]-\infty, c[$ (composantes descendantes). Par le lemme 3.1.10, chaque \bar{X}_i est une 2-sphère munie d'une γ_i -action, où γ_i est un poids en F_c . L'inclusion $x_c \subset F_c \subset W_c^+$ se factorise à travers tous les X_i touchant x_c . Pour chacun d'eux, on connaît l'image de $H_T^*(X_i) \rightarrow H_T^*(x_c)$ par le théorème 2.4.1. Si $\eta \in \ker r$, il en résulte que η restreinte à x_c est un multiple d'un poids γ_i en x_c . Comme ces γ_i sont deux-à-deux premiers entre-eux, la classe η restreinte à x_c est aussi un multiple de $e_{x_c} = \prod e_i$ qui est la classe d'Euler du fibré normal négatif de x_c . Cela prouve que l'homomorphisme de $H_T(W_c^+)$ dans $H_T(F_c)$ induit par

l'inclusion envoie $\ker r$ dans l'ensemble $H_T^*(pt) \cdot e_c$, où e_c est la classe d'Euler équivariante du fibré normal négatif à F_c . D'autre part, $H_T^*(pt) \cdot e_c$ est, par le lemme 3.2.2, égale à l'image de $H_T^*(W_c^+, W_c^-) \rightarrow H_T^*(W_c^+) \rightarrow H_T^*(F_c)$. Comme ce dernier homomorphisme se factorise à travers $\ker r$, cela prouve que $H_T^*(pt) \cdot e_c$ est inclus dans l'image de $\ker r$. \square

PREUVE DU THÉORÈME 3.2.1 Soit $c_1 < \dots < c_m$ l'ensemble des valeurs critiques ordonnées. Soit $W_i := f^{-1}(-\infty, c_i)$ et $F_i = F \cap W_i$.

Pour démontrer la partie 1) du théorème 3.2.1, on montre que $\rho : H_T^*(W_i) \rightarrow H_T^*(F_i)$ est injective pour tout i . Ceci se démontre par induction sur i . L'énoncé est vrai pour $W_1 = \emptyset$. On a que W_2 est un disque, car f a un unique minimum (V étant connexe et les points critiques étant d'indice pair par le lemme 3.1.9). Donc F_2 contient un seul point et $H_T^*(W_2) \approx H_T^*(F_2)$.

On suppose donc que $\rho^* : H_T^*(W_i) \rightarrow H_T^*(F_i)$ est injectif et on va montrer la même chose pour $i + 1$ (avec $i \geq 2$). On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_T^*(W_{i+1}, W_i) & \longrightarrow & H_T^*(W_{i+1}) & \longrightarrow & H_T^*(W_i) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \rho_{i+1}^* & & \downarrow \rho_i^* & & \\
0 & \longrightarrow & H_T^*(F_{c_{i+1}}) & \longrightarrow & H_T^*(F_{i+1}) & \longrightarrow & H_T^*(F_i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le lemme 3.2.2 nous donne les deux zéros aux extrémités de la première ligne et le fait que la première flèche verticale ($- \cup e_{c_{i+1}}$) est injective. La suite inférieure est aussi exacte; ses zéros viennent de ce que $F_i \subset F_{i+1}$ sont des ensembles discrets. Par hypothèse d'induction, ρ_i^* est injective. Par un argument classique de chasse dans le diagramme, on en déduit que ρ_{i+1}^* est aussi injective. Cela démontre la partie 1) du théorème 3.2.1.

La 2e partie du théorème 3.2.1 se démontre également par récurrence sur i . Pour $i = 2$, on utilise que la composition $H_T^*(W_2) \rightarrow H_T^*(V_1 \cap W_2) \rightarrow H_T^*(F_2)$ est un isomorphisme.

Introduisons les notations :

- $J_i^* := \text{Image}(H_T^*(V_1 \cap W_i) \rightarrow H_T^*(F_i))$.
- $J_{i+1,i}^* := \text{Image}(H_T^*(V_1 \cap W_{i+1}, V_1 \cap W_i) \rightarrow H_T^*(F_{i+1}, F_i) \approx H_T^*(F_c))$.

Comme l'image de $\rho_i^* : H_T^*(W_i) \rightarrow H_T^*(F_i)$ est contenue dans J_i^* , on a un diagramme commutatif

$$0 \rightarrow H_T^*(W_{i+1}, W_i) \rightarrow H_T^*(W_{i+1}) \rightarrow H_T^*(W_i) \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow \rho_{i+1,i}^* & & \downarrow \rho_{i+1}^* & & \downarrow \rho_i^* \\ 0 & \rightarrow & J_{i+1,i}^* & \rightarrow & J_{i+1}^* & \rightarrow & J_i^* \rightarrow 0 \end{array} \quad (2)$$

La suite (1) est exacte par le lemme 3.2.2. Il est plus étonnant que la suite (2) soit aussi exacte. En effet l'injectivité de $J_{i+1,i}^* \rightarrow J_{i+1}^*$ est évidente, puisque $H_T^*(F_{i+1}, F_i) \rightarrow H_T^*(F_{i+1})$ est injective. La surjectivité de $J_{i+1}^* \rightarrow J_i^*$ vient de ce que ρ_i^* est surjective par hypothèse de récurrence. La composition $J_{i+1,i}^* \rightarrow J_{i+1}^* \rightarrow J_i^*$ est nulle car la suite (2) est une image de la suite exacte de la paire $(V_1 \cap W_{i+1}, V_1 \cap W_i)$. Enfin, soit $\eta \in \ker(J_{i+1}^* \rightarrow J_i^*)$. La classe η est l'image de $\tilde{\eta} \in \ker(H_T^*(V_1 \cap W_{i+1}) \rightarrow H_T^*(F_i))$. Par les lemmes 3.2.2 et 3.2.3, l'image de $\ker(H_T^*(V_1 \cap W_{i+1}) \rightarrow H_T^*(F_i))$ dans $H_T^*(F_i)$ est la même que celle de $H_T^*(W_{i+1}, W_i)$, ce qui prouve que η est dans l'image de $J_{i+1,i}^* \rightarrow J_{i+1}^*$.

On a déjà dit que ρ_i^* est surjective par hypothèse de récurrence. La flèche $\rho_{i+1,i}^*$ est surjective par les lemmes 3.2.2 et 3.2.3 (en fait, $J_{i+1,i}^*$ est $H_T^*(pt) \cdot e_c$). Par chasse dans le diagramme, on en déduit que ρ_i^* est surjective. \square

3.3 Le théorème GKM sur un anneau factoriel

Considérons une action hamiltonienne Λ -pure d'un tore T sur une variété symplectique (connexe) M (Λ factoriel). Considérons le produit symétrique

$$F \tilde{\times} F := F \times F - \Delta / \{(a, b) \sim (b, a)\},$$

où Δ est la diagonale. L'ensemble $F \tilde{\times} F$ s'identifie à l'ensemble des doubletons de F . Etant donné le lemme 3.1.10, on peut définir le sous-ensemble $\mathcal{J} \subset F \tilde{\times} F$ par $(a, b) \in \mathcal{J}$ ssi il existe une 2-sphère $S_{\{a,b\}} \subset V_1$ contenant a et b . On notera S_{ab} pour désigner $S_{\{a,b\}}$.

Soient T_{ab} la composante connexe de l'élément neutre du stabilisateur de S_{ab} . Le groupe T_{ab} est donc un tore de codimension 1 dans T d'algèbre de Lie t_{ab} . Par le lemme 3.1.10, l'action de T se restreint à la sphère S_{ab} en une γ_{ab} -action (où le poids $\gamma_{ab} \in \Gamma_{\mathbb{Z}}^*(T)$ est bien défini au signe près et $\Gamma(T_{ab}) = \ker \gamma_{ab}$).

L'anneau $H_T^*(F; \Lambda)$ se décompose en $\bigoplus_{x \in F} H_T^*(x; \Lambda)$. Appelons p_x la composante de $x \in H_T^*(F)$. L'image du morphisme injectif de restriction $\rho : H_T^*(V; \Lambda) \rightarrow H_T^*(F; \Lambda)$ est décrite par le

Théorème 3.3.1 (Théorème GKM) *L'anneau $H_T^*(V; \Lambda)$ est isomorphe à la sous- $H_T^*(pt; \Lambda)$ -algèbre des $p \in H_T^*(F; \Lambda)$ tels que, pour tout $(a, b) \in \mathcal{J}$, on ait*

$$p_b - p_a \in H_T^*(pt) \cdot \gamma_{ab}.$$

Ce théorème a été démontré par M. Goresky, R. Kottwitz et R. MacPherson, dans un cadre plus général, mais pour $\Lambda = \mathbb{R}$ ([GKM, th. 7.2].

Une autre formulation du théorème 3.3.1 est donnée dans le corollaire 3.3.2 ci-dessous. L'inclusion $\Gamma(T_{ab}) \subset \Gamma(T)$ se dualise en $\text{res}_{ab} : \Gamma_\Lambda^*(T) \rightarrow \Gamma_\Lambda^*(T_{ab})$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_T^*(pt; \Lambda) & \xrightarrow{\approx} & S(\Gamma_\Lambda^*(T)) \\ \downarrow & & \downarrow \text{res}_{ab} \\ H_{T_{ab}}^*(pt; \Lambda) & \xrightarrow{\approx} & S(\Gamma_\Lambda^*(T_{ab})). \end{array}$$

On définit l'application $\alpha_{ab} : H_T(F) \mapsto S(\Gamma_\Lambda^*(T_{ab}))$ par

$$\alpha_{ab}(p) := \text{res}_{ab}(p_a) - \text{res}_{ab}(p_b).$$

Corollaire 3.3.2 *L'anneau $H_T^*(V; \Lambda)$ est isomorphe au sous- $H_T^*(pt; \Lambda)$ -module de $H_T^*(F; \Lambda)$ défini par les équations*

$$\{p \in H_T^*(F; \Lambda) \mid \alpha_{ab}(p) = 0\} \quad (\text{"Equations GKM"})$$

PREUVE DU THÉORÈME 3.3.1 :

Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$, on désigne par

- $V_1(\mathcal{K}) := \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{K}} S_{ab} \cup F.$
- $E(\mathcal{K}) := \{p \in H_T^*(F; \Lambda) \mid \alpha_{ab}(p) = 0 \forall (a, b) \in \mathcal{K}\}.$

Par la partie 2) du théorème du 1-squelette, il suffit de démontrer que l'image de $\delta : H_T^*(V_1) \rightarrow H_T^*(F)$ est égale à $E(\mathcal{J})$.

Pour montrer que l'image de δ est contenue dans $E(\mathcal{J})$, soit η un élément de $H_T^*(V_1)$. Si l'on restreint cet élément à une sphère $S_{ab} \subset V_1$, c'est une conséquence directe du théorème 2.4.3 que $\alpha_{ab}(\eta) = 0$.

Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, on procède par récurrence sur le cardinal $|\mathcal{K}|$ de \mathcal{K} . Le théorème est banal si $|\mathcal{K}| = 0$ et découle directement

du théorème 2.4.3 si $|\mathcal{K}| = 1$. Pour effectuer le pas de récurrence, écrivons $K = K' \cup \{a_0, b_0\} \subset \mathcal{J}$. et supposons que $H_T^*(V_1(K')) \approx E(K')$.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_T^*(V_1(\mathcal{K})) & \longrightarrow & H_T^*(V_1(\mathcal{K}')) & \longrightarrow & H_T^*(V_1(\mathcal{K}), V_1(\mathcal{K}')) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta' & & \downarrow \bar{\delta} \approx & & \\
 0 & \longrightarrow & E(\mathcal{K}) & \longrightarrow & E(\mathcal{K}') & \xrightarrow{\psi} & H_T^*(\{a_0, b_0\})/E(\{a_0, b_0\}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où ψ est induite par l'homomorphisme $E(\mathcal{K}') \rightarrow H_T^*(F) \rightarrow H_T^*(\{a_0, b_0\})$. La suite horizontale inférieure est exacte par construction. Celle d'en haut est la suite exacte de la paire $(V_1(\mathcal{K}), V_1(\mathcal{K}'))$.

L'homomorphisme $\bar{\delta}$ est un isomorphisme pour la raison suivante. Par excision, on a $H_T^*(V_1(\mathcal{K}), V_1(\mathcal{K}')) \approx H_T^*(S_{a_0 b_0}, \{a_0, b_0\})$. Par le théorème 2.4.3, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_T^*(S_{a_0 b_0}) \rightarrow H_T^*(\{a_0, b_0\}) \rightarrow H_T^*(S_{a_0 b_0}, \{a_0, b_0\}) \rightarrow 0$$

et, d'autre part,

$$H_T^*(S_{a_0 b_0}, \{a_0, b_0\}) \approx H_T^*(\{a_0, b_0\})/E(\{a_0, b_0\}).$$

Par hypothèse de récurrence, la flèche δ' est surjective. Par chasse dans le diagramme, on en déduit que δ est surjective. \square

Chapitre 4

Cohomologie équivariante pour les actions de 2-tores

Nous suivons, dans ce chapitre, le plan du chapitre 2.

4.1 L'anneau $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$

Soit T_2 un 2-tore (isomorphe à $\{\pm 1\}^n$). On désigne par $\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$, l'ensemble des homomorphismes de groupe de T_2 dans $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La correspondance $T_2 \mapsto \text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$ est un foncteur contravariant en T_2 , de même que $T_2 \mapsto H_{T_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2)$.

Proposition 4.1.1 *Il existe un isomorphisme de groupe*

$$H_{T_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2) \approx \text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$$

qui est fonctoriel en T_2 .

PREUVE: On a les isomorphismes

$$\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2) \approx [BT_2, B\mathbb{Z}_2] \approx H^1(BT_2; \mathbb{Z}_2). \quad (4.1)$$

Le dernier isomorphisme utilise l'identification (unique à homotopie près) de $B\mathbb{Z}_2$ avec $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.

La functorialité est évidente, vu les constructions que l'on a utilisées. \square

Choisissons une base $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ de T_2 , comme 2-groupe abélien élémentaire. Notons u_i^* les éléments de la base duale de $\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$. On sait que

l'anneau $H^*(BT_2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u_1^*, \dots, u_n^*]$, où les u_i sont de degré 1. Intrinsé-
quement, cela signifie que $H^*(BT_2; \mathbb{Z}_2)$ est isomorphe à l'algèbre symétrique
 $S(H^1(BT_2; \mathbb{Z}_2)) = S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2))$. On a ainsi montré :

Proposition 4.1.2 *L'anneau $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$ est fonctoriellement isomorphe à
l'algèbre symétrique $S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2))$.*

Remarque Lorsqu'on a choisi une base $\{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ de Γ , on peut se servir
dans les calculs de l'isomorphisme $H^*(BT_2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u_1^*, \dots, u_n^*] \approx \mathbb{Z}_2[u_1, \dots, u_n]$.

4.2 Classes caractéristiques équivariantes

Soit $\xi : W \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel réel de rang n qui soit T_2 -équivariant.
On vérifie que $ET_2 \times_{T_2} W \rightarrow ET_2 \times_{T_2} X$ est un fibré vectoriel réel de même
rang. Ce dernier fibré a donc une classe de Stiefel-Whitney (totale) dans
 $H^*(ET_2 \times_{T_2} X; \mathbb{Z}_2) = H_{T_2}^*(X; \mathbb{Z})$ que l'on appelle la *classe de Stiefel-Whitney*
équivariante de ξ , notée $w^{T_2}(\xi) = 1 + w_1^{T_2}(\xi) + \dots + w_n^{T_2}(\xi)$. La composante de
plus haut degré $w_n^{T_2}(\xi) \in H_{T_2}^{2n}(X; \mathbb{Z}_2)$ est la *classe d'Euler mod 2 équivariante*
de ξ et sera notée également $e^{T_2}(\xi)$.

Par exemple, soit $\gamma \in \text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$. On lui associe une représentation
réelle de T_2 de degré 1, c'est-à-dire une action linéaire de T_2 sur \mathbb{R} . On
peut voir cela comme un fibré vectoriel réel T_2 -équivariant de rang 1 sur un
point, noté $\eta(\gamma)$. Sa classe de Stiefel-Whitney équivariante $w^{T_2}(\eta(\gamma))$ est un
élément de $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$ qui, par la proposition 4.1.2 est isomorphe à l'algèbre
symétrique $S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2))$. Avec ces identifications, on a :

Proposition 4.2.1 $w^{T_2}(\eta(\gamma)) = 1 + \gamma$. *En particulier, $e^{T_2}(\eta(\gamma)) = \gamma$.*

PREUVE: La démonstration est complètement analogue à celle de la propo-
sition 2.3.1.

comme cas particulier, soit V un espace vectoriel réel de dimension r sur
lequel T_2 agit linéairement, via un homomorphisme $\gamma : T_2 \rightarrow O_r$. Comme
ci-dessus, cela donne un fibré réel de rang r équivariant sur un point. La
représentation γ se décompose en somme directe de représentations V_i de
rang 1, correspondant à des poids $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$. La proposition
ci-dessous se démontre comme la proposition 2.3.2.

Proposition 4.2.2 $w^{T_2}(\eta(\gamma)) = \prod_{i=1}^r (1 + \gamma_i)$. *En particulier, $e^{T_2}(\eta(\gamma)) =$
 $\prod_{i=1}^r \gamma_i$.*

4.3 Actions sur S^1

Considérons S^1 comme

$$S^1 : = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Le groupe $\{\pm 1\}$ agit naturellement par conjugaison sur S^1 , avec les deux ‘‘pôles’’ $p_{\pm} : = (0, \pm 1)$ comme points fixes. Soit T_2 un 2-tore et $\gamma \in \text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$ non-nul. L’élément γ détermine une action de T_2 sur S^1 ayant les pôles p_{\pm} comme points fixes. On a le théorème suivant:

Théorème 4.3.1 *L’homomorphisme de $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$ -algèbre*

$$H_{T_2}^*(S^1; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{T_2}^*(p_-; \mathbb{Z}_2) \oplus H_{T_2}^*(p_+; \mathbb{Z}_2) \approx S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)) \oplus S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2))$$

induit par l’inclusion $\{p_-, p_+\} \subset S^1$ est injectif et son image est la sous- $H_{T_2}^(pt; \mathbb{Z}_2)$ -algèbre de $S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)) \oplus S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2))$ engendrée par $(1, 1)$ et $(0, \gamma)$.*

PREUVE: Ce théorème se démontre essentiellement comme le théorème 2.4.1. Si $D_+ : = S^1 - \{p_-\}$ et $D_- : = S^1 - \{p_+\}$, les espaces $(ET_2 \times_{T_2} S^1, ET_2 \times_{T_2} D_{\pm})$ donnent lieu à une suite de Mayer-Vietoris. L’intersection $D_+ \cap D_-$ a le type d’homotopie équivariant de S^0 sur lequel T_2 agit par $s \cdot z = \gamma(s)z$. Comme $\gamma \neq 0$, cette action est transitive. Le groupe d’isotropie d’un élément de S^0 est alors isomorphe à un sous-2-tore T' de T_2 . Par le lemme 2.4.2, on a $H_{T_2}^*(S^2, \mathbb{Z}_2) \approx H^*(BT'; \mathbb{Z}_2)$. La suite de Mayer-Vietoris se coupe en suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow H_{T_2}^*(S^1; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{T_2}^*(p_-; \mathbb{Z}_2) \oplus H_{T_2}^*(p_+; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(BT'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0.$$

En effet, l’homomorphisme $H_{T_2}^*(p_-; \mathbb{Z}_2) = H^*(BT_2; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(BT'; \mathbb{Z}_2)$ est surjectif. On en déduit l’injectivité de $H_{T_2}^*(S^1; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{T_2}^*(p_-; \mathbb{Z}_2) \oplus H_{T_2}^*(p_+; \mathbb{Z}_2)$.

La fin de la démonstration est identique à ce qui s’est fait dans la preuve du théorème 2.4.1. \square

Le théorème 4.3.1 nous permet de donner, dans le théorème 4.3.2 ci-après (même dans le cas où γ est nul), une présentation de $H_T^*(S^1; \mathbb{Z}_2)$. Observons que le fibré $ET_2 \times_{T_2} S^1 \rightarrow BT_2$, de fibre S^1 donne un homomorphisme d’anneau $i^* : H_{T_2}^*(S^1; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(S^1; \mathbb{Z}_2)$ (induit par l’inclusion de la fibre dans l’espace total).

Théorème 4.3.2 *L'anneau $H_{T_2}^*(S^1; \mathbb{Z}_2)$ est isomorphe à la $S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2))$ -algèbre libre de base a (où a est de degré 1) quotientée par l'idéal engendré par $a^2 - \gamma \otimes a$. L'image de a par i^* est le générateur de $H^1(S^1; \mathbb{Z}_2)$.*

PREUVE: Si $\gamma = 0$, l'action de T_2 sur S^1 est triviale et on a $ET_2 \times_{T_2} S^1 \approx BT_2 \times S^1$. Donc

$$H_{T_2}^*(S^1; \mathbb{Z}_2) \approx H^*(BT_2; \mathbb{Z}_2)[a]/(a^2).$$

Si $\gamma \neq 0$, le théorème 4.3.2 est un corollaire du théorème 4.3.1. En effet, dans $S(\gamma_{\mathbb{Z}_2}^*(T_2)) \times S(\gamma_{\mathbb{Z}_2}^*(T_2))$, on a $(0, \gamma)^2 = (\gamma, \gamma) \cdot (0, \gamma)$. \square

Chapitre 5

Actions hamiltoniennes avec conjugaison

5.1 Définitions

Soit (V, ω) une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne d'un tore T , d'application moment $\mu : V \rightarrow \mathfrak{t}^*$. On appelle *conjugaison* sur V (adaptée à l'action de T) la donnée d'une involution τ qui possède les deux propriétés suivantes:

1. τ est antisymplectique, c'est-à-dire $\omega(\tau^*(X), \tau^*(Y)) = -\omega(X, Y)$
2. τ anticommute avec l'action de T , c'est-à-dire $g \cdot (\tau(w)) = \tau(g^{-1} \cdot w)$.
On a donc une action du produit semi-direct $T \ltimes \{\pm 1\}$ sur V , où $\{\pm 1\}$ agit sur T par passage à l'inverse.

Proposition 5.1.1 *Soit $\tau : V \rightarrow V$ une involution avec au moins un point fixe. Alors, τ est adaptée à l'action hamiltonienne de T sur V si et seulement si elle est antisymplectique et si l'application moment est τ -invariante : $\mu \circ \tau = \mu$.*

PREUVE: On voit tout de suite que $\tau(g \cdot \tau(w)) = g^{-1} \cdot w \quad \forall g \in T$ est équivalent à

$$\tau_* \bar{\xi} = -\bar{\xi} \quad \forall \xi \in \mathfrak{t}. \quad (5.1)$$

Supposons que (5.1) est vraie. Alors

$$-d\mu_\xi(Y) = \omega(\bar{\xi}, Y) = -\omega(\tau_* \bar{\xi}, \tau_* Y) = \omega(\bar{\xi}, \tau_* Y) = -d\mu_\xi(\tau_* Y).$$

On en déduit que $d\mu_\xi(Y) = d\mu_\xi(\tau_*Y)$ pour tout champ de vecteur Y , ce qui implique que $\mu_\xi = \mu_\xi \circ \tau + Cte$. Comme il existe au moins un point fixe la constante ne peut être que nulle. L'équivalence dans l'autre sens est obtenue en renversant les implications (et, en fait, n'utilise pas l'existence d'un point fixe). \square

On désigne par V' l'ensemble des points fixes de τ . On appelle V' la *partie réelle* de V (pour la conjugaison τ). Comme l'involution τ est anti-symplectique, V' est une variété lagrangienne. La restriction à V' de l'application moment ϕ a été étudiée par Duistermaat [Du, th. 2.5]:

Théorème 5.1.2 (Duistermaat) *Soit $\tau : V \rightarrow V$ une involution avec au moins un point fixe. Alors, pour tout $\xi \in t$, l'application $\mu_{\xi|_{V'}}$ est une fonction de Bott-Morse sur V' avec même image que μ_ξ .*

Soit T_2 le sous-groupe des éléments d'ordre 2 de T , qui est isomorphe au 2-groupe élémentaire $\{\pm 1\}^n$.

Lemme 5.1.3 *L'action de T sur V se restreint en une action de T_2 sur V' .*

PREUVE: Soit $g \in T_2$ et $x \in V'$. Alors $\tau(g \cdot x) = g^{-1} \cdot \tau(x) = g^{-1} \cdot x = g \cdot x$, donc $g \cdot x$ appartient à V' . \square

Soit x un point de V' qui soit fixe pour l'action de T . L'espace tangent $T_x V$ se décompose somme directe de sous-espaces propres de poids $\gamma_i : \rightarrow S^1$. De même, l'espace tangent $T_x V'$ se décompose, pour l'action de T_2 , en somme directe de sous-espaces propres de poids $\gamma'_i : T_2 \rightarrow \{\pm 1\}$. Vu l'équation $g \cdot (\tau(w)) = \tau(g^{-1} \cdot w)$, la seconde décomposition est la trace de la première et

Lemme 5.1.4 γ'_i est la restriction de γ_i à T_2 . \square

Proposition 5.1.5 *Appellons $V'_i \subset V'$ l'ensemble des points dont le stabilisateur par l'action de T_2 est de codimension au plus i . Si l'action de T est \mathbb{Z}_2 -pure, alors $V'_i = V_i \cap V'$.*

PREUVE: L'inclusion $V_i \cap V' \subset V'_i$ est banale. Pour montrer l'autre inclusion, soit $x \in V'_i$. Si $\xi \in t$ est générique, la fonction μ_ξ est une fonction de Morse invariante dont l'ensemble des points critiques est F (lemme 3.1.9). En poussant x par le flot du gradient de μ_ξ , on peut l'amener arbitrairement près d'un point fixe y de l'action de T . Ceci peut se faire en restant dans V' , puisque le flot du gradient de μ_ξ laisse V' invariant, par la τ -invariance de μ

vue à la proposition 5.1.1. Autour de y , par le théorème de Darboux équivariant, l'action de T est conjuguée à l'action linéaire sur $T_y V$. On supposera donc que V est un espace vectoriel, $y = 0$ et V' un sous-espace de V .

L'espace V se décompose en une somme directe de sous-espaces propres $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. On a $x = x_1 + \dots + x_n$ où $x_i \in W_i$. Notons $T(z)$ le stabilisateur de z dans T . Alors $T(x) = T(x_1) \cap \dots \cap T(x_n)$ et $T_2(x) = T_2(x_1) \cap \dots \cap T_2(x_n)$. Il reste à démontrer que $T(x_i) \cap T_2 = T_2(x_i)$. Comme l'inclusion $T(x_i) \cap T_2 \subset T_2(x_i)$ est vérifiée, la codimension de $T_2(x_i)$ est au plus 1 et il suffit de voir que T_2 n'agit pas trivialement sur $W'_i = W_i \cap V'$. Mais, par le lemme 5.1.4, cette action est donnée par le poids γ'_i qui est non-nul puisque l'action est \mathbb{Z}_2 -pure. \square

REMARQUE : Par le lemme 3.1.10, V'_1 est un graphe de cercles sur chacun desquels T_2 agit en laissant fixe 2 points.

Proposition 5.1.6 *Soit (V, ω) une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne \mathbb{Z}_2 -pure d'un tore T et d'une conjugaison τ adaptée. Alors $F \subset V'$.*

PREUVE: On va d'abord montrer qu'il existe au moins un point fixe de T dans V' . En effet soit $\zeta \in t$ un élément générique. On vu au lemme 3.1.9 que les points critiques de la fonction de Morse μ_ζ sont précisément les points fixes de T . Soit c une valeur extrémale de μ_ζ . Comme par le théorème de Duistermaat 5.1.2 l'image de V' par μ_ζ est la même que celle de V , il existe $x \in V'$ avec $\mu_\zeta(x) = c$. C'est un extremum de μ_ζ donc un point fixe de T .

Prenons maintenant un point $c \in V'$ fixé par T . Soit S_{cb} l'une des 2-sphères élémentaires constituant le 1-squelette de V (voir lemme 3.1.10). Nous allons voir que $b \in V'$. Rappelons que S_{cb} est une sous-variété symplectique de V , que l'action de T y est hamiltonienne et son moment est μ restreinte à S_{cb} (lemme 3.1.10). La conjugaison τ de V donne une conjugaison sur S_{cb} telle que $S'_{cb} = S_{cb} \cap V'$ est non-vidé. Regardons μ_ζ définie comme avant mais restreinte à S_{cb} . Par le lemme 3.1.10, elle possède deux valeurs critiques extrémales: $\mu_\zeta(c)$ et $\mu_\zeta(b)$. Toujours par le théorème 5.1.2, on sait qu'il existe un point de S'_{cb} dont l'image est $\mu_\zeta(b)$. Ce dernier, étant extrémal de $\mu_\zeta|_{S_{cb}}$, ne peut qu'être égal à b . Donc $b \in V'$.

On peut procéder ainsi pour toutes les sphères S_{cb} puis recommencer pour chacun des points obtenus. Comme le 1-squelette est connexe (Lemme 3.1.10), on a démontré que tous les points fixes de T appartiennent à V' . \square

Les propositions 5.1.5 et 5.1.6 impliquent directement le

Corollaire 5.1.7 $F' = F$.

5.2 Le théorème du 1-squelette pour la partie réelle

Théorème 5.2.1 *Soit V une variété symplectique compacte munie d'une action hamiltonienne \mathbb{Z}_2 -pure d'un tore T et τ une conjugaison sur V , adaptée à la T -action. Alors*

1. *Le morphisme $\rho' : H_{T_2}^*(V', \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{T_2}^*(F', \mathbb{Z}_2)$ induit par l'inclusion de F' dans V' est une injection.*
2. *Le morphisme $\delta' : H_{T_2}^*(V_1', \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{T_2}^*(F', \mathbb{Z}_2)$ induit par l'inclusion de F' dans V_1' a même image que ρ .*

PREUVE: L'organisation parallèle des chapitres 2 et 4 de même que la façon dont est présentée la preuve du théorème 3.2.1 font que que cette dernière démonstration, à l'aide des résultats du § 5.1, se transcrit littéralement modulo 2 et donne une preuve du théorème 5.2.1.

5.3 Le théorème GKM pour les parties réelles

Considérons une action hamiltonienne \mathbb{Z}_2 -pure d'un tore T sur une variété symplectique V munie une conjugaison adaptée τ . On utilise les notations $S_{ab}, T_{a,b}$, etc, $(a, b) \in F \tilde{\times} F$ du § 3.3. Rappelons que $F' = F$ (corollaire 5.1.7).

Soient $T_{ab} \subset T_2$ le stabilisateur de $S_{ab} \cap V'$ pour l'action de T restreinte à V' . Le groupe T_{ab} est donc un sous-groupe dans T_2 qui est de codimension 1 comme espace vectoriel sur \mathbb{Z}_2 . L'action de T_2 se restreint au cercle $S_{ab} \cap V'$ en une γ_{ab} -action (où le poids $\gamma_{ab} \in \text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$ est bien défini (car on est dans un anneau de caractéristique 2) et $\text{Hom}(T_{ab}, \mathbb{Z}_2) = \ker \gamma_{ab}$).

L'anneau $H_{T_2}^*(F'; \mathbb{Z}_2)$ se décompose en $\bigoplus_{x \in F'} H_{T_2}^*(x; \mathbb{Z}_2)$. Appelons p_x la composante de $x \in H_{T_2}^*(F')$.

Théorème 5.3.1 (Théorème GKM pour la partie réelle) *L'anneau $H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2)$ est isomorphe à la sous- $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$ -algèbre des $p \in H_{T_2}^*(F; \mathbb{Z}_2)$ tels que, pour tout $(a, b) \in \mathcal{J}$, on ait*

$$p_b - p_a \in H_{T_2}^*(pt) \cdot \gamma_{ab}.$$

Une autre formulation du théorème 5.3.1 est donnée dans le corollaire 3.3.2 ci-dessous.

L'inclusion $T_{ab} \subset T_2$ se dualise en $\text{res}_{ab} : \text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}(T_{ab}, \mathbb{Z}_2)$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\approx} & S(\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)) \\
\downarrow & & \downarrow \text{res}_{ab} \\
H_{T_{2,ab}}^*(pt; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\approx} & S(\text{Hom}(T_{ab}, \mathbb{Z}_2)).
\end{array}$$

On définit l'application $\alpha_{ab} : H_{T_2}(F') \rightarrow S(\text{Hom}(T_{ab}, \mathbb{Z}_2))$ par

$$\alpha_{ab}(p) := \text{res}_{ab}(p_a) - \text{res}_{ab}(p_b).$$

Corollaire 5.3.2 (Equations GKM pour la partie réelle) *L'anneau $H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2)$ est isomorphe au sous- $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$ -module de $H_{T_2}^*(F'; \mathbb{Z}_2)$ défini par les équations*

$$\{p \in H_{T_2}^*(F'; \mathbb{Z}_2) \mid \alpha_{ab}(p) = 0\}.$$

PREUVE: La démonstration du théorème 5.3.1 et du corollaire 5.3.2 sont les transcription modulo 2 de celles du § 3.3.

5.4 Le théorème du \mathbb{Z}_2 -isomorphisme

Nous allons construire un isomorphisme canonique

$$j : H_T^2(pt, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\approx} H_{T_2}^1(pt, \mathbb{Z}_2)$$

de la manière suivante: $H_T^2(pt)$ s'identifie à $\text{Hom}(T, S^1)$ et $H_{T_2}^1(pt, \mathbb{Z}_2)$ à $\text{Hom}(T_2, \mathbb{Z}_2)$. On prend pour $j(\gamma)$ la restriction de γ à T_2 (le sous-groupe de 2-torsion de T). L'homomorphisme j est un isomorphisme entre $H_T^2(pt) \otimes \mathbb{Z}_2 \approx H_T^2(pt, \mathbb{Z}_2)$ et $H_{T_2}^1(pt, \mathbb{Z}_2)$. Il s'étend en un isomorphisme d'anneau entre $H_T^{2*}(pt, \mathbb{Z}_2)$ et $H_{T_2}^*(pt, \mathbb{Z}_2)$ que l'on va noter encore j . Remarquons que des éléments homogènes de degré $2d$ sont envoyés sur des éléments homogènes de degré d .

Théorème 5.4.1 (Théorème du \mathbb{Z}_2 -isomorphisme) *Soit V une variété symplectique compacte munie d'une action hamiltonienne \mathbb{Z}_2 -pure d'un tore T et d'une conjugaison adaptée à l'action de T . Alors, il existe un isomorphisme d'anneau entre $H_T^{2*}(V, \mathbb{Z}_2)$ et $H_{T_2}^*(V', \mathbb{Z}_2)$, divisant les degrés par 2,*

tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc}
 H_T^{2*}(pt, \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_T^{2*}(V, \mathbb{Z}_2) \\
 \downarrow j & & \downarrow \approx \\
 H_{T_2}^*(pt, \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_{T_2}^*(V', \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

PREUVE: Par le corollaire 5.1.7, l'ensemble F des points fixes de l'action de T sur V est identique à l'ensemble F' des points fixes de T_2 sur V' . Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 H_T^{2*}(V, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\rho} & H_T^{2*}(F, \mathbb{Z}_2) \\
 & & \downarrow j_F \\
 H_{T_2}^{2*}(V', \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\rho'} & H_{T_2}^*(F, \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

où $j_F : = \bigoplus_F j$. Nous allons montrer que $j_F \circ \rho$ et ρ' ont même image.

Le théorème du \mathbb{Z}_2 -isomorphisme découlera alors du fait que ρ et ρ' sont injectives (théorèmes 3.2.1 et 5.2.1).

Comme $\text{im } \rho^{(l)} = \text{im } \delta^{(l)}$ par les théorèmes du 1-squelette, il suffit de voir que $\text{im } j_F \circ \delta = \text{im } \delta'$. Notons $\alpha'_{ab} = 0$ l'équation associée à $(a, b) \in \mathcal{J}'$ sur $H_{T_2}(F')$. On a $\alpha_{ab} = \alpha'_{ab} \circ j$ pour tout $(a, b) \in \mathcal{J}$, car $j(\gamma_{ab}(\mathbb{Z}_2)) = \gamma'_{ab}(\mathbb{Z}_2)$ où $\gamma'_{ab}(\mathbb{Z}_2)$ est la classe d'Euler mod 2 de $S_{ab} \cap V'$. Ceci implique que $\text{im } \delta' \approx j_F \circ (\text{im } \delta)$. \square

Chapitre 6

Exemples et applications

6.1 Cohomologie non-équivariante

Considérons une action continue d'un groupe G sur un espace V . La construction de Borel fournit une fibration de Serre

$$V \rightarrow EG \times_G V \rightarrow BG. \quad (6.1)$$

L'action de G sur $H^*(V)$ se factorise en une action de $\pi_0(G)$. C'est cette même action qui intervient comme action de $\pi_1(BG) \cong \pi_0(G)$ sur $H^*(V)$ dans la fibration (6.1).

Définition 6.1.1 On dit qu'une action continue d'un groupe G sur un espace V est *cohomologiquement formelle* (pour un anneau de coefficients Λ), si l'action de $\pi_0(G)$ sur $H^*(V; \Lambda)$ est triviale et si la suite spectrale de Leray-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(BG; H^q(V; \Lambda)) \Rightarrow H^{p+q}(V \times_G EG; \Lambda)$$

de la fibration (6.1) est dégénérée (c'est-à-dire $E_2^{pq} = E_\infty^{pq}$). (Une action cohomologiquement formelle s'appelle en anglais "equivariantly formal"; la terminologie "totally non-homologous to zero" est aussi utilisée).

Le fait qu'une action soit cohomologiquement formelle permet de décrire l'homomorphisme $H_T^*(V; \Lambda) \rightarrow H^*(V; \Lambda)$. Remarquons que ce dernier se factorise par $H_T^*(V; \Lambda) \otimes_{H_T^*(pt; \Lambda)} \Lambda$, le produit tensoriel utilisant l'épimorphisme d'anneaux $H_T^*(pt, \Lambda) \rightarrow H_T^0(pt, \Lambda) \cong \Lambda$.

Proposition 6.1.2 *Supposons qu'un groupe G agisse sur un espace V de manière cohomologiquement formelle pour un anneau de coefficients Λ qui*

est principal. Supposons que l'une des deux conditions suivantes au moins soit réalisée

1. $H^q(V; \Lambda)$ est un Λ -module libre de type fini pour tout $q \geq 0$.
2. $H^p(BG; \Lambda)$ est un Λ -module libre de type fini pour tout $p \geq 0$.

Alors, $H^*(V; \Lambda) \cong H_T^*(V; \Lambda) \otimes_{H_T^*(pt; \Lambda)} \Lambda$

PREUVE: Comme $\pi_1(BG)$ agit trivialement sur $H^*(V; \Lambda)$, le terme E_2 de la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration $V \rightarrow EG \times_G V \rightarrow BG$ est $E_2^{pq} = H^p(BG; H^q(V; \Lambda))$. Les hypothèses 1) ou 2) impliquent, par [Se, §10, proposition 8], que

$$E_2^{pq} = H^p(BG; H^q(V; \Lambda)) \cong H^p(BG; \Lambda) \otimes H^q(V; \Lambda), \quad (6.2)$$

ce dernier isomorphisme étant un isomorphisme d'anneau. Comme la suite spectrale dégénère au terme E_2 , l'homomorphisme

$$H^*(EG \times_G V; \Lambda) \rightarrow H^*(V; \Lambda) \quad (6.3)$$

est surjectif. Soient

$$I := \bigoplus_{p>0} H^p(BG; \Lambda), \quad E_2^{**} := \bigoplus_{p,q} E_2^{pq}, \quad E_2^{*+} := \bigoplus_p (\bigoplus_{q>0} E_2^{pq}).$$

Le groupe gradué I est un idéal de $H^*(BG; \Lambda) = H_G^*(pt; \Lambda)$ et est le noyau de l'homomorphisme $H_G^*(pt; \Lambda) \rightarrow H^*(pt; \Lambda)$. Par l'isomorphisme d'anneau (6.2), on a $E_2^{*+} = I \cdot E_2^{**}$. Il s'en suit que le noyau de l'épimorphisme (6.3) est $I \cdot H^*(EG \times_G V; \Lambda) = I \cdot H_G^*(V; \Lambda)$. Or, ce dernier $H_G^*(pt; \Lambda)$ -module est exactement le noyau de $H_T^*(V; \Lambda) \rightarrow H_T^*(V; \Lambda) \otimes_{H_T^*(pt; \Lambda)} \Lambda$. \square

Nous allons maintenant vérifier que les actions des chapitres précédents sont cohomologiquement formelles.

Proposition 6.1.3 *Soit V une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne d'un tore T et Λ un anneau tel que l'action soit Λ -pure. Alors l'action est cohomologiquement formelle.*

PREUVE: Le groupe T étant connexe, l'hypothèse sur la trivialité de l'action de $\pi_0(T)$ sur la cohomologie de V est banalement vérifiée. La cohomologie (non-equivariante) de V est nulle en degré impair puisque V admet une fonction de Morse avec seulement des points d'indice pairs [Au, §III.1]. Ceci qui implique que la suite spectrale de Leray-Serre est dégénère au terme E_2 . \square

Proposition 6.1.4 *Soit V une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne \mathbb{Z}_2 -pure d'un tore T . Supposons qu'il existe une conjugaison sur V adaptée à l'action de T . Alors l'action de T_2 sur la partie réelle V' de V est cohomologiquement formelle pour l'anneau de coefficients \mathbb{Z}_2 .*

PREUVE: Soit $\xi \in t$ un élément générique. Soit $f := \mu_\xi$ qui, comme l'action est \mathbb{Z}_2 -pure, est une fonction de Morse parfaite pour V avec l'ensemble des points fixes F comme ensemble de points critiques (lemme 3.1.9). Par [Du, lemme 2.1 et théorème 2.2], la restriction de f à V' est aussi une fonction de Morse parfaite (pour la cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z}_2), avec, pour ensemble de points critiques, $F' = F$. On en déduit que

$$\dim H^*(V'; \mathbb{Z}_2) = \dim H^*(F'; \mathbb{Z}_2).$$

Par [AP, Th. 3.10.4] on en déduit que l'action de T_2 sur V' est cohomologiquement formelle pour l'anneau de coefficients \mathbb{Z}_2 . \square

Théorème 6.1.5 *Soit V une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne \mathbb{Z}_2 -pure d'un tore T . Supposons de plus qu'il existe une conjugaison sur V adaptée à l'action de T . Alors, il existe un isomorphisme d'anneau entre $H^{2*}(V; \mathbb{Z}_2)$ et $H^*(V'; \mathbb{Z}_2)$, divisant les degrés par 2.*

PREUVE: Par le théorème du \mathbb{Z}_2 -isomorphisme 5.4.1, on a un isomorphisme d'algèbres $H_T^{2*}(V; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2)$ divisant les degrés par 2, au dessus de l'isomorphisme de \mathbb{Z}_2 -algèbres $j : H_T^{2*}(pt; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$. Soit I l'idéal de $H_T^{2*}(pt; \mathbb{Z}_2)$ engendré par $H_T^2(pt; \mathbb{Z}_2)$ et \bar{I} l'idéal de $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)$ engendré par $H_{T_2}^1(pt; \mathbb{Z}_2)$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I \cdot H_T^{2*}(V; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_T^{2*}(V; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_T^{2*}(V; \mathbb{Z}_2) \otimes_{H_T^{2*}(pt; \mathbb{Z}_2)} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bar{I} \cdot H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2) \otimes_{H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (6.4)$$

où les suites horizontales sont exactes. Comme l'isomorphisme vertical du centre est au dessus de l'isomorphisme j , le diagramme (6.4) est commutatif et la flèche verticale de gauche est un isomorphisme, On en déduit que la flèche verticale de droite est un isomorphisme. Ce dernier apparait dans le

diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H_T^{2*}(V; \mathbb{Z}_2) \otimes_{H_T^{2*}(pt; \mathbb{Z}_2)} \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & H^{2*}(V; \mathbb{Z}_2) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \\
H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2) \otimes_{H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2)} \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & H^*(V'; \mathbb{Z}_2)
\end{array} \tag{6.5}$$

Comme, par les propositions 6.1.3 et 6.1.4, les actions sont cohomologiquement formelles, les deux flèches horizontales sont des isomorphismes par la proposition 6.1.2. On en déduit que la flèche verticale de droite dans le diagramme (6.5) est un isomorphisme d'anneaux. \square

6.2 Variétés toriques complexes et réelles

Une *variété torique* est une variété symplectique compacte de dimension $2n$ munie d'une action hamiltonienne effective d'un tore de dimension n . Les variétés toriques sont un exemple important d'actions hamiltoniennes et nous allons voir qu'elles sont \mathbb{Z} -pures. Commençons par rappeler la caractérisation de Delzant du polytope moment d'une variété torique.

Définition 6.2.1 *Un polytope convexe P de dimension n dans \mathbb{R}^n est dit régulier si exactement n arêtes se rejoignent en chaque sommet. Un polytope régulier est un polytope de Delzant si, en chaque sommet s , il existe une base e_1, \dots, e_n de \mathbb{Z}^n telle que chaque arête partant de s soit dans un rayon de direction e_i .*

Le théorème principal de la théorie est le suivant, démontré par T. Delzant [De, th. 2.1]:

Théorème 6.2.2 (Théorème de Delzant) *Soit P un polytope de Delzant de dimension n . Il existe alors une variété torique V_P de dimension $2n$ telle que le polytope moment de cette action soit P . Si V_P et \tilde{V}_P sont deux telles variétés il existe un symplectomorphisme équivariant entre V_P et \tilde{V}_P .*

PREUVE: Pour fixer les notations que nous utiliserons par la suite, nous résumons ci-dessous la preuve de l'existence de V_P due à Guillemin [Gu, Appendix 1].

Pour chaque facette (face de codimension 1) f_i du polytope l'hyperplan la contenant peut être défini par une équation du type: $\langle x, u_i \rangle = \lambda_i$. Nos

conditions font que l'on peut supposer que u_i est un élément primitif de \mathbb{Z}^n qui pointe à l'intérieur de P (on appelle u_i la *normale primitive* à f_i). Le polytope P est ainsi l'intersection des demi-espaces définis par les inégalités: $\langle x, u_i \rangle \geq \lambda_i$ $i = 1, \dots, m$ où m est le nombre des facettes de P .

Il existe un moyen simple de calculer les vecteurs normaux u_i à partir des vecteurs e_i défini dans 6.2.1. Soit s un sommet de P , A la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les e_i correspondant aux arêtes partant de s et soit B la matrice $n \times n$ dont les lignes sont les u_i correspondant aux faces qui se rencontrent en s . On suppose de plus que les u_i et e_i soit ordonnés de telle façon que u_i est normal à la facette qui ne contient pas e_i . Alors

$$BA = I. \quad (6.6)$$

En effet $u_i \cdot e_j = 0 \forall i \neq j$ car e_j est contenu dans toutes les facettes sauf une et $u_i \cdot e_i > 0$ par la convention sur les directions. Donc $BA = D$ où D est une matrice diagonale. Mais par hypothèse les e_i forment une base de \mathbb{Z}^n donc il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I$. Les colonnes de A^{-1} sont des multiples positifs des colonnes de B . Comme par hypothèse les u_i sont des vecteurs primitifs, on a bien $A^{-1} = B$.

Soit x_1, \dots, x_m la base canonique de \mathbb{R}^m . Soit $\beta : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ l'application envoyant e_i sur u_i . Elle est surjective, sinon P serait contenu dans un sous-espace propre de \mathbb{R}^n . Cette application peut être étendue de façon naturelle en une application de \mathbb{C}^m dans \mathbb{C}^n . Celle-ci envoie $2i\pi\mathbb{Z}^m$ sur $2i\pi\mathbb{Z}^n$. On peut passer au quotient et on obtient un morphisme surjectif:

$$\beta_{\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}^m \mapsto T_{\mathbb{C}}^n$$

où $T_{\mathbb{C}}^j$ est le tore complexe, défini comme le quotient de \mathbb{C}^j par $2i\pi\mathbb{Z}^j$. On obtient une suite exacte:

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow T_{\mathbb{C}}^m \longrightarrow T_{\mathbb{C}}^n \longrightarrow 1 \quad (6.7)$$

où N est le noyau de $\beta_{\mathbb{C}}$. Il existe une action naturelle ρ de $T_{\mathbb{C}}^m$ sur \mathbb{C}^m définie comme suit:

$$\rho(t_1, \dots, t_m) \cdot (x_1, \dots, x_m) = (t_1x_1, \dots, t_mx_m) \quad (6.8)$$

Cette action se restreint en une action de N . La variété V_P que nous voulons construire sera le quotient d'un ouvert dense de \mathbb{C}^m par N .

Nous allons commencer par décrire les orbites de $T_{\mathbb{C}}^m$. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, m\}$. Nous l'appellerons un *multi-indice*. Soit $\mathbb{C}_I^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in$

$\mathbb{C}^m \mid x_i = 0$ si et seulement si $i \in I$. On voit immédiatement que l'ensemble des $\mathbb{C}_I^m \forall I$ est l'ensemble des orbites de l'action $T_{\mathbb{C}}^m$ sur \mathbb{C}^m .

Soit maintenant f une des faces du polytope P . Elle est décrite par une famille d'égalités $\langle x, u_i \rangle = \lambda_i \forall i \in I$ où I est un multi-indice. On peut définir $\mathbb{C}_f^m = \mathbb{C}_I^m$ où I est le multi-indice correspondant à f .

Soit

$$\tilde{V}_P = \bigcup_{\substack{f \\ \text{face de } P}} \mathbb{C}_f^m$$

L'action de N restreinte à \tilde{V}_P conserve cette décomposition et est libre. On peut donc définir $V_P = \tilde{V}_P/N$. Par la suite exacte 6.7 l'action de T^m sur V_P se quotiente en une action de $T_{\mathbb{C}}^n$. Appellons T_n le sous-groupe compact maximal de $T_{\mathbb{C}}^n$. On trouve dans [Gu, Appendix I] la démonstration de la proposition suivante:

Proposition 6.2.3 *La variété V_P est compacte. Il existe une forme symplectique unique sur V_P compatible avec sa structure complexe telle que l'action de T^n soit hamiltonienne et l'image de l'application moment soit P .*

On va maintenant vérifier que l'action de T^n sur V_P est \mathbb{Z} -pure. Remarquons tout d'abord que les orbites de l'action de $T_{\mathbb{C}}^n$ sur V_P sont les quotients \mathbb{C}_f^m/N . Calculons maintenant le stabilisateur de chaque orbite. Soit s un des sommet du polytope et I le multi-indice correspondant. L'application β restreinte à \mathbb{R}_I^m est inversible car les $u_i \ i \in I$ forment par hypothèse une base de \mathbb{R}^n sur \mathbb{Z} . Elle est également inversible lorsqu'elle est restreinte aux éléments entiers de \mathbb{R}_I^m (\mathbb{Z}^m). En passant au quotient on voit que $\beta_{\mathbb{C}}$ est inversible sur $T_{\mathbb{C},I}^m$. On peut donc construire une section de $\beta_{\mathbb{C}}$ que nous noterons S telle que $S(u_i) = e_i$. Prenons une face quelconque f de P contenant s , son multi-indice sera noté J ($J \subset I$). Par la suite exacte 6.7: $N \cap T_{\mathbb{C},I}^m = \emptyset$, ainsi le stabilisateur de \mathbb{C}_f^m/N par l'action de $T_{\mathbb{C}}^n$ sur V_P est identique au stabilisateur de \mathbb{C}_f^m par l'action de T^m induite par S . On voit qu'il est égal à $T_{\mathbb{C},J}^m \cong T_{\mathbb{C}}^n \subset T_{\mathbb{C},I}^m$. Ainsi le 1-squelette de V_P est constitué de l'union des \mathbb{C}_f^m/N pour chaque f sommet ou arête de P . Supposons maintenant que f soit une arête. Regardons plus précisément l'action de T^n sur la composante de V_P correspondant à f :

$$\begin{aligned} \rho(t) \cdot (x_1, \dots, x_m) &= (S'(t)_1 x_1, \dots, S'(t)_m x_m) \\ \text{où } S'(t)_i &= \begin{cases} S(t)_i & \text{si } i \in J \\ 1 & \text{si } i \notin J \end{cases} \end{aligned}$$

où $S(t)_i$ est la i -ème coordonnées de $S(t)$. L'action est triviale sur toutes les coordonnées de \mathbb{C}_f^m sauf sur k tel que $\{k\} = I - J$. Son poids est

$(S(e_1)_k, \dots, S(e_m)_k)$.

En conséquence les poids sont précisément les vecteurs e_i défini en 6.2.1. Ils forment par définition une base de \mathbb{Z}^n . Ainsi les variétés toriques vérifient bien la condition GKM.

Il reste à définir une conjugaison naturelle sur V_P . Soit τ la conjugaison complexe sur \mathbb{C}^m . Elle commute avec l'action de $T_{\mathbb{C}}^m$ définie par 6.8 et passe donc au quotient par N . L'involution induite sur V_P (que nous nommerons également τ) est anti-holomorphe pour sa structure complexe naturelle, donc anti-symplectique, car la forme symplectique est compatible avec la structure complexe par le théorème 6.2.3. Il reste à voir que τ anti-commute avec l'action de T . Cela vient du fait que τ anti-commute avec $T_{\mathbb{C}}^m$ sur \mathbb{C}^m .

Nous allons maintenant appliquer les théorèmes 3.3.2 et 5.3.2 au calcul de la cohomologie des variétés toriques et de leur partie réelle.

Théorème 6.2.4 *Soit V_P la variété torique associée à un polytope de Delzant P . Soit Λ un anneau commutatif à factoriel. Alors, on peut construire un isomorphisme :*

$$\gamma : \Lambda[f_1, \dots, f_m, x_1, \dots, x_n]/I \longrightarrow H_T^*(V_P; \Lambda) \quad (6.9)$$

où $\{f_1, \dots, f_m\}$ est l'ensemble des facettes de P et $H_T^*(V_P; \Lambda)$ est vu comme une algèbre sur $H_T^*(pt; \Lambda) \cong \Lambda[x_1, \dots, x_n]$ avec $\gamma(f_i)$ de degré 2 et I est l'idéal engendré par deux types d'éléments:

1. $\prod_i f_i$ si $\bigcap_i f_i = \emptyset$
2. $x_j - \sum_{i=1}^m u_{ij} f_i$ pour $1 \leq j \leq n$

où $\{u_{ij}\}$ est la normale primitive de f_i .

Pour démontrer le théorème 6.2.4 nous allons d'abord définir la classe $\gamma(f)$ associée à chaque facette f . Pour alléger les notations, nous sous-entendrons que tous les anneaux de cohomologie sont à coefficients dans Λ . Quelques définitions sont nécessaires.

Définition 6.2.5 Soit f une face de P . Nous noterons $H_T^*(f)$ l'algèbre $H_T^*(\mathbb{C}_f^n/N)$.

Si K_f est le stabilisateur de \mathbb{C}_f^n/N pour l'action de T alors \mathbb{C}_f^n/N est isomorphe à $T/K_f \times (\mathbb{R}^*)^{n-i}$, où i est la dimension de f . Ainsi $H_T^*(f) = H_T^*(T/K_f) = H_{K_f}^*(pt) \cong \Lambda[k_f^*]$.

Définition 6.2.6 Si l'on se donne deux faces, f_1 et f_2 , de P telles que $f_1 \subset f_2$, alors $K_{f_2} \subset K_{f_1}$. Par conséquent il existe une application, notée

res_{f_1, f_2} , de $H_T^*(f_1)$ à $H_T^*(f_2)$ qui est induite par l'application naturelle de T/K_{f_2} à T/K_{f_1} . (Remarque: Dans le cas où f_1 est un sommet et f_2 une arête l'application res_{f_1, f_2} est équivalente à celle définie à la section 3.3.)

Remarque 6.2.7 Si l'on se donne $f_1 \subset f_2 \subset f_3$ trois faces de P , on a l'égalité suivante $res_{f_1, f_3} = res_{f_1, f_2} \circ res_{f_2, f_3}$.

Définition 6.2.8 Soit f une face de P de codimension i . L'espace \mathbb{C}_f^m/N est formé de points fixes pour l'action de K_f . Nous appellerons *poids associés à la face f* les poids pour l'action de K_f sur le fibré normal à \mathbb{C}_f^m/N . Le nombre de ces poids est la dimension de f .

Proposition 6.2.9 Soit f une face de P et f' une facette contenant f . Alors il existe un unique poids associé à f , noté $e_{f, f'}$, tel que $res_{f, f'}(e) \neq 0$.

PREUVE: Si e est un poids associé à f , alors $res_{f, f'}(e)$ est soit nul (si e appartient à f'), soit un poids de f' . Il suffit de voir que si deux poids e et e' de f satisfont à $res_{f, f'}(e) = res_{f, f'}(e') \neq 0$, alors $e = e'$. Mais, sinon, $e' - e$ serait dans $\ker res_{f, f'}$ qui est engendré par les poids appartenant à f' . Ceci contredirait le fait que les poids de f forment une base de $H_T^*(f)$. \square

Remarque 6.2.10 Par la proposition précédente et la remarque 6.2.7 on a l'égalité suivante: $res_{s, f}(e_{s, f'}) = e_{f, f'} = res_{s', f}(e_{s, f'})$ où s et s' sont deux sommets dans une face f qui est contenue elle-même dans une facette f' .

Preuve du théorème 6.2.4: Soit f une facette de P . On définit $\gamma(f) \in H_T^2(F)$ comme la classe telle que, pour tout sommet s de P , $\gamma(f)(s) = e_{s, f}$ si $s \in f$, 0 sinon, où $e_{s, f}$ est le seul poids en s qui ne soit pas contenu dans f . La remarque qui suit la proposition précédente nous dit que si f' est une arête de P contenue dans f et s_1, s_2 deux sommets de f' alors $res_{s, f'}(e_{s_1, f}) = res_{s, f'}(e_{s_2, f})$. Comme conséquence $\gamma(f)$ est une solution des équations GKM. Ainsi elle décrit une unique classe de $H_T^2(V_P)$ que nous noterons également $\gamma(f)$.

Nous avons défini l'application γ pour chaque variable f et pour chaque x_i : $\gamma(x_i)$ valant x_i en chaque sommet $s \in F$. Il faut vérifier que leurs images satisfont aux relations 1) et 2).

Les relations de type 1 viennent du fait que les classes $\gamma(f)$ sont nulles en chaque sommet qui n'est pas contenu dans f . Les relations de type 2 sont tout simplement une réécriture de la formule (6.6).

Ainsi on peut définir γ globalement en l'étendant Λ -linéairement. Il reste à voir que γ est un isomorphisme. D'abord, on peut éliminer de la présentation

chaque x_i en éliminant la relation de type 2 correspondante (en fait ces relations servaient seulement à donner la structure de $H_T^*(pt)$ -module; pour démontrer la bijectivité de γ , on ne se servira que de la structure d'anneau).

Appelons \mathcal{S} l'ensemble des fonctions de $\{1, \dots, m\}$ dans $\mathbb{N}_{>0}$. Soit $S \in \mathcal{S}$. On définit

- la face $f_S := \bigcap_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ S(i) \neq 0}} f_i$.
- $f^S := \prod_{i \in \{1, \dots, m\}} f_i^{S(i)}$, élément de l'anneau $\Lambda[f_1, \dots, f_m]$.
- $e_{f,S} := \prod_{i \in \{1, \dots, m\}} e_{f, f_i}^{S(i)} \in H_T^*(pt)$, où e_{f, f_i} est défini comme nul si $f \not\subset f_i$.

On commence par démontrer que γ est injective. Soit $p \in \Lambda[f_1, \dots, f_m]$ avec $\gamma(p) = 0$. Si s un sommet de P , alors $p(s)$ est un polynôme dans les variables $e_{s, f_1}, \dots, e_{s, f_n}$ où $\{f_1, \dots, f_n\}$ est l'ensemble des facettes contenant s . Par hypothèse, les $e_{s, f_1}, \dots, e_{s, f_n}$ forment une base de $\Lambda[x_1, \dots, x_n]$ et sont donc algébriquement indépendants. Ainsi $p(s) = 0$, cela pour tout sommet s . Cela signifie que pour tout monôme f^S apparaissant dans p , $f_S = \emptyset$. Dans ce cas p appartient à l'idéal I .

Il reste à démontrer que γ est surjective. Soit c une classe homogène de degré d de $H_T^*(V_P)$. Soit s un sommet de P . L'élément $c(s)$ de $\Lambda[t^*]$ peut être vu comme un polynôme en les $\{e_{s, f_1}, \dots, e_{s, f_n}\}$, c'est-à-dire :

$$c(s) = \sum_{S \in \mathcal{S}} a_{s,S} e_{s,S}$$

où $\{f_1, \dots, f_n\}$ est l'ensemble des faces de P contenant s . Les coefficients $a_{s,S} \in \Lambda$ satisfont à la propriété suivante.

Lemme 6.2.11 *Soit s et s' deux sommets de P et soit $S \in \mathcal{S}$. Supposons que $a_{s,S}$ et $a_{s',S}$ sont tout deux non nuls. Alors ils sont égaux.*

PREUVE: On a par hypothèse que s et s' sont dans f_S . Par la proposition 6.2.9, on a

$$\begin{aligned} \text{res}_{s, f_S}(c(s)) &= \sum_{S \in \mathcal{S}} a_{s,S} e_{f_S, S} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}} a_{s',S} e_{f_S, S} = \text{res}_{s', f_S}(c(s')). \quad \square \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve de la surjectivité de γ , considérons le polynôme p_s dans $\Lambda[f_1, \dots, f_m]$ défini par $p_s = \sum_{S \in \mathcal{S}} a_{s,S} f^S$. On a la relation $\gamma(p_s)(s) = c(s)$. Définissons le polynôme $p = \sum_{S \in \mathcal{S}} a_S f^S$ où a_S est l'unique valeur non-nulle de $a_{s,S}$ pour s sommet de P (donnée par le Lemme 6.2.11). Comme $\gamma(p)(s) = \gamma(p_s)(s) = c(s)$ pour tout sommet s , on a $\gamma(p) = c$, ce qui prouve la surjectivité de γ . \square

Nous terminons ce paragraphe par les conséquences du théorème 6.2.4.

Théorème 6.2.12 *Soit V_P la variété torique associée à un polytope de Delzant P et soit V'_P sa partie réelle. On peut construire un isomorphisme :*

$$\gamma : \mathbb{Z}_2[f_1, \dots, f_m, x_1, \dots, x_n]/I \longrightarrow H_{T_2}^*(V'_P; \mathbb{Z}_2) \quad (6.10)$$

où $\{f_1, \dots, f_m\}$ est l'ensemble des facettes de P et $H_{T_2}^*(V'_P; \mathbb{Z}_2)$ est vu comme une algèbre sur $H_{T_2}^*(pt; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_n]$, avec x_i de degré 1 et $\gamma(f_i)$ de degré 1. L'idéal I est engendré par deux types d'éléments:

1. $\prod_i f_i$ si $\bigcap_i f_i = \emptyset$
2. $x_j - \sum_{i=1}^m u_{ij} f_i$ pour $1 \leq j \leq n$

où $u_i \in \mathbb{Z}_2^n$ est la réduction mod 2 du vecteur normal primitif de f_i .

PREUVE: Par le théorème du \mathbb{Z}_2 -isomorphisme 5.4.1, il suffit de calculer $H_T^*(V_P; \mathbb{Z}_2)$, l'anneau $H_{T_2}^*(V'_P; \mathbb{Z}_2)$ étant alors obtenu en divisant les degrés. Par le Théorème 6.2.4, le groupe gradué $H_T^*(V_P; \mathbb{Z})$ est non-nul seulement en dimension paire et il est abélien libre. On a donc que

$$H_T^*(V_P; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2[f_1, \dots, f_m, x_1, \dots, x_n]/(I \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Le théorème 6.2.12 s'ensuit immédiatement. \square

Les résultats précédents permettent de retrouver la cohomologie non-équivariante des variétés toriques et de leur partie réelle. On redémontre ainsi le théorème classique de ([Fu, chapitre 5], [DJ, Theorem 4.14]) :

Théorème 6.2.13 (Théorème de Danilov) *Soit V_P la variété torique associée à un polytope de Delzant P . Soit Λ un anneau principal. Alors, on peut construire un isomorphisme :*

$$\gamma : \Lambda[f_1, \dots, f_m]/I \longrightarrow H^*(V_P; \Lambda) \quad (6.11)$$

où $\{f_1, \dots, f_m\}$ est l'ensemble des facettes de P , $\gamma(f_i)$ est de degré 2 et I est l'idéal engendré par deux types d'éléments:

1. $\prod_i f_i$ si $\bigcap_i f_i = \emptyset$

2. $\sum_{i=1}^m u_{ij} f_i$ pour $1 \leq j \leq n$, où $\{u_i\}$ est la normale primitive de f_i .

PREUVE: Comme l'action est cohomologiquement formelle par la proposition 6.1.3 et que $H^*(V_P; \Lambda)$ est Λ -libre de type fini, cela découle du théorème 6.2.4 et de la proposition 6.1.2. \square

Enfin, pour la cohomologie mod 2 non-équivariante de la partie réelle, on retrouve le résultat des [DJ, Theorem 4.14]:

Théorème 6.2.14 *Soit V_P la variété torique associée à un polytope de Delzant P et soit V'_P sa partie réelle. On peut construire un isomorphisme :*

$$\gamma : \mathbb{Z}_2[f_1, \dots, f_m]/I \longrightarrow H^*(V'_P; \mathbb{Z}_2) \quad (6.12)$$

où $\{f_1, \dots, f_m\}$ est l'ensemble des facettes de P . Chaque f_i est de degré 1. L'idéal I est engendré par deux types d'éléments:

1. $\prod_i f_i$ si $\bigcap_i f_i = \emptyset$
2. $\sum_{i=1}^m u_{ij} f_i$ pour $1 \leq j \leq n$, où $u_i \in \mathbb{Z}_2^n$ est la réduction mod 2 du vecteur normal primitif de f_i .

PREUVE: Ce théorème se démontre comme le théorème 6.2.13, en utilisant le théorème 6.2.12. \square

6.3 Les orbites coadjointes

Soit G un groupe de Lie compact connexe. Ce groupe G agit sur lui-même par conjugaison

$$C_g : \begin{array}{l} G \rightarrow G \\ h \mapsto ghg^{-1} \end{array}$$

et l'application tangente de cette action en e est une représentation de G sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} :

$$\text{Ad} : \begin{array}{l} G \rightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g \mapsto \text{Ad}_g := T_e C_g \end{array}$$

que l'on appelle la *représentation adjointe* de G . Quant à l'application cotangente, elle donne la *représentation coadjointe*, sur le dual \mathfrak{g}^* de l'algèbre de Lie de G

$$\text{Ad}^* : \begin{array}{l} G \rightarrow GL(\mathfrak{g}^*) \\ g \mapsto \text{Ad}_g^* = T_e^* C_{g^{-1}} \end{array}$$

Soit x un élément de \mathfrak{g}^* . Appellons V_x l'orbite de x pour l'action coadjointe. Comme G est compact cette orbite est une sous-variété fermée de \mathfrak{g}^* . Nous allons maintenant définir une forme symplectique sur V_x . Pour tout x on peut définir une forme bilinéaire alternée sur \mathfrak{g} :

$$\omega_x(X, Y) = \langle x, [X, Y] \rangle$$

. On trouvera dans [Au, Proposition 3.3.4] la démonstration du résultat suivant :

Proposition 6.3.1 *Le noyau de ω_x est l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_x du stabilisateur de x pour l'action coadjointe. La forme ω_x peut donc être vue comme une forme symplectique linéaire définie sur $T_x(V_x) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$. La donnée de cette forme pour chaque point de V_x définit une forme symplectique sur V_x , dite "forme de Kirillov".*

Par construction, l'action de G sur V_x conserve cette forme symplectique. On peut démontrer que c'est une action hamiltonienne dont l'application moment est tout simplement l'inclusion de V_x dans \mathfrak{g}^* .

6.4 Les orbites coadjointes de $SU(n)$

Nous allons regarder dans cette section plus attentivement le cas où $G = SU(n)$. On utilise l'identification classique de $\mathfrak{su}(n)^*$ avec l'espace \mathcal{H} des matrices hermitiennes de trace nulle via le couplage

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathfrak{su}(n) &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, a) &\mapsto -i \operatorname{tr}(xa) \end{aligned}$$

Cette identification conjugue la représentation co-adjointe avec l'action de $SU(n)$ sur \mathcal{H} par conjugaison : $Ad_h^*(x) = h^{-1}xh$. Soit $x \in \mathcal{H}$. Par le théorème spectral pour les matrices de dimension finie il existe une matrice h de $SU(n)$ telle que $Ad_h^*(x)$ est diagonale. Comme la conjugaison par une matrice unitaire préserve le spectre on voit que l'orbite \mathcal{H}_x de x par l'action coadjointe de $SU(n)$ est l'ensemble des matrices ayant même spectre que x . Soit T le tore maximal de $SU(n)$ formé des matrices diagonales (T est de dimension $n - 1$). La forme de Kirillov sur \mathcal{H}_x est la forme symplectique définie par :

$$\omega_h(X, Y) = i \operatorname{tr}([X, Y]h)$$

où X, Y sont deux vecteurs tangents à \mathcal{H}_x en h . Par les résultats de la section 6.3 une application moment possible pour l'action de T est l'application $\Phi : \mathcal{H}_x \mapsto \mathbb{R}^n$ qui associe à chaque matrice la suite de ses éléments diagonaux.

La conjugaison complexe des éléments de la matrice : $\tau(h) = \bar{h}$ fournit, sur \mathcal{H}_x , une conjugaison τ , au sens du chapitre 5.1. En effet :

- l'ensemble des points fixes est non vide, car il contient au moins les matrices diagonales (qui sont à coefficient réels).
- τ est anti-symplectique, car :

$$\begin{aligned} \omega_{\tau(h)}(d\tau(X), d\tau(Y)) &= i \operatorname{tr}([\bar{X}, \bar{Y}]\bar{h}) = i \operatorname{tr}([X, Y]^T h^T) = \\ &= -i \operatorname{tr}([X, Y]h) = -\omega_h(X, Y) \end{aligned}$$

- τ anti-commute avec l'action de T , car

$$Ad_h^*(\tau(x)) = h^{-1}\bar{x}h = \overline{h^{-1}xh} = \overline{Ad_h^*(x)} = \tau(Ad_{h^{-1}}^*(x))$$

La partie réelle, notée \mathcal{H}'_x de cette conjugaison est l'ensemble des matrices réelles symétriques de même spectre que x . Nous allons voir que l'action de T sur \mathcal{H}_x est \mathbb{Z} -pure. Pour cela il faut regarder son comportement près des points fixes.

Pour $x \in \mathcal{H}$ et $\xi \in su(n)$, définissons $ad_\xi^*(x) \in \mathcal{H}$ par

$$ad_\xi^*(x) := (dAd_h^*(x))|_{h=Id}(\xi) = (\exp(-t\xi)x \exp(t\xi))|_{t=0} = [x, \xi].$$

On voit que x est un point fixe pour l'action de T si et seulement si $[x, \xi] = 0 \forall \xi \in t$, c'est-à-dire si x commute avec ξ pour tout $\xi \in t$. Les seules matrices de \mathcal{H} ayant cette propriété sont les matrices diagonales. Soit (a_1, \dots, a_n) les valeurs propres de x (ordonnées d'une manière quelconque). Notons $M(a_1, \dots, a_n) : = M$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont a_1, \dots, a_n . Donc $M(a_1, \dots, a_n)$ est un point fixe de T et tous les autres points fixes sont obtenus à partir de celui-ci par permutation des coefficients.

Soit k l'algèbre de Lie du stabilisateur de x et soit b l'ensemble des éléments de $su(n)$ dont la diagonale est constituée de zéros. C'est un sous-espace complémentaire à l'algèbre de Lie t de T . Donc on peut donc identifier $su(n)/k$ avec un sous-espace de b noté b' . Ainsi $ad^*(x)$ induit un isomorphisme entre b' et $T\mathcal{H}_x$. Via cet isomorphisme, l'action de T sur $T\mathcal{H}_x$ devient une action sur b' :

$$Ad_h^*([x, \xi]) = h^{-1}[x, \xi]h = [x, h^{-1}\xi h].$$

On remarquera qu'il s'agit de la restriction à T de l'action adjointe de $SU(n)$.

Soit $i, j \in 1, \dots, n$ où $i < j$. Appellons E_{ij} la matrice de k définie par : $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. Les matrices $E_{ij} \in b'$ forment une base de b' formée

de vecteurs propres pour l'action de T . En fait cette base n'est pas en général correctement orientée par rapport à la forme symplectique de Kirillov, donc les poids que nous allons calculer ne sont pas juste au signe près. Cela n'a pas d'importance si nous voulons juste vérifier que l'action est \mathbb{Z} -pure. Si l'on désire les poids exactes il suffit de se rappeler qu'en un sommet ils pointent vers l'intérieur du polytope moment. Pour calculer les poids $\pi_{ij} \in t^*$ de T au point x , on calcule la composante ij de l'action infinitésimale de t sur k :

$$dAd_\rho^*(\xi) = [\xi, \rho]$$

où $\rho = \text{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_n) \in t$. On en déduit que

$$[E_{ij}, \rho] = (\rho_i - \rho_j)E_{ij}.$$

On a donc $\pi_{ij}(\rho) = \rho_i - \rho_j$. Il est clair que les π_{ij} sont primitifs et deux-à-deux linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .

On peut donc calculer $H_T^*(\mathcal{H}_x; \Lambda)$ et $H_{T_2}^*(\mathcal{H}'_x; \mathbb{Z}_2)$ par les théorèmes GKM. Nous allons juste donner un exemple.

Exemple : Orbites coadjointes génériques de $SU(3)$ Nous allons donner une présentation par générateurs et relations de la cohomologie équivariante (à coefficient entiers) d'une orbite coadjointe générique V de $SU(3)$. La variété V est formée des (3×3) -matrices hermitiennes isospectrales de trace nulle, avec 3 valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ et est difféomorphe à la variété des drapeaux complets dans \mathbb{C}^3 .

Comme vu précédemment, on peut prendre pour application moment μ l'application qui fait correspondre à une matrice ses coefficients diagonaux. Le polytope moment $\mu(V)$ est donc contenu dans le plan $\Pi_0 : = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum u_i = 0\}$. C'est un hexagone \mathcal{P} formé de l'enveloppe convexe des six points $\lambda_s : = (\lambda_{s(1)}, \lambda_{s(2)}, \lambda_{s(3)})$, pour toutes les permutations $s \in \text{Sym}_3$. Les sommets de \mathcal{P} sont donc indexés par le groupe symétrique Sym_3 .

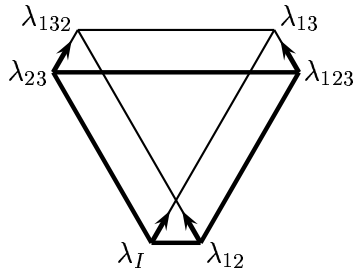
Choisissons $\xi \in t$ un élément générique tel que la fonction de Morse μ_ξ ait pour unique minimum λ_I (et maximum λ_{13} ; on omet les parenthèses dans la notation des cycles de Sym_3). On associe, au sommet λ_s la classe $\sigma_s \in H_T^*(V)$ qui est la classe de Thom de la nappe descendante de λ_s pour le gradient de μ_ξ (par rapport à la métrique riemannienne associée à la forme kaehlerienne de Kirillov).

Nous allons définir de plus 3 autres classes. Considérons les matrices diagonales $x_{12} : = \text{Diag}(1, -1, 0)$, $x_{23} : = \text{Diag}(0, 1, -1)$ et $x_{13} : = \text{Diag}(1, 0, -1)$. On les regarde comme éléments de $t^* = H_T^2(pt; \mathbb{Z})$ et on prend

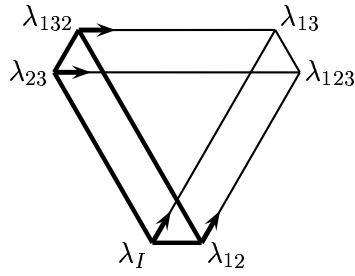
leurs images dans par l'homomorphisme $H_T^*(pt; \mathbb{Z}) \rightarrow H_T^*(V; \mathbb{Z})$. Observons que

$$H_T^*(pt) \approx \mathbb{Z}[x_{12}, x_{23}, x_{13}] / \{x_{13} = x_{12} + x_{23}\}.$$

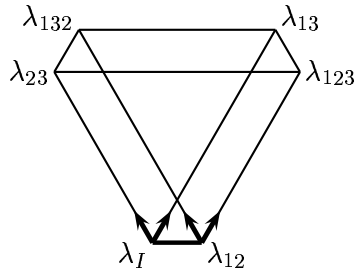
Les classes σ_s peuvent être décrites par les diagrammes suivants, dessinés dans le plan Π :



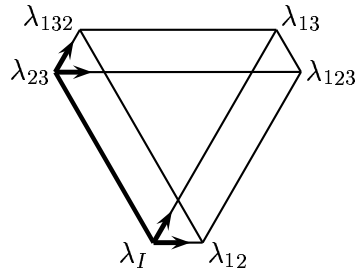
σ_{123}



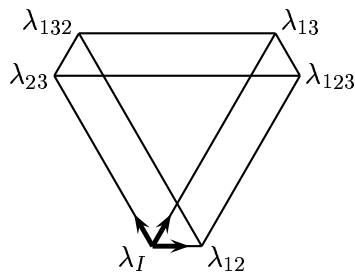
σ_{132}



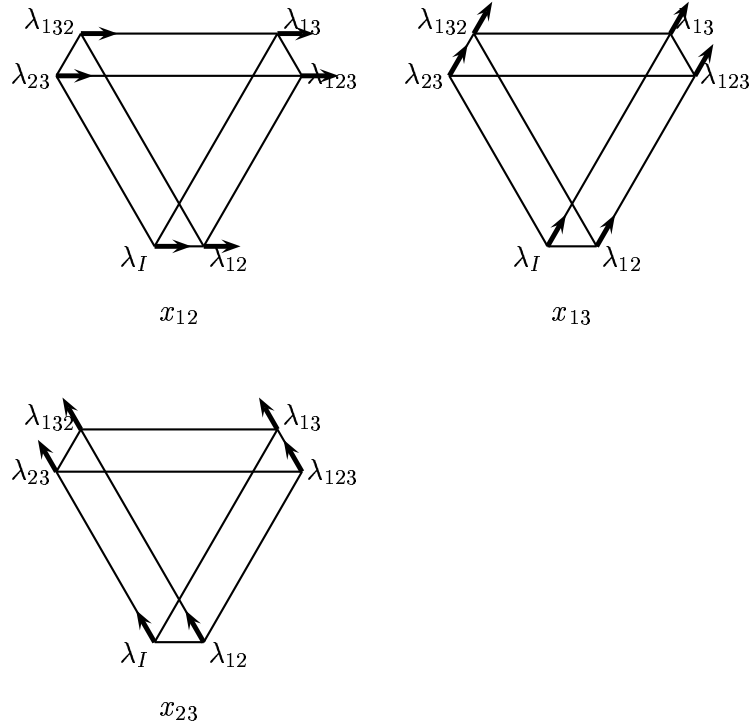
σ_{12}



σ_{23}



σ_I



Les arêtes dessinées sont les images d'une des 2-sphères du 1-squelette de V . La classe associée à l'un de ces diagramme est définie comme suit. La composante de σ_s en un sommet c de \mathcal{P} , est

1. 0 si c n'appartient pas aux lignes grasses du diagramme de σ_s .
2. le produit des poids qui n'appartiennent pas aux lignes grasses du diagramme σ_s , sinon.

Ces poids sont indiqués par des flèches sur les diagrammes.

Théorème 6.4.1 *La cohomologie équivariante de V admet la présentation par générateurs et relations suivante :*

- a) 5 générateurs en degré 2: $\sigma_{123}, \sigma_{132}, x_{12}, x_{13}, x_{23}$
- b) 2 générateurs en degré 4: σ_{12}, σ_{23}
- c) 1 générateur en degré 6: σ_I .

d) 1 relation en degré 2: $x_{12} + x_{23} = x_{13}$

e) 4 relations en degré 4:

$$\begin{aligned}(\sigma_{132} - x_{23})\sigma_{132} &= \sigma_{12} \\(\sigma_{123} - x_{12})\sigma_{123} &= \sigma_{23} \\ \sigma_{123}\sigma_{132} &= \sigma_{12} + \sigma_{23}\end{aligned}$$

f) 4 relations en degré 6:

$$\begin{aligned}(\sigma_{123} - x_{13})\sigma_{23} &= (\sigma_{132} - x_{13})\sigma_{12} = 0 \\(\sigma_{123} - x_{12})\sigma_{12} &= (\sigma_{132} - x_{23})\sigma_{23} = \sigma_I\end{aligned}$$

Remarque : Seuls les générateurs $\sigma_{123}, \sigma_{132}, x_{12}, x_{23}$ sont nécessaires, les autres pouvant être éliminés par les relations. La présentation obtenue avec seulement ces 5 générateurs est plutôt compliquée et moins naturelle. Ce travail d'élimination donne un meilleur résultat pour la cohomologie non-équivariante (voir corollaire 6.4.3).

PREUVE: Notons

$$A := \mathbb{Z}[\sigma_I, \sigma_{132}, \sigma_{123}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, x_{12}, x_{23}, x_{13}]$$

l'algèbre engendrée par les générateurs donnés. Soit $\phi : A \rightarrow H_T^*(V)$ l'application qui envoie chaque σ_s sur sa classe associée. On vérifie facilement, sur les diagrammes, que les éléments $\phi(\sigma_s)$ satisfont toutes les relations décrites précédemment. Notons J l'idéal de A engendré par les relatueurs associés aux huit relations; On note également par $\phi : A/J \rightarrow H_T^*(V)$ l'application induite par ϕ .

Considérons le $H_T^*(pt)$ -module libre engendré par les σ_s :

$$B := H_T^*(V)\langle \sigma_I, \sigma_{132}, \sigma_{123}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, I \rangle$$

(les σ_s ne se multiplient pas entre eux dans B). Soit δ l'inclusion du $H_T^*(pt)$ -modules $\delta : B \rightarrow A$ et $\bar{\delta} : B \rightarrow A/J$ son quotient par J . Les relations d) et e) montrent que tous les monômes de degré 2 sont dans l'image de $\bar{\delta}$ et donc $\bar{\delta}$ est surjectif. Comme tous les relatueurs sont de degrés ≥ 4 , $\ker \bar{\delta} \approx \delta(B) \cap J = 0$. Ainsi $\bar{\delta}$ est un isomorphisme de $H_T^*(pt)$ -modules. Par abus de notation, nous noterons encore $\phi : B \rightarrow H_T^*(V)$ la composition de ϕ avec $\bar{\delta}$.

L'APPLICATION ϕ EST SURJECTIVE :

Soit p une classe de $H_T^*(V)$. Soit $a_I = p(\lambda_{13}) \in H_T^*(pt)$ et $p_1 = p - a_I I$. Alors $p_1(\lambda_{13}) = 0$. Les équations GKM imposent que x_{12} divisent $(p_1(\lambda_{132}) - p_1(\lambda_{13})) = p_1(\lambda_{132})$, de même x_{23} divise $p_1(\lambda_{123})$.

Effectuons les divisions $a_{132} = p_1(\lambda_{132})/x_{12}$, $a_{123} = p_1(\lambda_{123})/x_{23}$. Soit $p_2 = p_1 - a_{132}\sigma_{132} - a_{123}\sigma_{123}$. Alors $p_2(\lambda_{132}) = p_2(\lambda_{123}) = 0$. On a donc que x_{12} , x_{13} divisent $p_2(\lambda_{23})$ et, comme les poids sont premiers deux-à-deux entre eux, on a que $x_{12}x_{13}$ divise $p_2(\lambda_{23})$. De même $x_{23}x_{13}$ divise $p_2(\lambda_{12})$.

Soit $a_{23} = p_2(\lambda_{23})/(x_{12}x_{13})$, $a_{12} = p_2(\lambda_{12})/(x_{23}x_{13})$ et $p_3 = p_2 - a_{23}\sigma_{23} - a_{12}\sigma_{12}$. On voit comme avant que $x_{12}x_{23}x_{13}$ divise $p_3(\lambda_I)$ et on peut définir $a_I = p_3(\lambda_I)/(x_{12}x_{23}x_{13})$.

En conclusion on a :

$$p = \sum_{s \in F} a_s \sigma_s.$$

(Remarque: $\sigma_{13} = I$)

L'APPLICATION ϕ EST INJECTIVE : L'action de T étant formelle, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$H_T^r(V; \mathbb{Q}) \approx \bigoplus_{p+q=r} H_T^*(pt; \mathbb{Q})^p \otimes H^q(V; \mathbb{Q}).$$

Les points critiques de μ_ξ indiquent que le polynôme de Poincaré de V est $1 + 2u^2 + 2u^4 + 1$. On en déduit que $\dim B^r \otimes \mathbb{Q} = \dim H_T^r(V; \mathbb{Q})$. Comme ϕ est surjective et que B est un \mathbb{Z} module libre, l'application ϕ est aussi injective. \square

En utilisant le théorème 6.1.2, on obtient du théorème 6.4.1, en posant $x_{ij} = 0$, une présentation de la cohomologie non-équivariante de V connue des spécialistes du calcul de Schubert :

Théorème 6.4.2 $H^*(V; \Lambda)$ admet la présentation par générateurs et relations suivante :

- a) 2 générateurs en degré 2: σ_{123} , σ_{132}
- b) 2 générateurs en degré 4: σ_{12} , σ_{23}
- c) 1 générateur en degré 6: σ_I .
- d) 3 relations en degré 4:

$$\begin{aligned} \sigma_{123}^2 &= \sigma_{23} \\ \sigma_{132}^2 &= \sigma_{12} \\ \sigma_{123}\sigma_{132} &= \sigma_{12} + \sigma_{23} \end{aligned}$$

e) 4 relations en degré 6 :

$$\begin{aligned}\sigma_{123}\sigma_{23} &= \sigma_{132}\sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{123}\sigma_{12} &= \sigma_{132}\sigma_{23} = \sigma_I\end{aligned}$$

Observons que seuls les générateurs $a = \sigma_{123}$ et $b = \sigma_{132}$ sont nécessaires, ce qui donne la présentation :

Corollaire 6.4.3 $H^*(V; \Lambda)$ admet la présentation avec deux générateurs a, b en degré 2 assujétis aux relations $ab = b^2 + a^2$ et $a^3 = b^3 = 0$.

PREUVE: L'élimination des générateurs σ_{ij} et σ_I laisse les trois relations de l'énoncé et la relation $a^2b = ab^2$. Cette dernière se déduit des précédentes par $0 = a^3 = a a^2 = a(b^2 - ab) = ab^2 - a^2b$. \square

Enfin, par les théorèmes 5.4.1 et 6.1.5, les présentations des théorèmes 6.4.1, 6.4.2 et 6.4.3 donnent, après division du degré des générateurs par 2, des présentations de $H_{T_2}^*(V'; \mathbb{Z}_2)$ et $H^*(V'; \mathbb{Z}_2)$.

Bibliographie

- [AB] Atiyah M. & Bott, R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 308 (1983) 523–615.
- [AP] Allday C. & Puppe V. Cohomological methods in transformation groups. *Cambridge University Press, 1993.*
- [Au] Audin M. The topology of torus actions on symplectic manifolds. *Birkhäuser* (1991).
- [CT] Chang T. & Skjelbred T. The topological Schur lemma and related results *Ann. of Math.* 100 (1974) 307–321.
- [BH] Borel A. et Haefliger A. La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique. *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961) 461–513.
- [Br] Brion M. Equivariant Chow groups. *Transformation Groups* **2** (1997) 225–264.
- [Br2] Brion M. Equivariant cohomology and equivariant intersection theory. *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, 514, *Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)*, 1–37, *Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.*
- [DJ] Davis M. & Januszkiewicz T. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. *Duke Math. J.* 62 (1991) 417–451
- [De] Delzant T. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. de France* 116 (1988) 315–339.
- [Du] Duistermaat J.J. Convexity and tightness for restrictions of Hamiltonian functions to fixed point sets of an antisymplectic involution. *Trans. Amer. Math. Soc.* 275 (1983) 417–429.
- [Fu] Fulton W. Introduction to toric varieties. *Princeton University Press* (1993)
- [GKM] Goresky M., Kottwitz R. & MacPherson R. Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem. *Invent. Math.* 131 (1998) 25–83.
- [Gu] Guillemin, V. Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n -spaces. *Birkhäuser* 1994.
- [GZ] Guillemin, V. & Zara C. De Rham equivariant cohomology and graphs. *Preprint, Math.DG/980135.*

- [HK] Hausmann, J-C. & Knutson A. The cohomology rings of polygon spaces. *Ann. Inst. Fourier* 48 (1998), no. 1, 281–321.
- [Hu] Husemoller D. *Fibre bundles*. Springer-Verlag 1975.
- [Ki] Kirwan, F. *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*. Princeton University Press (1984).
- [MSa] McDuff D. & Salamon D. *Introduction to symplectic topology*. Calenderon Press 1995.
- [MS] Milnor J. & Stasheff D. *Characteristic classes*. Princeton University Press 1974.
- [Se] Serre, J-P. Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. *Ann. of Math.* 54 (1951) 425–505.
- [TW] Tolman S. & Weitsman J. On the cohomology rings of Hamiltonian T -spaces. *Northern California Symplectic Geometry Seminar, 251–258*, Amer. Math. Soc. Transl. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999)

Cédric SCHMID
 Mathématiques-Université
 B.P. 240,
 CH-1211 Genève 24, Suisse
 cedric.schmid@math.unige.ch