

Cours de géométrie

Formation continue en mathématiques de base
pour l'enseignement dans le secondaire inférieur genevois
version préliminaire

octobre 2005

1 Introduction

L'idée de ce cours est de faire un survol des connaissances géométriques au travers des siècles en montrant comment les problèmes non résolus ont amené à des changements de paradigmes. Et comment ces derniers ont permis d'aller plus loin dans la compréhension de la géométrie. Partant des Egyptiens et Babyloniens où le développement et l'utilisation de méthodes géométriques permet de résoudre des problèmes concrets, nous verrons le premier changement de paradigme avec les Grecs où la géométrie se positionne à la frontière entre deux mondes : le monde des idées avec des objets idéaux vis à vis du monde réel dans lequel la réalisation des modèles géométriques est forcément imparfaite. Le besoin de démonstration se fait donc sentir plus fortement. Euclide en écrivant les *Eléments* va formaliser et axiomatiser le savoir connu (en plus de ces propres découvertes). Vient après cela la période alexandrine avec Archimède, Appollonios et, plus tard, Pappus et Proclus avec la compréhension des coniques ainsi que certains résultats "projectifs". Il reste néanmoins plusieurs problèmes ouverts (la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle à la règle et au compas) ainsi que le lancinant problème posé par le fameux cinquième postulat des parallèles.

Il faut attendre le développement de l'arithmétique et de l'algèbre arabe et son introduction en Europe au début de la Renaissance pour permettre un nouveau changement. L'algébrisation de la géométrie avec l'introduction par Descartes des coordonnées; les points du plan étant en bijection avec des couples de nombres "réels" et les objets géométriques étant décrits par des équations. A la même période le regain d'intérêt pour la culture grecque amène un emploi de plus en plus fréquent de la perspective dans l'art. L'idée de formaliser cette manière de peindre amène à la géométrie projective.

L'algébrisation de la géométrie et le développement, au début du 19^{ème} siècle, de la théorie des extensions de corps par le jeune mathématicien français Evariste Galois permettra de montrer l'impossibilité théorique de construire à la règle et au compas la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle. Sur un autre plan, le refus du 5^e postulat en tant que tel, avec diverses tentatives infructueuses de le démontrer, amènent aux géométries non euclidiennes : tout d'abord la géométrie hyperbolique, puis sphérique. Ceci entre la fin du 18^e et début du 19^e siècle (Lobachevski, Gauss, Bolai, Riemann, etc...). Le choc de la découverte de géométries non euclidiennes relance à la fin du 19^e, le besoin d'axiomatiser de manière minimale la géométrie (Hilbert). Le programme d'Erlangen ou l'identification d'une géométrie à un choix d'un groupe de transformations de l'espace et des invariants liés à celui-ci permet d'unifier et de mieux comprendre les diverses géométries.

Je tiens à remercier G. Wanner, R. Curtis et A. Kessler pour leur aide dans l'élaboration de ce polycopié.

Plan du cours

- Deux des plus anciens documents géométriques existants
Babylone (1900 av. J.C.)
L’Egypte : le papyrus Rhind (1650 av. J.C.) recopié par le scribe Ahmes
- Les Grecs : La géométrie déductive
Thalès (640-550 av. J.C.)
Pythagore (580-500 av. J.C.)
Platon (427-347 av. J.C.)
Euclide (315-255 av. J.C.)
Apollonius (260 av. J.C.)
Archimède (287-212 av. J.C.)
Pappus (290 a.d.)
- La géométrie projective
Desargues (1591-1661)
- La géométrie analytique
Descartes (1596-1650)
Une avancée pour les trois grands problèmes non résolus de la géométrie grecque
- Le problème du 5e postulat et les géométries non euclidiennes
Saccheri (XVIIIe siècle) précurseur
Lobatchevsky (1793-1856)
Gauss (1777-1855)
Bolyai
Riemann (1826-1866)
- (Le programme d’Erlangen ou l’algébrisation complète des géométries)
Klein (1872)
- L’axiomatisation minimale de la géométrie (ou Euclide revisité)
Hilbert (1899)

2 Quelques notes historiques

2.1 Babylone

Babylone est une des premières civilisations ayant laissé des écrits à vocation mathématique. On pense même que cette région est le berceau de l’écriture. Une de leurs plus belles réussites est leur système de numération. Il s’agit d’un mélange de base 10 et de base 60. Ils emploient deux symboles pour décrire les nombre de 1 à 60, l’unité est notée “ ∇ ” et la dizaine “ \langle ”. Ensuite les nombres sont écrits en base 60 par un système de numération par position. Exemple: Le nombre “ $\nabla \langle \nabla \nabla \nabla$ ” se lit “1 23” ce qui dans une numérotation en base 60 par position veut dire $1 \times 60 + 23 = 83$. Il faut préciser que les Babyloniens connaissaient dans le système par position les nombres fractionnaires, mais ils n’indiquaient pas la position

de la virgule; celle-ci étant donnée par le contexte. Ainsi le nombre “ $\nabla \langle\langle\nabla\nabla\nabla$ ” qui se lit “1 23” pouvait aussi bien représenter $1 + 23 \times 60^{-1} = 1,016666\dots$ que $1 \times 60 + 23 = 83$.

On a retrouvé la tablette d’argile suivante :



Que peut-on déduire ? Un carré de côté $\langle\langle\langle$ ($= 30$) a une diagonale de $\langle\langle\langle\nabla\nabla\langle\langle\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\langle\langle\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla$ ($= 42,4263\dots$) ou un carré de côté 1 a une diagonale de $\nabla\langle\langle\nabla\nabla\nabla\nabla\langle\langle\langle\langle\nabla\langle$ ($= 1,41423\dots$). Ceci est un résultat de type Pythagore, puisque la moitié du carré est un triangle isocèle rectangle de côté 1 et donc d’hypothénuse $\sqrt{2}$, ... mais 1500 ans avant Pythagore.

Cependant rien dans cette tablette d’argile ne semble montrer une justification théorique de ce résultat. Il semble que les Babyloniens n’aient jamais développé ce type de justifications. Ou du moins s’ils en avaient, aucune trace ne nous est parvenue. Vu le nombre de tablettes d’échanges, de calculs, voir d’exercices retrouvés, on peut supposer que les Babyloniens n’avaient pas le souci de la justification théorique. Ils étaient pragmatiques, ils avaient des outils mathématiques pour des applications pratiques et cela leur suffisait. Le même type d’approche se retrouve chez l’autre civilisation contemporaine et importante de la région, les Egyptiens.

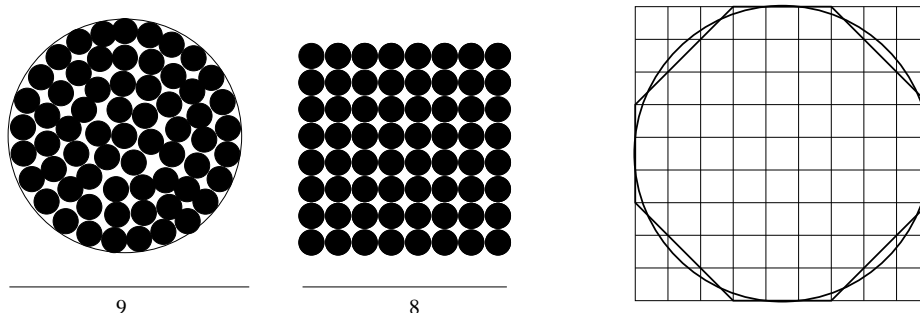
2.2 L'Égypte ou la naissance de la géométrie.

Hérodote place les débuts de la géométrie au bord du Nil. Il dit : "Le Dieu Nil est l'inventeur de la géométrie". Plus prosaïquement comme les paysans payaient une taxe dépendant de la surface qu'ils cultivaient, si une crue du Nil emportait une partie du champ, il fallait être capable de recalculer l'aire de ce dernier ainsi que les limites avec le champ du voisin. D'où l'importance de techniques d'arpentage évoluées.

D'autre part, les prêtres égyptiens étaient très soucieux de l'orientation de leurs temples. Il leur fallait des outils géométriques précis pour les positionner. Un de ces outils est la corde à 13 noeuds (équidistants). Cela permet d'avoir 12 segments de cordes de même longueur. Il suffit alors de fixer le premier et le treizième noeud sur un piquet, de fixer un deuxième piquet au quatrième noeud dans une direction donnée et de tendre la corde sur le huitième noeud pour obtenir un triangle de côtés respectivement 3,4 et 5, donc un triangle rectangle. Ceci permettait de faire précisément des angles droits dans des directions données. Cette technique utilisée par les compagnons charpentiers ou maçons au Moyen Age reste employée par les maçons de nos jours en Italie du Sud. Elle est aussi encore utilisée dans certaines parties d'Afrique. Voilà donc un exemple de technique parfaitement correcte employée par les Égyptiens. On connaît plusieurs sources pour les mathématiques égyptiennes, mais dans aucune on ne retrouve de justification théorique. Une des sources les plus importantes est le papyrus Rhind écrit par le scribe Ahmnes en 1650 environ avant J.C., mais qui décrit des connaissances plus anciennes (Ahmnes précise qu'il recopie un original plus ancien). Le papyrus est constitué d'un unique rouleau mesurant 5,4 m de long sur 32 cm de large. Il s'agit d'une liste de problèmes mathématiques et de leurs solutions à l'usage des scribes novices.

Parmi les problèmes, on trouve le calcul de l'aire d'un rectangle (problème 49), celui de l'aire d'un disque de diamètre donné (prob. 50), l'aire d'un triangle (prob. 51), d'un triangle tronqué (prob. 52) et d'autres concernant le volume des pyramides, etc...

Revenons sur le problème 50: Un champ circulaire de diamètre 9 khets, quel est son aire?



La réponse donnée sur le papyrus Rhind est la suivante :

Soustraire un khets du diamètre, ce qui laisse 8 khets et élever au carré. Ce qui donne 64 setats (= khets²).

Cette réponse peut nous sembler bizarre (et évidemment fausse théoriquement), mais examinons sa précision numérique.

On sait que l'aire d'un disque de diamètre d vaut $\pi d^2/4$. Dans notre cas l'aire vaut donc $\pi 81/4$. Ahmnes nous dit que ceci est égal à $(9 - 1)^2 = 64$. On obtient donc une estimation de π par l'égalité

$$\frac{\pi 81}{4} \cong 64 \quad \Leftrightarrow \quad \pi \cong \frac{256}{81} = 3,1604..$$

Ce qui est une assez bonne approximation de π . Il est clair que cette justification est anachronique. Il est plus probable que cette méthode ait vu le jour grâce à une approximation du cercle par un octogone non régulier, mais ceci n'est qu'une supposition.

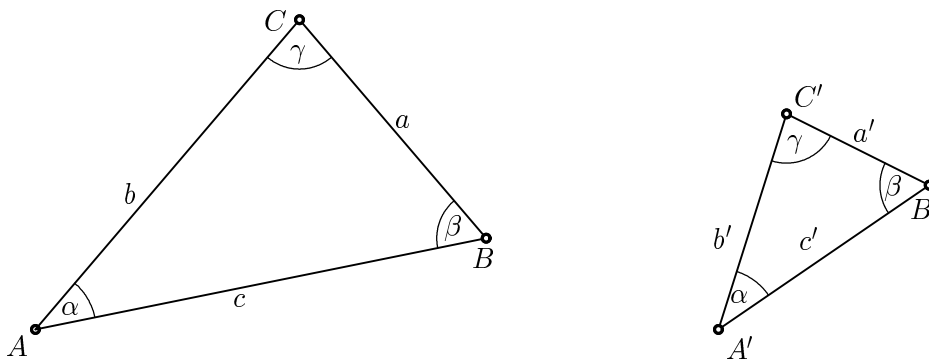
Cet exemple nous montre aussi que les Egyptiens utilisaient des méthodes mathématiques, mais ne ressentaient pas le besoin d'une justification théorique. Cet état de fait va changer radicalement avec la civilisation grecque.

2.3 Les Grecs

Question : Invente-t-on ou découvre-t-on les mathématiques? En d'autres termes, est-ce que les mathématiques ont une existence ou une réalité propre ou ne sont-elles que des constructions de l'esprit?

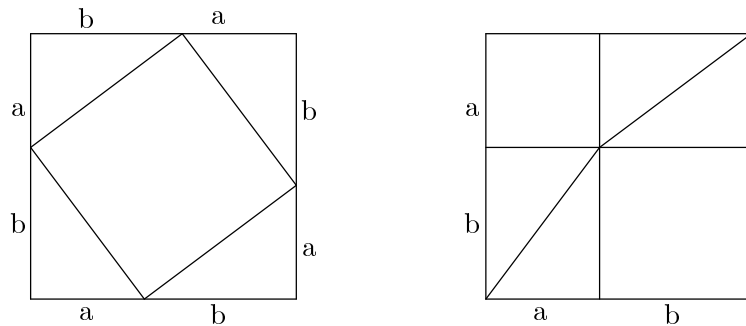
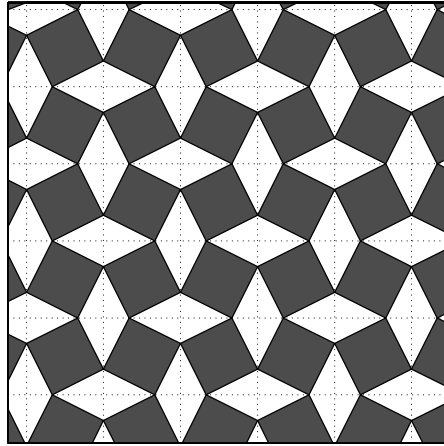
Si avant les Grecs, les mathématiques sont essentiellement des outils, on les invente et on les utilise pour résoudre des problèmes pratiques, cette conception change chez les Grecs et c'est ce changement d'essence qui entraîne le besoin de preuves logico-déductives.

Thalès (640-550 av. J.C.) Voici quelques résultats qui lui sont attribués : Il calcule la hauteur des pyramides (en utilisant l'ombre de celle-ci), observe et "prouve" que le diamètre d'un disque le sépare en deux parties égales, affirme que les angles opposés à un sommet sont égaux, donne une méthode pour calculer la distance d'un bateau au rivage, s'intéresse à l'astronomie. On lui attribue aussi le théorème énonçant que si deux triangles ont les mêmes angles, alors leurs côtés respectifs sont proportionnels $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.



Pythagore (580-500 av. J.C.) Sur Pythagore lui-même, on ne connaît pas grand chose, mais on attribue aux pythagoriciens les résultats suivants : la somme des angles d'un triangles est égale à deux angles droits, le théorème de Pythagore, la découverte des irrationnels, l'harmonie en musique,... La légende dit que Pythagore découvrit la preuve de son fameux théorème en regardant le carrelage du palais de Polycrate, tyran de Samos et que Pythagore en fut si enthousiasmé, qu'il offrit un taureau en sacrifice pour célébrer

sa découverte.



Il est intéressant de remarquer que le deuxième dessin permet, en algébrisant la situation, de comprendre géométriquement l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Platon (427-347 av. J.C.) Platon est avant tout un philosophe, il voit les mathématiques comme le premier pilier dans la formation d'un philosophe. Ce qui souligne l'utilité des mathématiques comme entraînement de la pensée. Pour lui, le but de la philosophie est l'idée de Dieu, la Vérité. Les mathématiques sont l'instrument qui permettent à la pensée de s'élever vers la Vérité.

Ainsi pour Platon, l'étude de la géométrie est l'étude d'un monde idéal et éternel, le monde des idées dans lequel des objets idéaux existent. Les objets mathématiques, comme la droite et le cercle, ont donc une existence propre dans ce monde que l'homme doit essayer d'appréhender. Les dessins ne sont que des représentations imparfaites de ces objets idéaux. C'est le fameux mythe de la caverne. Ceci implique que pour comprendre ces objets idéaux, on ne peut plus se fier à nos sens, comme la vue dans le cas des dessins. Il faut une autre approche pour appréhender les propriétés idéales de ces objets idéaux. Et cette méthode, c'est la déduction logique. Ainsi Platon se donne des objets initiaux, puis des règles logiques qu'il accepte comme vraies et qui permettent de manipuler ces objets. De là, il peut déduire des propriétés des objets idéaux (donc parfaitement vraies) par un raisonnement logico-déductif. Cette approche révolutionnaire peut être considérée comme le début des mathématiques comme nous les connaissons aujourd'hui.

Rappelons en quelques points essentiels ce que "faire des mathématiques" veut dire et ce qu'est un résultat mathématique.

1. Définir les objets et les règles que l'on se donne pour éviter, si possible, toute ambiguïté.
2. Remarquer d'une manière ou d'une autre (sur des exemples) certaines propriétés d'un objet.
3. Énoncer une conjecture, c'est-à-dire une affirmation que l'on croit vraie, mais qui n'est pas encore démontrée.
4. Démontrer par un emploi des définitions et des règles que l'affirmation est vraie.

Prenons un exemple : Acceptons les règles de l'arithmétique sur les entiers (\mathbb{N}). On dit qu'un entier n est impair, s'il existe un entier k tel que $n = 2 * k + 1$. Ceci est une définition. On remarque que 3, 5, 7, 9, 23 sont impairs (car $3 = 2 * 1 + 1, \dots$). Remarquons que le carré de chacun de ces nombres est aussi impair. En effet $3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49, 23^2 = 529$. On peut donc conjecturer que : **Si n est un impair, alors n^2 est impair.**

Cette dernière phrase est le prototype d'un énoncé mathématique. En effet la forme générale d'un tel énoncé est la suivante :

“Si hypothèse, alors conclusion”

où l'hypothèse est un énoncé que l'on admet vrai et la conclusion est un énoncé dont la véracité découle des hypothèses, des définitions et des règles. On dit aussi que l'hypothèse implique la conclusion. On parle aussi de implication “Si hypothèse, alors conclusion”.

Voyons un exemple linguistique : Notons P la phrase “il pleut” et Q la phrase “le sol du jardin est mouillé”. L'implication si P alors Q se dit “S'il pleut, alors le sol du jardin est mouillé”. Cette implication est toujours vraie. La réciproque de cette implication est si Q alors P, qui se dit “Si le sol du jardin est mouillé alors il pleut”. Ce qui n'est pas toujours vrai, on peut être justement en train d'arroser le jardin, car il n'a pas plu depuis longtemps. Ainsi une implication peut être vraie et sa réciproque fautive. Quand une implication et sa réciproque sont toutes deux vraies, on dit qu'on a une équivalence. Mais revenons aux énoncés mathématiques.

Pour qu'une conjecture soit un théorème, il faut en donner une preuve, c'est-à-dire une suite finie d'applications logiques des règles, définitions ou théorèmes (déjà prouvés) partant de l'hypothèse et arrivant à la conclusion.

Poursuivons l'exemple en donnant une preuve à la conjecture.

L'hypothèse est $n = 2 * k + 1$. On a donc

$$\begin{aligned}
 n^2 &= (2 * k + 1)^2 && \text{par hypothèse} \\
 &= 4 * k^2 + 4 * k + 1 && \text{règles d'arithmétique} \\
 &= 2 * (2k^2 + 2 * k) + 1 && \text{règles d'arithmétique} \\
 &= 2 * m + 1 && \text{en posant } m = 2k^2 + 2 * k
 \end{aligned}$$

n^2 est bien un nombre impair. Ce qu'il fallait démontrer (Cqfd).

Question : Est-ce que la réciproque de cet énoncé est vraie?

Euclide (environ 325-265 av. J.C.) Euclide écrit les Eléments, 13 livres contenant les résultats indispensables pour avoir une compréhension de la géométrie connue à l'époque. Son approche est axiomatique, puisqu'il pose des définitions, des règles (postulats et axiomes) et, à partir de là, démontre tous les résultats. Nous allons suivre à peu près le cheminement d'Euclide.

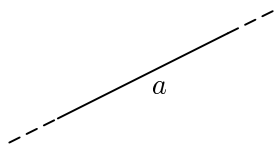
Archimède (287-212 av. J.C.) On ne peut pas parler des mathématiciens grecs sans parler d'Archimède. Son apport est important car il est à la fois théorique et appliqué. Au niveau mathématique, voici quelques uns de ses travaux marquants. Il définit une méthode pour écrire de très grands nombres avec le système de numération grec, il démontre que π est bien défini et en calcule des approximations. On peut le considérer comme le précurseur du calcul intégral. En physique et en mécanique ses apports sont aussi de premier ordre, si on pense à la fameuse poussée qui porte son nom, sa vis et bien d'autres choses encore...

3 La géométrie euclidienne : la règle et le compas

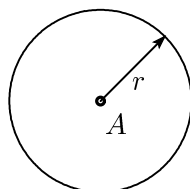
Euclide commence par définir les objets avec lesquels il va travailler. Voyons certaines de ses définitions. ¹



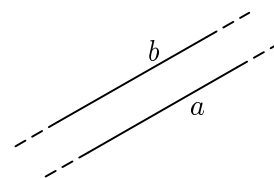
Un **point**



Une **droite**



Un cercle centré en A de rayon r



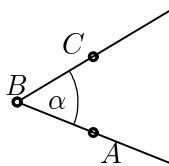
Droites parallèles $a \parallel b$

Euclide 1
est ce qui n'a pas de partie.

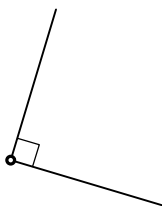
Euclide 4
est une ligne placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

Euclide 15
est la ligne par rapport à laquelle toutes les droites menées du centre à sa rencontre sont égales entre elles.

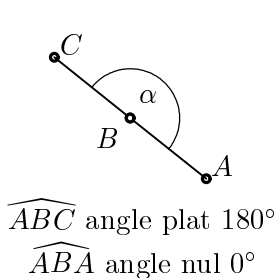
Euclide 23
sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongée de part et d'autre ne se rencontrent jamais.



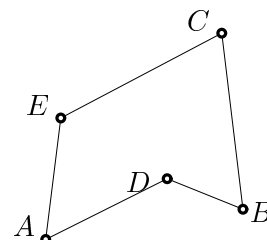
Un **angle** $\alpha = \widehat{ABC}$



angle droit 90°



\widehat{ABC} angle plat 180°
 \widehat{ABA} angle nul 0°



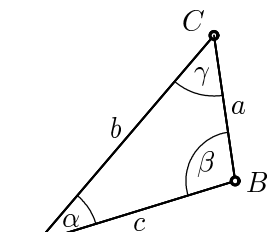
Un **polygone** ADBCE

Euclide 8/9
est l'inclinaison de deux droites se touchant et non alignées.

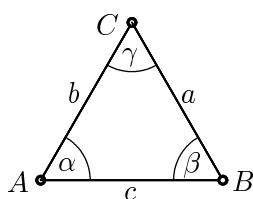
Euclide 10
Quand une droite élevée sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux.

!! Euclide ne considère pas les angles nuls ou plats comme des angles!!

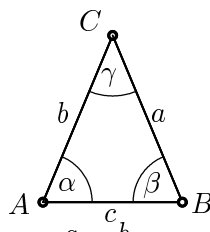
Euclide 19
est une figure multilatère et plane contenue par des droites.



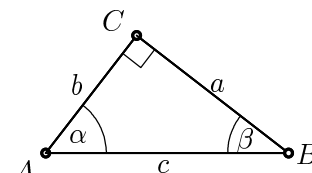
Un **triangle**



$a = b = c$
triangle **équilatéral**



$a = b$
triangle **isocèle**



$\gamma = 90^\circ$
triangle **rectangle**

¹L'ensemble des définitions, postulats, axiomes et propositions du premier volume des éléments se trouve en appendice.

Faisons quelques remarques sur les définitions. Tout d'abord pour les Grecs les surfaces, les droites ou les points sont des objets de nature différente. C'est pour cela qu'Euclide donne la définition 3 où il dit que les extrémités d'une ligne sont des points. Dans la vision moderne, sans définir l'essence de ce qu'est un point (on pourrait dire que c'est une manière idéale de décrire exactement un endroit de l'espace, mais ceci n'est pas satisfaisant), on dit que l'espace est l'ensemble des points qui le forment. Et que tout objet géométrique est un sous-ensemble de points de l'espace. Revenons à la définition du point chez Euclide, elle ne donne pas de définition essentielle de ce qu'est un point, mais se rapproche de la vision moderne dans le sens qu'un point de l'espace décrit un sous-ensemble de l'espace à un seul élément. Inversement tout sous-ensemble de l'espace à un seul élément contient exactement un point (mathématiquement on pourrait dire que les points de l'espace sont en bijection avec les ensembles à un élément de l'espace). Ainsi il n'est pas possible de partitionner un ensemble à un élément en deux sous-ensembles non vides et plus petits. Ce qui se rapproche bien de la définition d'Euclide. Le terme grec employé dans la définition de la droite pour dire qui est "...placée de manière égale par rapport..." est un terme employé en politique ou en droit qui désigne une égalité de statut, d'un jugement droit, impartial. C'est donc cette idée de rectitude qu'essaie de donner Euclide. Pour notre part, nous allons garder pour l'instant notre image mentale de la droite. Ce que nous allons préciser, ce sont les propriétés des droites. Une dernière remarque; nous avons vu à la définition 3 qu'Euclide parle des limites ou extrémités d'une ligne ou d'une droite, ceci nous indique qu'Euclide décrit là des segments de droites. Ainsi Euclide emploie le même terme pour segment de droite ou pour la droite elle-même. Nous différencierons ces deux concepts en notant un segment allant de A à B par $[A, B]$, alors que la droite passant par A et B , se notera AB . Souvent d'ailleurs les droites seront désignées par des lettres minuscules alors que les majuscules décriront des points. Après avoir défini les objets avec lesquels il travaille, Euclide va se donner des règles, les axiomes (ou notions communes) et les postulats. La différence entre ces deux types de règles est la suivante. L'axiome est une règle que toute personne sensée ne peut qu'accepter, il est valable dans tous les contextes possibles, alors que le postulat définit des règles associées aux objets spécifiques. On pourrait dire que les postulats sont les règles du jeu auquel on va jouer.

3.1 Axiomes (Notions communes)

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.
3. Si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont inégaux.
5. Les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Les moitiés du même sont égales entre elles.
7. Des choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Le tout est plus grand que la partie.

Les axiomes 1 à 6 peuvent être comparés aux règles que vous employez pour résoudre des équations. Mais attention, le septième axiome nous indique ce qu'Euclide entend par choses égales. Dans le cas où ces choses sont des segments de droites, Euclide dit que deux segments sont égaux si en les superposant, ils s'ajustent l'un sur l'autre. Pour nous, cela revient à demander que les deux segments aient la même longueur. Cette idée de longueur d'un segment, qui existait certainement dans la pratique, n'est jamais employée explicitement au

niveau théorique. Cela est dû au fait que, pour les Grecs, les seuls nombres acceptables sont les nombres rationnels, les fractions. Ainsi certains segments n'ont pas de longueur puisque le nombre qu'on devrait leur associer n'est pas rationnel (par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$). Il faudra attendre longtemps la construction des nombres réels pour que cette identification puisse se faire "sans problème".

Pour notre part nous dirons que deux segments sont **isométriques** ou **ont la même longueur** plutôt que de dire qu'ils sont égaux. On le note $[A, B] \equiv [C, D]$, ou pour alléger la notation, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

La dernière demande "le tout est plus grand que la partie" qui permet de comparer des segments et des angles, amène à des problèmes conceptuels profonds quand les objets étudiés sont des ensembles infinis. Une des difficultés étant de décrire précisément la notion de "plus grand". Passons maintenant aux postulats, c'est-à-dire aux règles qu'Euclide se donne spécifiquement pour la géométrie.

3.2 Postulats (demandes)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger indéfiniment en une ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

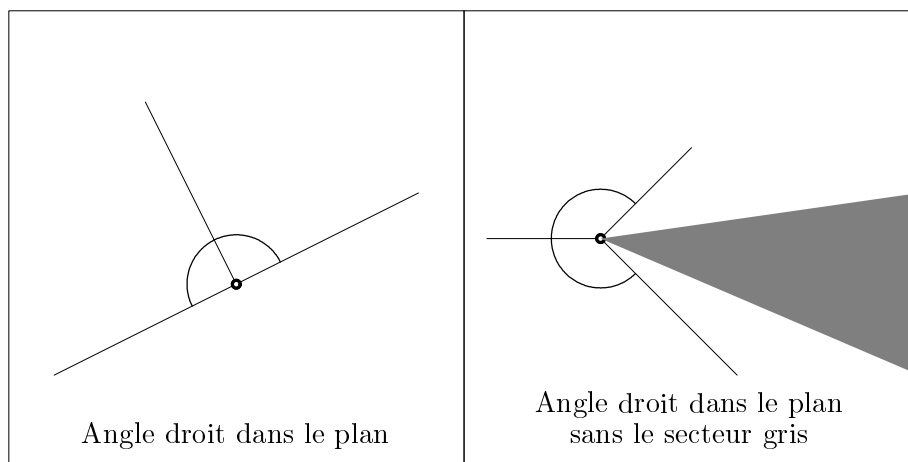
Remarques. Les premiers trois postulats établissent les constructions par *règle* (post. 1 et 2) et *compas* (post. 3); le postulat 4 définit l'angle droit comme mesure universelle pour les angles; et le postulat 5 est le célèbre *postulat des parallèles*, qui a fait couler plus d'encre pendant des siècles que tous les autres réunis. Le premier postulat nous donne l'existence et l'unicité du segment de droite allant d'un point A à un point B (ou de la droite passant par ces deux points). Le deuxième permet de prolonger un segment en une unique droite. Le troisième donne l'existence de cercles de n'importe quel rayon centré en n'importe quel point. Remarquons qu'Euclide ne postule qu'implicitement le fait que l'intersection de deux droites est un point. La seule mention explicite d'un point d'intersection (deux droites se rencontrent) se trouvent dans le cinquième postulat. De même il n'y a aucun postulat décrivant l'intersection de deux cercles comme deux points ou l'ensemble vide. Cependant Euclide va évidemment utiliser ces postulats implicites.

Par contre si on suppose que deux droites distinctes se coupent, alors on peut démontrer que leur intersection est réduite à un point. Donnons une preuve de ceci. Elle nous permet d'introduire une méthode appelée la *contraposée*. Montrer qu'une hypothèse implique une conclusion est équivalent à montrer que la négation de la conclusion implique la négation de l'hypothèse. Dans notre cas, l'hypothèse est "deux droites distinctes se coupent" et la conclusion "l'intersection de ces deux droites est réduite à un point". La négation de la conclusion est donc l'intersection est soit vide, soit contient au moins deux points distincts et la négation de l'hypothèse est que soit les droites ne se coupent pas, soient elles ne sont pas distinctes.

Supposons donc que l'intersection soit vide, alors évidemment les droites ne se coupent pas. Si l'intersection contient au moins deux points distincts A et B , alors par le premier postulat, le

segment $[A, B]$ est unique et il est donc contenu dans les deux droites de départ. Le deuxième postulat nous dit que tout segment se prolonge indéfiniment de manière unique, ainsi la droite qui contient le segment $[A, B]$ est unique. Ceci démontre bien que les deux droites ne sont pas distinctes.

Le quatrième postulat dit que tous les angles droits sont égaux entre eux. Cela peut sembler évident, mais réfléchissons à la situation suivante. Pour l'instant nous n'avons pas vraiment défini formellement ce qu'est une droite. On pourrait par exemple dire que le segment $[A, B]$ est la courbe allant de A à B de longueur minimale. De plus Euclide définit l'angle droit comme l'angle obtenu quand on élève une droite sur une autre de telle manière que les deux angles obtenus soient égaux. Si nous supposons que nous employons un plan dont une partie nous est interdite, voyons comment la notion de droite en est affectée et, ce faisant, comment la notion d'angle droit change.



Le cinquième postulat donne une condition pour que deux droites se coupent. Il s'agit du cinquième postulat des parallèles. Pendant plusieurs siècles les mathématiciens ont essayé de démontrer ce postulat à l'aide des autres, mais à chaque fois, soit la preuve était fausse, soit l'auteur ajoutait une hypothèse qui se révélait équivalente au cinquième postulat. Voici un exemple d'énoncé équivalent, appelé :

Axiome de Playfair

Pour tout point hors d'une droite, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la droite donnée.

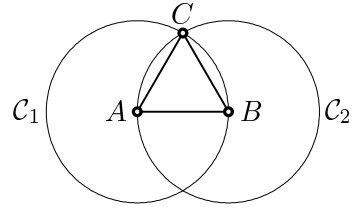
Nous reviendrons sur le cinquième postulat plus tard. Euclide commence à démontrer des résultats de la géométrie classique.

3.3 Les Propositions du premier livre des éléments.

La première proposition démontre qu'un triangle équilatéral existe. En fait Euclide montre l'existence d'un objet par la possibilité de le construire. Il est à noter que les triangles sont l'outil de base qu'Euclide emploie dans les démonstrations.

Proposition 3.3.1. *(Euclide I.1) Sur une droite AB donnée et finie, construire un triangle équilatéral.*

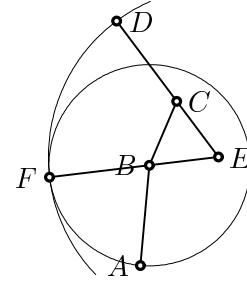
La *construction* se fait par un cercle C_1 centré en A passant par B (Post. 3) et un cercle C_2 centré en B passant par A (Post. 3). Le point d'intersection C est ensuite relié à A et à B (Post. 1). Ainsi $[A, C] \equiv [A, B]$ et $[B, C] \equiv [A, B]$, donc par le premier axiome, $[A, C] \equiv [B, C]$. Le triangle est équilatéral. Cqfd.



On a vu que le troisième postulat permet de décrire un cercle de rayon quelconque de centre quelconque. La deuxième proposition nous permet de mieux comprendre une restriction mentale qu'Euclide émet dans le troisième postulat. En fait Euclide permet de choisir le centre d'un cercle et ensuite de choisir un intervalle dont une des extrémités est le centre. Il s'agit en fait de décrire l'action de planter la pointe du compas et ensuite de choisir l'écartement du compas en posant la deuxième pointe sur un point donné. Mais à priori, on ne peut pas choisir l'écartement d'abord. En fait, on le fait souvent pour reporter une distance, mais Euclide n'a pas supposé cela. Il va démontrer que le report d'une distance est possible.

Proposition 3.3.2. (Euclide I.2) *Etant donné un segment $[A, B]$ et un point C , construire un point D tel que les segments $[A, B]$ et $[C, D]$ soient isométriques.*

Tout d'abord, on construit un triangle équilatéral $\triangle BCE$ sur $[B, C]$ (Prop. 1), on prolonge les droites EB et EC (Post. 2), on trace le cercle en B passant par A (Post. 3) pour trouver le point F sur la droite EB prolongée. Puis on trace le cercle en E passant par F (Post. 3). L'intersection D de ce cercle avec la droite EC prolongée est le point cherché. En effet la distance \overline{AB} est égale à la distance \overline{BF} . D'autre part, comme les distances \overline{BC} , \overline{BE} et \overline{EC} sont égales et que les distances \overline{EF} et \overline{ED} le sont aussi, on déduit que \overline{AB} et \overline{CD} sont égales puisque les points E, B et F sont alignés ainsi que les points E, C et D . Cqfd



Un outil qu'Euclide va employer énormément, est la comparaison de triangles. Pour cela il faut trouver des conditions qui permettent de dire quand deux triangles sont isométriques. Définissons tout d'abord la notion d'isométrie de deux triangles.

Définition 3.3.3. On dit que les deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont isométriques si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$[A, B] \equiv [A', B'], \quad [A, C] \equiv [A', C'], \quad [B, C] \equiv [B', C']$$

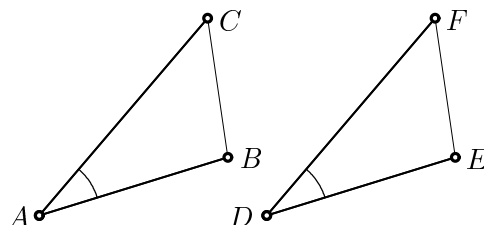
$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}, \quad \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}, \quad \widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$$

Juste une remarque concernant l'isométrie d'angle. Pour Euclide, il s'agit de superposabilité, il n'associe pas à un angle un nombre qui serait sa mesure. Mais ce problème est similaire à l'isométrie entre segments et nous comparerons les angles par leur mesure.

La définition d'isométrie entre triangles oblige à contrôler six conditions. Peut-on en contrôler moins et être néanmoins certain d'avoir l'isométrie entre triangles? Une réponse positive à cette question permet de démontrer que certains angles ou certains segments sont isométriques. C'est un premier résultat de ce type qu'Euclide démontre à la proposition 4. Mais avant de la démontrer nous allons en fait donner trois cas d'isométries de triangles (auss appelé dans les livres cas d'égalité de triangles).

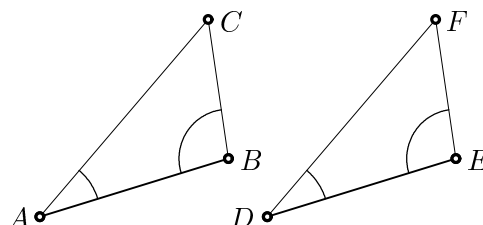
Proposition 3.3.4. (Euclide I.4) *Le premier cas d'égalité de triangles : côté angle côté (CAC)*

$$\begin{aligned} [A, B] &\equiv [D, E] \\ [A, C] &\equiv [D, F] \\ \widehat{CAB} &\equiv \widehat{FDE}, \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{les triangles} \\ \Delta ABC \text{ et } \Delta DEF \\ \text{sont isométriques} \end{array}$$



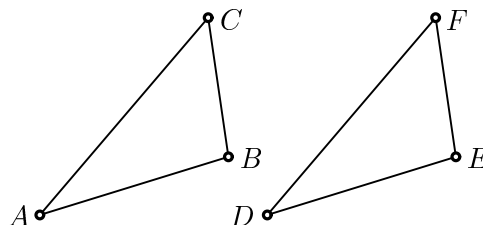
Proposition 3.3.5. (Euclide I.26) *Le deuxième cas d'égalité de triangles angle côté angle (ACA)*

$$\begin{aligned} [A, B] &\equiv [D, E] \\ \widehat{CBA} &\equiv \widehat{FED} \\ \widehat{CAB} &\equiv \widehat{FDE} \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{les triangles} \\ \Delta ABC \text{ et } \Delta DEF \\ \text{sont isométriques} \end{array}$$



Proposition 3.3.6. (Euclide I.7, I.8 et I.22) *Le troisième cas d'égalité de triangles côté côté côté (CCC)*

$$\begin{aligned} [A, B] &\equiv [D, E] \\ [A, C] &\equiv [D, F] \\ [B, C] &\equiv [E, F] \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{les triangles} \\ \Delta ABC \text{ et } \Delta DEF \\ \text{sont isométriques} \end{array}$$

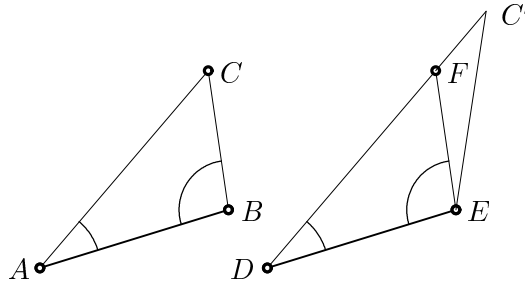


Démonstration. Regardons la preuve d'Euclide de la proposition 4. Superposons le triangle ΔABC sur le triangle ΔDEF en posant A sur D et $[A, B]$ sur $[D, E]$. Comme les angles \widehat{BAC} et \widehat{EDF} sont isométriques, les droites AC et DF sont superposées. Comme de plus les segments $[A, C]$ et $[D, F]$ sont isométriques, les points C et F sont donc aussi superposés. On a aussi B et E superposés, par unicité du segment reliant deux points les segments $[B, C]$ et $[E, F]$ sont donc superposés. Cqfd

Euclide nous arnaque ici puisqu'il ne peut pas justifier par ses postulats et axiomes le fait de superposer les triangles, ni que cette opération préserve bien les distances. Plusieurs auteurs vont critiquer cette preuve.

Hilbert, dans son axiomatisation de la géométrie, posera cela comme un autre postulat. Nous ferons de même. Démontrons le deuxième cas d'égalité (ACA).

Démonstration. Par le deuxième postulat, on prolonge le segment $[D, F]$. Et on construit C' sur DF tel que $[AC] \equiv [DC']$ (en prenant l'intersection de DF avec un cercle de rayon isométriques à $[A, C]$ centré en D possible par la proposition 2.



Par (CAC) les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle DEC'$ sont isométriques. Et donc $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEC'}$. Comme par hypothèse, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$, on a par le premier axiome que $\widehat{DEF} \equiv \widehat{DEC'}$. Ce qui implique que E, F et C' sont alignés. Comme F et C' sont à la fois sur les droites DF et EF , ils sont confondus et donc les triangles $\triangle DEC'$ et $\triangle DEF$ sont confondus. Comme par construction, $\triangle ABC$ et $\triangle DEC'$ sont isométriques, on a bien $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Cqfd

Cette preuve n'est pas la preuve originale d'Euclide.

Pour démontrer le troisième cas d'égalité (CCC), Euclide va utiliser la notion de triangle isocèle. Pour cela il va énoncer et démontrer deux propositions (4 et 5).

Proposition 3.3.7. (Euclide I.5) Si dans un triangle $[A, C] \equiv [B, C]$, alors $\alpha \equiv \beta$.

Voilà une preuve due à Proclus, qui est très astucieuse.

Démonstration.

Comme $[A, C]$ et $[B, C]$ sont isométriques et l'angle γ est commun, les triangles $\triangle ACB$ et $\triangle BCA$ sont isométriques et donc les angles correspondants le sont aussi :

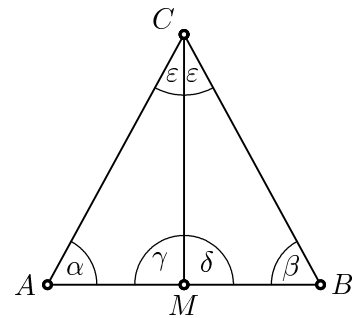
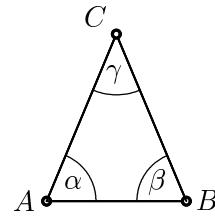
$$\alpha = \widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA} = \beta. \quad \text{Cqfd}$$

Il est clair que cette preuve, par sa simplicité même, ne passe en général pas auprès des élèves, car on emploie (CAC) sur un seul triangle semble-t-il.

Voici une preuve qui passe beaucoup mieux. Et qui me permettra de rappeler certaines définitions.

Démonstration. Soit CM la bissectrice de l'angle \widehat{ACB} (i.e. la demi-droite qui coupe un angle en deux parties égales), on a donc que les angles \widehat{ACM} et \widehat{BCM} sont isométriques. Par hypothèse, $[A, C] \equiv [B, C]$ et $[C, M]$ est commun aux deux triangles $\triangle ACM$ et $\triangle BCM$ qui sont, par (CAC), isométriques. On en déduit $\alpha = \widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA} = \beta$, cqfd

On déduit aussi que $\gamma \equiv \delta = \square$ et $[A, M] \equiv [M, B]$. Ce qui permet de démontrer que le segment $[C, M]$, qui est à la fois la partie de la bissectrice contenue dans le triangle $\triangle ABC$, est aussi la *médiane* partant de C (i.e. le segment partant du sommet C d'un triangle et arrivant au milieu du segment opposé), la *hauteur* issue de C (i.e. la perpendiculaire abaissée de C sur la droite AB) et la partie de la médiatrice du segment $[A, B]$ contenue dans le triangle $\triangle ABC$ (la *médiatrice* de $[A, B]$ étant la droite perpendiculaire au segment $[A, B]$ passant par son milieu).

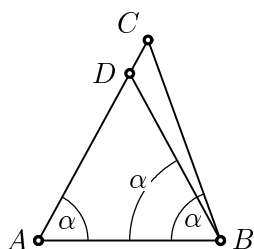


Cette preuve donne plus d'informations, mais d'autre part, supposer l'existence de la bissectrice est délicat, car pour Euclide, l'existence d'un objet se démontre par l'existence d'un algorithme pour le construire. Or dans le cas de la bissectrice, il faut par exemple CCC pour justifier sa construction. Revenons à Euclide. La proposition 6 est la réciproque de la proposition 5. Il est important de se souvenir qu'une implication n'est pas une équivalence. Ainsi la réciproque d'une implication n'est pas toujours vérifiée et demande une preuve pour elle-même.

Proposition 3.3.8. (Euclide I.6) Si dans un triangle $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$, alors $[A, C] \equiv [B, C]$.

Euclide va utiliser pour la première fois une démonstration par *l'absurde*. On suppose que la conclusion est fautive et on déduit une contradiction avec l'hypothèse. Ceci permet d'affirmer que la conclusion est vraie.

Démonstration On a l'hypothèse que $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$ et on suppose de plus que $[A, C]$ et $[B, C]$ ne sont pas isométriques. Alors soit $\overline{AC} > \overline{BC}$ soit $\overline{AC} < \overline{BC}$.



Regardons le cas $\overline{AC} > \overline{BC}$. Ce qui implique qu'il existe un point D distinct de A et C dans le segment $[A, C]$ tel que $\overline{AD} = \overline{BC}$, ceci implique que $\widehat{DBA} < \widehat{CBA}$. Comme par hypothèse $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$, par (CAC) les triangles $\triangle DAB$ et $\triangle CBA$ sont isométriques. On a donc

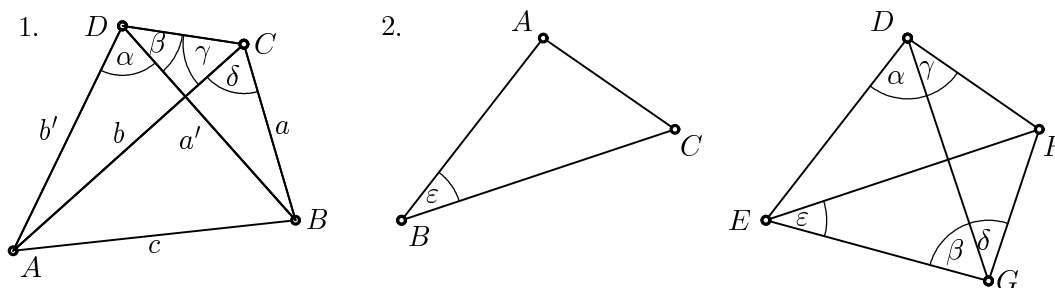
$$\widehat{CAB} \equiv \widehat{DBA} < \widehat{CBA} \equiv \widehat{CAB}.$$

Ceci est contradictoire. L'autre cas se traite symétriquement. Cqfd
Une autre preuve directe est d'employer (ACA) pour les triangles $\triangle CAB$ et $\triangle CBA$.

Démontrons le troisième cas d'égalité des triangles (CCC). Euclide le démontre en deux temps, tout d'abord en supposant que les deux triangles ont leur base confondue.

Proposition 3.3.9. (Euclide I.7) Si deux triangles sont érigés sur la même base AB et du même côté de celle-là avec $a = a'$ et $b = b'$, alors $C = D$.

Preuve d'Euclide de la proposition I.7 : Supposons $C \neq D$ Comme DAC est isocèle par



hypothèse, $\alpha + \beta \equiv \gamma$ (Prop. 5). Comme DBC est isocèle, $\beta \equiv \gamma + \delta$ (Prop. 5). Donc une fois $\gamma > \beta$, et une fois $\gamma < \beta$, ce qui est impossible. Cqfd

Proposition 3.3.10. (Euclide I.8) Si deux triangles ABC et DEF ont les mêmes côtés, ils ont aussi les mêmes angles.

Démonstration Reportons l'angle $\varepsilon = \widehat{ABC}$ sur le segment $[E, F]$ dans le demi-plan ne contenant pas D et prenons le point G sur la demi-droite définie par cet angle de telle sorte de $[A, B] \equiv [E, G]$. Par CAC, les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle GEF$ sont isométriques, ce qui implique que $[A, C] \equiv [G, F]$. Des hypothèses $[A, C] \equiv [D, F]$ et $[A, B] \equiv [E, D]$, on déduit que les triangles $\triangle DEG$ et $\triangle DGF$ sont isocèles, ce qui implique par la prop. 5 que $\alpha \equiv \beta$ et $\gamma \equiv \delta$.

$$\text{Donc } \widehat{BAC} \equiv \widehat{EGF} = \beta + \delta = \alpha + \gamma = \widehat{EDF}.$$

On conclut en employant CAC (prop. 4). Cqfd

Attention, ai-je triché comme Euclide? Oui, car pour démontrer le report d'angle, on emploie (CCC).

Voilà un exemple d'une erreur assez fréquente dans les preuves. On démontre un résultat A en supposant un résultat B connu, puis quand on démontre B, on emploie le résultat A. Ceci amène à un cercle vicieux logique.

Dans son axiomatisation de la géométrie, Hilbert pose comme axiome le report d'angle.

Euclide, pour démontrer la proposition I.8, emploie à nouveau le déplacement d'un triangle sur l'autre (c'est aussi ce qu'on fait d'ailleurs). Dans la proposition I.26, Euclide démontre encore un cas d'égalité où on connaît deux angles et un côté, l'un des angles étant adjacent au côté, l'autre étant opposé, on le notera (AAC).

Il est facile de se convaincre (voir ci-dessous) que connaître deux côtés et un angle (CCA) n'est pas suffisant pour définir uniquement un triangle.

En résumé voila les cas d'égalité des triangles possibles :

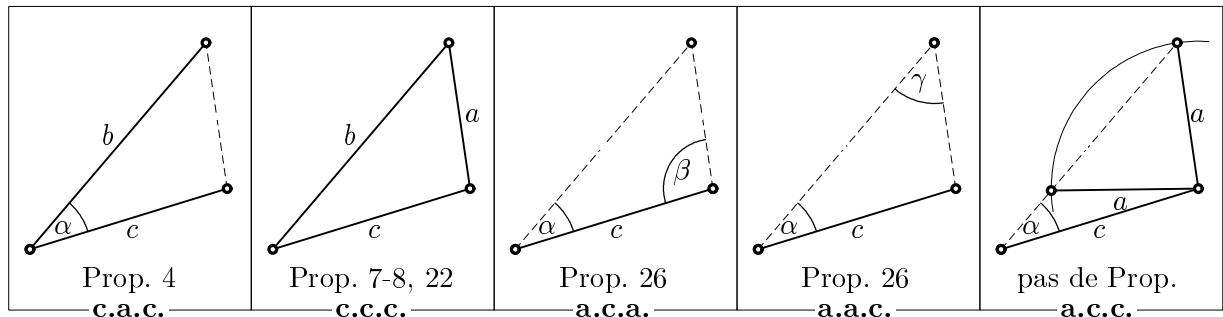


Figure 3.3.a: Cas d'égalités des triangles

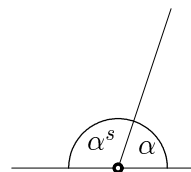
Question : Si on ne connaît pas la position respective des angles et côtés, est-ce que l'on peut trouver deux triangles ayant trois angles isométriques et deux côtés isométriques sans pour autant être eux-mêmes isométriques?

Dans les propositions I.9 à I.12, Euclide donne des constructions explicites de la bissectrice d'un angle, du milieu d'un segment, de la perpendiculaire à une droite passant par un point sur ou hors de la droite donnée. Ces constructions et preuves se feront en exercices.

Les propositions I.13 à I.16 donnent des propriétés des angles. Avant d'aller plus loin rappelons la définition suivante:

Définition 3.3.11. Deux angles α et β sont **supplémentaires** s'ils ont un côté commun et si le deuxième est dans le prolongement de l'autre.

Mais pour définir le supplémentaire de cette manière, il faut être sûr que chaque angle à un unique supplémentaire, c'est pour cela qu'Euclide prouve :



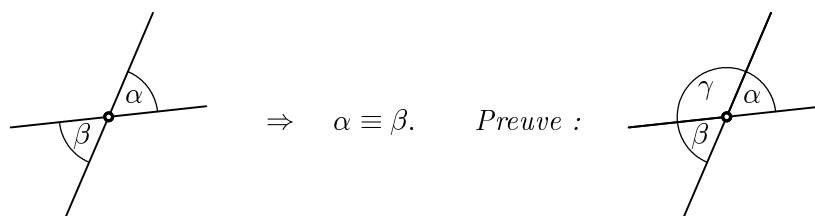
Proposition 3.3.12. (Euclide I.13) Si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produira deux angles soit droits, soit égaux à deux droits.

Ceci permet de démontrer l'unicité de l'angle supplémentaire. En effet supposons que l'on ait deux supplémentaires β et γ de l'angle α . Par la proposition I.13, $\alpha + \gamma \equiv 2\text{D} \equiv \alpha + \beta$ et donc en soustrayant l'angle α de chaque côté, on obtient $\beta \equiv \gamma$. La proposition 14 est la réciproque de la proposition I.13.

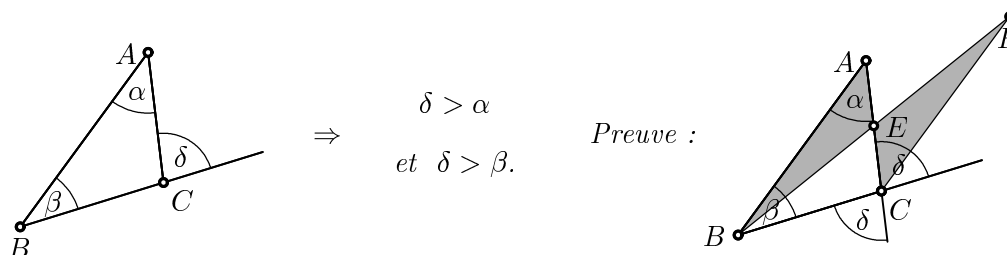
Proposition 3.3.13. (Euclide I.14) Si, relativement à une certaine droite, et en un point situé sur elle, deux droites non placées du même côté, font des angles adjacents égaux à deux droits, les droites seront en alignement l'une avec l'autre.

Pour démontrer la réciproque, Euclide doit pour la première fois utiliser le quatrième postulat. Grâce à l'angle supplémentaire, Euclide va pouvoir démontrer une des premières observations de Thales, C'est la

Proposition 3.3.14. (Euclide I.15) Si deux droites se coupent l'une l'autre, les angles opposés au sommet sont isométriques.



Proposition 3.3.15. (Euclide I.16 : Théorème de l'angle externe) Si on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur δ satisfait



Soit E le point milieu de AC (Prop. I.10), on prolonge BE (Post. 2), et grâce au cercle centré en B de rayon BE , on obtient F comme intersection de BE avec ce cercle (Post. 3). Les angles gris en E sont isométriques (Prop. I.15), ainsi les deux triangles en gris $\triangle EAB$ et

$\triangle ECF$ sont isométriques (Prop. I.4 CAC). Donc l'angle $\widehat{ECF} \equiv \alpha$ et est plus petit que δ (Axiome 8). Pour la deuxième inégalité, on procède similairement avec l'angle opposé à δ en C (Prop. I.15). Cqfd

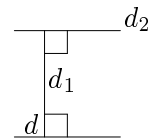
Remarquons que le théorème de l'angle externe, dont la preuve ne fait pas appel au cinquième postulat, permet de démontrer l'existence de droites parallèles, de la manière suivante.

Corollaire 3.3.16. *Sur d construire une droite perpendiculaire d_1 et sur un point de d_1 hors de d construire une perpendiculaire d_2 à d_1 , alors d et d_2 sont parallèles.*

Démonstration

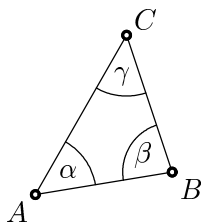
Supposons par l'absurde que d et d_2 se coupent, ceci contredit le théorème de l'angle externe pour le triangle formé par les trois points d'intersection des droites d , d_1 et d_2 . Cqfd

Ceci permet de justifier par exemple le fait que deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

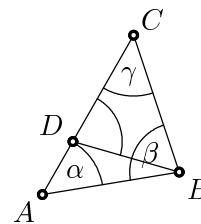


Jusqu'à présent, Euclide compare les angles avec les angles et les distances avec les distances, mais dans les propositions suivantes, Euclide va exhiber les relations qui existent dans un triangle entre les angles et les côtés.

Proposition 3.3.17. (Euclide I.18) *Dans tout triangle, le côté le plus grand est opposé à l'angle le plus grand.*



$$[B, C] < [A, C] \Rightarrow \alpha < \beta \quad \text{Preuve:}$$

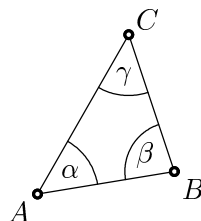


Comme par hypothèse, $[B, C] < [A, C]$, il existe sur $[A, C]$ un point D tel que $[D, C] \equiv [B, C]$. Ce qui implique que le triangle $\triangle BCD$ est isocèle. Donc par la proposition 3.3.7 $\widehat{CDB} \equiv \widehat{DBC}$. Par ax.8, $\widehat{CBD} < \widehat{ABC}$. Par le théorème de l'angle externe appliqué au triangle $\triangle ADB$, on a

$$\alpha = \widehat{BAC} < \widehat{BDC} \equiv \widehat{DBC} < \widehat{ABC} \equiv \beta. \quad \text{Cqfd}$$

La proposition 3.3.18 est la réciproque de la 3.3.17.

Proposition 3.3.18. (Euclide I.19) *Dans tout triangle, l'angle le plus grand est opposé au côté le plus grand.*



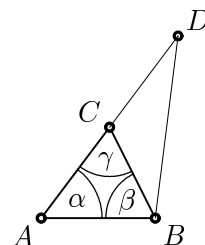
$$\alpha > \beta \Rightarrow [B, C] > [A, C]$$

La proposition 3.3.18 permet à Euclide de démontrer ce que l'on appelle :

Proposition 3.3.19. (Euclide I.20 : l'inégalité du triangle) Dans tout triangle la somme des longueurs de deux côtés est plus grande que la longueur du troisième.

Démonstration

Le seul cas où il y a quelque chose à prouver est le suivant : $[A, B] > [A, C]$ et $[A, B] > [B, C]$. Sinon l'inégalité triangulaire est évidente. Par le postulat 2, on prolonge le segment $[A, C]$ en une droite et on pose le point D sur AC tel que $[C, D] \equiv [B, C]$ et C entre A et D . Le triangle $\triangle BCD$ est isocèle, ce qui implique (prop.5) que $\widehat{CDB} \equiv \widehat{CBD}$. Comme de plus $\widehat{ABD} > \widehat{CBD} \equiv \widehat{CDB}$, par la proposition 3.3.18 appliquée au triangle $\triangle ABD$, on a



$$[A, B] < [A, D] \equiv [A, C] + [C, D].$$

Cqfd

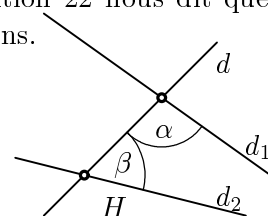
Exercice. (proposition I.21) Pour tout point D à l'intérieur d'un triangle $\triangle ABC$, la somme des longueurs des segments $[A, D]$ et $[B, D]$ est plus petite que la somme des longueurs des segments $[A, C]$ et $[B, C]$.

La démonstration est laissée en exercice.

Dans les cas d'égalité des triangles, Euclide donne des conditions nécessaires pour que deux triangles soient isométriques. On remarque que pour (CAC) et (ACA), ces conditions sont aussi suffisantes, c'est à dire que la donnée de deux côtés et l'angle compris entre les deux (resp. deux angles et un côté) permet de construire uniquement un triangle. Dans le cas de (CCC) par contre, la proposition I.8 montre que si deux triangles ont trois côtés isométriques, alors ils sont isométriques. Mais la donnée de trois longueurs a, b et c ne garantit pas qu'il existe un triangle dont les côtés ont ces longueurs prescrites. Les inégalités triangulaires donnent des conditions pour que ce triangle existe. Et la proposition 22 nous dit que ces inégalités $a + b \geq c$, $a + c \geq b$ et $c + b \geq a$ sont les seules obstructions.

Pour l'instant, Euclide n'a pas encore utilisé le cinquième postulat.

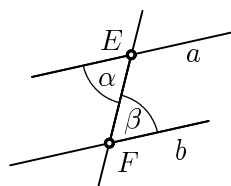
Grâce au théorème de l'angle externe, pour α, β et γ , les trois angles d'un triangle, nous avons déjà vu des relations entre α, β et γ^s , mais pour être plus précis, il faut introduire le cinquième postulat.



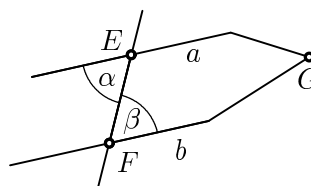
Le postulat des parallèles : Si une droite d tombant sur deux droites d_1 et d_2 fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

Intéressons-nous aux propositions I.27 et I.29 d'Euclide. L'une étant la réciproque de l'autre, elles forment ensemble ce qu'on appelle le **théorème des angles alternes-internes**.

Théorème 3.3.20. (Euclide I.27 I29) Soit d une droite coupant deux autres droites d_1 et d_2 , $\alpha \equiv \beta$ si et seulement si d_1 et d_2 sont parallèles.



Démonstration :



Les angles α et β sont appelés angles alternes-internes. La **proposition I.27** d'Euclide est l'implication supposant l'égalité des angles α et β et démontrant le parallélisme des droites d_1 et d_2 .

Démonstration Par contraposée, supposons que d_1 et d_2 se coupent en un point G du côté de l'angle, alors par le théorème de l'angle externe $\alpha > \beta$. Cqfd

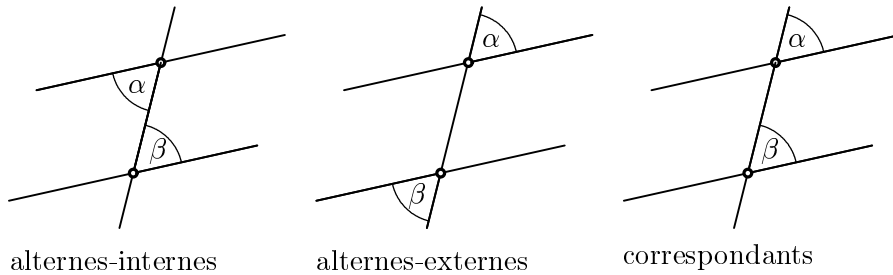
La **proposition I.29**, qui est la réciproque de la proposition 27, suppose le parallélisme des droites et démontre l'isométrie des angles. Pour démontrer cela, Euclide utilise pour la première fois le postulat des parallèles.

Démonstration Par contraposée, supposons que $\alpha > \beta$ (on traite le cas $\alpha < \beta$ similairement). Par définition de l'angle supplémentaire.

$$2\text{□} = \alpha + \alpha^s > \beta + \alpha^s.$$

Ce qui implique par le cinquième postulat que les droites se coupent. Cqfd

Remarquons qu'avec le théorème des angles alternes-internes et le fait que deux angles opposés par un sommet soient égaux, on peut donner des conditions de parallélisme avec d'autres paires d'angles; par exemple des angles correspondants ou des angles alternes-externes.



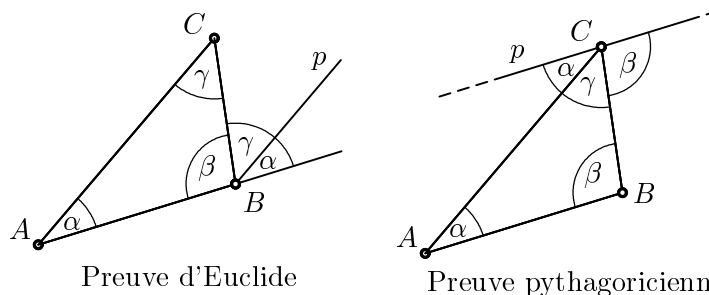
Ce théorème des angles alternes-internes a beaucoup de corollaires. Euclide en donne deux aux propositions I.30 et I.32.

Proposition 3.3.21. (Euclide I.30) Si d_1 est parallèle à d_2 et si d_2 est parallèle à d_3 , alors d_1 est parallèle à d_3 .

La preuve de cette proposition est facile et laissée au lecteur.

Proposition 3.3.22. (Euclide I.32) La somme des angles d'un triangle est égale à deux □.

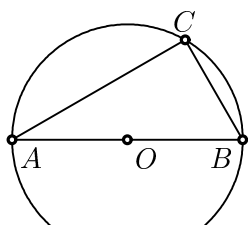
En voici deux preuves graphiques.



Tirer une droite p par un sommet du triangle et parallèle au côté opposé et rapporter les angles parallèles.

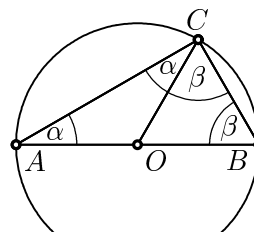
Une des conséquences les plus connues de ce résultat est le **cercle de Thales**.

Corollaire 3.3.23. *Un triangle $\triangle ABC$ inscrit dans un cercle \mathcal{C} dont $[A, B]$ est un diamètre, est un triangle rectangle.*



$$O \in [A, B] \Rightarrow \widehat{ACB} \equiv \square$$

Démonstration
 $2\alpha + 2\beta \equiv 2\square$
 $\Rightarrow \alpha + \beta \equiv \square$
 Cqfd

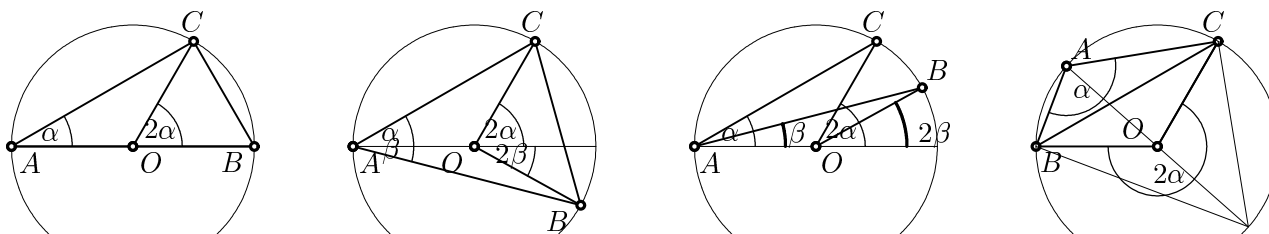


Question : Est-ce que la réciproque du cercle de Thalès est vraie?

On voit aussi, dans le cercle de Thalès, que l'angle \widehat{COB} est isométrique à deux α . En effet la preuve d'Euclide du fait que la somme des angles d'un triangle vaut $2\square$ montre explicitement que le supplémentaire d'un des angles du triangle vaut la somme des deux autres. Cette observation montre que le cercle de Thalès est un cas particulier du résultat plus général suivant.

Théorème 3.3.24. (Théorème de l'angle au centre) *Soient $A, B,$ et C trois points sur un cercle \mathcal{C} centré en $O,$ alors $2\widehat{BAC} \equiv \widehat{BOC}.$*

Démonstration Si le segment $[A, B]$ est le diamètre du cercle on est dans le cas du cercle de Thalès. Voyons les autres cas possibles



Si A et O sont du même côté de BC et que le segment $[B, C]$ coupe la droite $AO,$ alors en additionnant les angles α et $\beta,$ on obtient le résultat. Si A et O sont du même côté de $BC,$ mais que le segment $[B, C]$ ne coupe pas la droite $AO,$ le résultat est obtenu en soustrayant les angles. Si A et O sont séparés par $BC,$ alors le point antipodal de A est du même côté que O et on conclut par un argument d'angles supplémentaires. Cqfd

Un corollaire intéressant de ce résultat est que de quelque endroit sur un cercle que l'on regarde une corde, l'angle de vision est constant. Plus précisément :

Corollaire 3.3.25. *Soit un cercle $\mathcal{C},$ A et B deux points sur \mathcal{C} et C et D deux points quelconques sur \mathcal{C} du même côté de $[A, B]$ alors $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}.$*

Démonstration $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AOB}/2 \equiv \widehat{ADB}.$ Cqfd

Dans le reste du premier livre des *Eléments,* Euclide décrit des égalités de surfaces. Heuristiquement, deux surfaces sont "égales" si elles sont superposables, c'est-à-dire, si en coupant

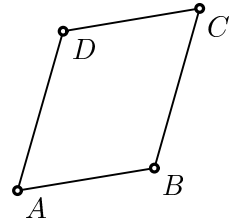
l'une en un nombre fini de morceaux on peut recouvrir l'autre exactement. Pour ceci, il va s'intéresser aux parallélogrammes. Mais avant de s'intéresser à cela, nous allons faire une petite digression sur les parallélogrammes et quelques droites remarquables des triangles.

Comme son nom l'indique, un **parallélogramme** est un quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles.

Remarquons qu'il y a bien d'autres définitions équivalentes du parallélogramme. Rappelons tout d'abord qu'un polygone est simple si son intérieur est connexe.

Proposition 3.3.26. *Soit $ABCD$ un quadrilatère, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $ABCD$ est simple et possède tous ses côtés opposés isométriques.
3. $ABCD$ est simple et possède deux côtés parallèles et isométriques.
4. Dans $ABCD$, les diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$ se coupent en leur milieu.

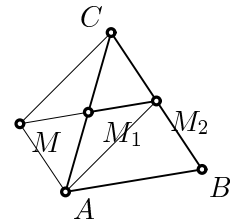


La démonstration de cette proposition est proposée comme exercice.

Ces diverses caractérisations permettent de déduire d'autres propriétés sur les triangles.

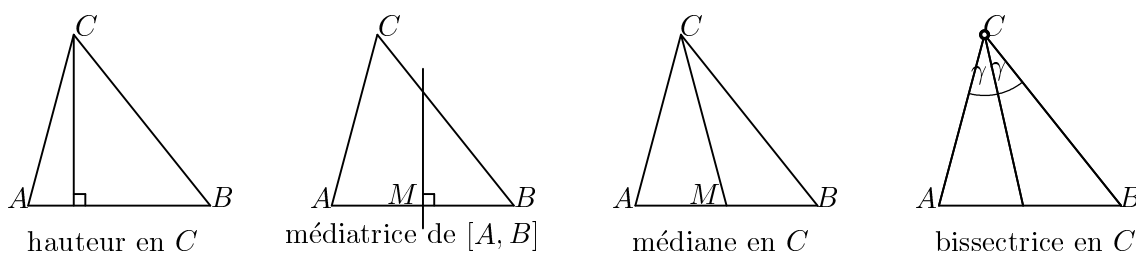
Corollaire 3.3.27. *(théorème du segment moyen) Dans un triangle ΔABC , la droite passant par les milieux des côtés $[A, C]$ et $[B, C]$ est parallèle au côté $[A, B]$.*

Démonstration Soient M_1 et M_2 les milieux de $[A, C]$ et $[B, C]$. Construire M sur M_1M_2 tel que $[M_1, M_2] \equiv [M_1, M]$. Comme $[M_2, M]$ et $[A, C]$ se coupent en leur milieu, le quadrilatère $AMCM_2$ est un parallélogramme, donc les segments $[A, M]$ et $[C, M_2]$ sont parallèles. Comme M_2 est le milieu de $[B, C]$, on a donc $[B, M_2] \equiv [C, M_2] \equiv [A, M]$. Ce qui implique que le quadrilatère AMM_2B est un parallélogramme. Donc AB est parallèle à M_1M_2 . Cqfd



Rappelons quelques **définitions**

1. La **médiatrice** du segment $[A, B]$ est la droite perpendiculaire à $[A, B]$ passant par son milieu. Par extension, les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices de ses côtés.
2. La **bissectrice** de l'angle \widehat{AOB} est la demi-droite r contenue dans le secteur défini par l'angle \widehat{AOB} qui sépare l'angle \widehat{AOB} en deux angles égaux (i.e. r est telle que les deux angles adjacents $\widehat{AO r}$ et \widehat{rOB} sont isométriques). Par extension les bissectrices d'un triangle sont les bissectrices de ses angles.
3. Dans un triangle ΔABC la **médiane** issue d'un sommet est le segment passant par le sommet et par le milieu du côté opposé.
4. Dans un triangle ΔABC la **hauteur** issue d'un sommet est le segment de droite allant du sommet au pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite supportant le côté opposé.



Juste une remarque évidente concernant la hauteur, il faut préciser "la droite supportant le côté opposé" au lieu de dire le côté opposé, car quand un triangle a un angle obtus (plus grand que \square) le pied de la perpendiculaire passant par le sommet de cet angle n'est pas contenu dans le côté opposé.

Remarquons que la médiatrice pourrait être définie autrement. En effet on a la propriété :

Proposition 3.3.28. *Pour un segment $[A, B]$, les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- d est la médiatrice de segment $[A, B]$.
- d est l'ensemble des points à égale distance de A et de B .

Démonstration Comme on veut démontrer que deux ensembles de points sont les mêmes, on va montrer que l'un est contenu dans l'autre et vice versa. On parle d'une preuve par double inclusion.

Soit P un point sur la médiatrice, et M le point milieu de $[A, B]$. Par définition de la médiatrice les angles \widehat{PMB} et \widehat{PMA} sont isométriques (ce sont des angles droits). Comme M est au milieu du segment $[A, B]$ et que $[M, P]$ est commun, par CAC, les deux triangles $\triangle AMP$ et $\triangle BMP$ sont isométriques et donc $[A, P] \equiv [B, P]$. P est bien dans l'ensemble des points équidistants à A et B .

Inversément, supposons que P soit à égale distance de A et de B . Alors, par CCC, les triangles $\triangle AMP$ et $\triangle BMP$ sont isométriques. Donc les angles sont tels que

$$\widehat{PMB} \equiv \widehat{PMA}, \quad \widehat{PMB} + \widehat{PMA} \equiv 2\square \Rightarrow \widehat{PMB} \equiv \widehat{PMA} \equiv \square.$$

La droite PM est donc perpendiculaire à $[A, B]$ passant par M , P appartient donc à la médiatrice. Cqfd

De cette propriété, on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.29. *Les trois médiatrices d'un triangle non dégénéré se coupent en un point.*

Démonstration Soit P le point d'intersection des médiatrices des deux côtés $[A, B]$ et $[A, C]$. Ce point existe, car un triangle non dégénéré a des côtés non parallèles. Et comme les médiatrices sont perpendiculaires aux côtés, elles ne sont pas parallèles entre elles. Il faut encore montrer que P est sur la médiatrice de $[B, C]$. Pour cela, il suffit de montrer que P est à égale distance de B et C . Or par hypothèse,

$$[A, P] \equiv [B, P] \text{ et } [A, P] \equiv [C, P] \Rightarrow [B, P] \equiv [C, P].$$

P est sur la médiatrice de $[B, C]$, ce qui implique bien que les trois médiatrices se coupent en un point. Cqfd

Définition 3.3.30. La distance d'un point P à une droite d est la longueur du plus petit segment reliant P à un point de la droite d .

Proposition 3.3.31. Soit H le pied de la perpendiculaire à d passant par P , alors pour tout point A de d , on a $[A, P] \geq [H, P]$ et on a égalité si et seulement si $A = H$.

La démonstration découle directement du théorème de Pythagore. Avec cette définition, on peut donner une définition équivalente de la bissectrice.

Proposition 3.3.32. Pour un angle \widehat{ABC} , les deux énoncés suivants sont équivalents :

- r est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} .
- r est l'ensemble des points contenu dans le cône bordé par l'angle \widehat{ABC} et à égale distance des demi-droites $[BA$ et de $[BC$.

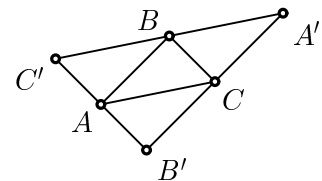
Corollaire 3.3.33. Dans un triangle non dégénéré, les trois bissectrices se coupent en un point.

Les preuves de cette proposition et de ce corollaire sont similaires au cas de la médiatrice et sont laissées en exercice.

Exercice. Etant donné un triangle, comment trouver un cercle circonscrit au triangle ou inscrit dans celui-ci?

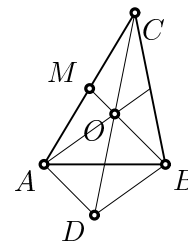
Proposition 3.3.34. Dans un triangle non dégénéré, les trois hauteurs (éventuellement prolongées) se coupent en un point.

Démonstration Sur le triangle $\triangle ABC$, construire le triangle $\triangle A'B'C'$ en traçant une parallèle à chaque côté passant par le sommet opposé à celui-ci. Par le théorème de l'angle interne et ACA, les triangles suivants sont tous isométriques : $\triangle ABC$, $\triangle A'CB$, $\triangle CB'A$ et $\triangle BAC'$. Ceci implique que les hauteurs du triangle $\triangle ABC$ sont exactement les médiatrices de $\triangle A'B'C'$ et on sait, par une proposition précédente, que les médiatrices du triangle $\triangle A'B'C'$ se coupent en un point. Ceci implique que les hauteurs de $\triangle ABC$ se coupent aussi au même point. Cqfd

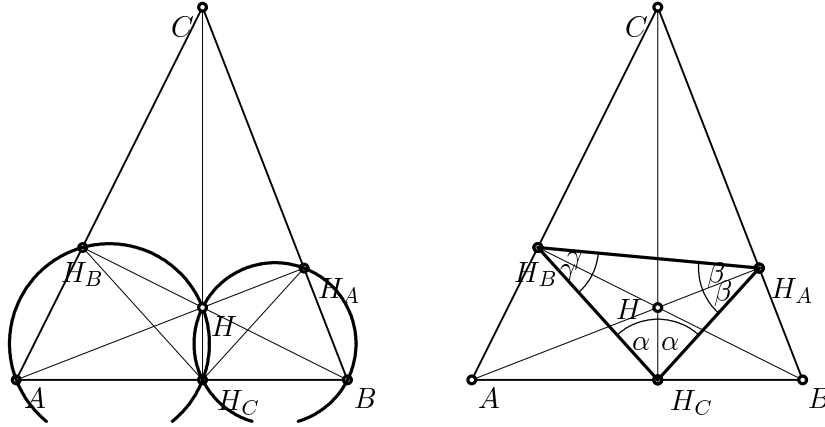


Proposition 3.3.35. Dans un triangle non dégénéré, les trois médianes se coupent en un point.

Démonstration Soient O l'intersection des médianes issues de A et B et M le milieu du segment $[A, C]$. Sur CO , on construit D tel que $[C, O] \equiv [O, D]$. Donc les points M et O sont les milieux des côtés du triangle $\triangle ADC$, ce qui implique par le théorème du segment moyen que $[O, B]$ est parallèle à $[A, D]$. De même, en considérant le triangle $\triangle DBC$, on a que $[O, A]$ est parallèle à $[D, B]$. Ces deux conditions de parallélisme impliquent que $ADBO$ est un parallélogramme. Donc CD coupe $[A, B]$ par le milieu. Ce qui implique bien que OC est confondue avec la médiane issue de C . Les trois médianes se coupent bien en un point. Cqfd



Théorème 3.3.36. Soit ΔABC un triangle ayant trois angles aigus, alors les hauteurs du triangle ΔABC sont les bissectrices du triangle $\Delta H_A H_B H_C$ construit sur les pieds des hauteurs H_A, H_B et H_C .



Démonstration Comme les quadrilatère $H_B H H_C A$ et $H_C H H_A B$ ont deux angles droits opposés, ils sont inscriptibles dans un cercle, par la réciproque du cercle de Thales.

Remarquons que $\widehat{H_B B C} \equiv \square - \widehat{B C A} \equiv \widehat{H_A A C}$.

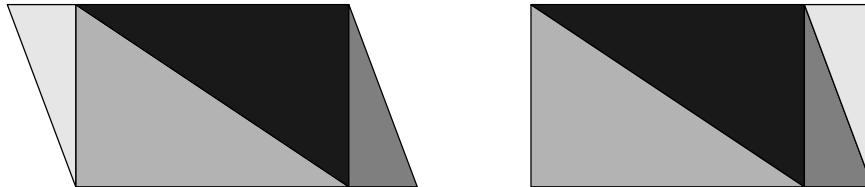
Comme $[H_B, H]$ (resp. $[H_A, H]$) est une corde sur un cercle et comme H_C et A (resp. H_C et B) sont aussi sur le cercle, on a que

$$\widehat{H H_C H_B} \equiv \widehat{H A H_B} \equiv \widehat{H_B B C} \equiv \widehat{H H_C H_A}. \text{ Cqfd}$$

Revenons à la notion d'égalité de surfaces chez Euclide. Il s'agit des propositions 35 à 48 du livre I. Rappelons une fois de plus qu'Euclide n'associe pas à une surface son aire, tout au moins jamais explicitement, mais qu'il conçoit l'égalité de deux surfaces en termes d'équidécomposabilité.

Formellement, deux surfaces S_1 et S_2 sont **équidécomposables** s'il existe pour chacune une triangulation (i.e. une décomposition en triangles disjoints) $S_1 = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$ et $S_2 = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \dots \cup \tau_n$ telles que T_i est isométrique à τ_i pour $i = 1 \dots n$.

Exemple :



L'exemple nous montre qu'un rectangle et un parallélogramme ayant des bases et des hauteurs isométriques sont équidécomposables.

Nous nous permettons, comme dans le cas de la longueur d'un segment, de parler de l'aire d'une surface, même si ce n'est pas le point de vue d'Euclide. Nous supposons l'existence d'une telle fonction $aire(S)$ et nous acceptons les propriétés suivantes :

Premièrement, si deux surfaces S_1 et S_2 sont isométriques alors $aire(S_1) = aire(S_2)$.

Deuxièmement, si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ alors $\text{aire}(S_1 \cup S_2) = \text{aire}(S_1) + \text{aire}(S_2)$.

Troisièmement si S est un rectangle dont la base est de longueur b et la hauteur de longueur h , alors $\text{aire}(S) = bh$.

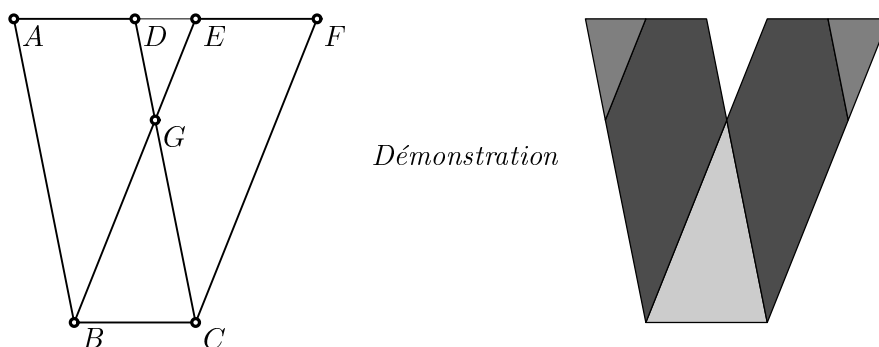
De ces “axiomes”, on peut démontrer la plupart des formules d’aire des surfaces polygonales. Par exemple l’aire d’un triangle vaut $bh/2$. Il est clair que d’avoir une même aire est une condition nécessaire pour que deux surfaces soient équidécomposables, mais ce n’est pas suffisant en général. Néanmoins dans le cas des surfaces polygonales simples, c’est à dire les surfaces dont le bord est un polygone simple (i.e. une surface à intérieur connexe et dont le bord est un polygone), les deux notions sont équivalentes. En suivant la démonstration d’Euclide, nous démontrerons le

Théorème 3.3.37. *Soient S_1 et S_2 deux surfaces polygonales simples de même aire, alors S_1 et S_2 sont équidécomposables.*

En fait Euclide montre que toute surface polygonale simple est équidécomposable à un carré. C’est la notion de **quadrature d’une surface**. Ainsi un pentagone régulier, hexagone régulier ou un 2340gone régulier est quadrable. Ceci explique bien pourquoi le problème de la quadrature du disque est si naturelle pour les Grecs.



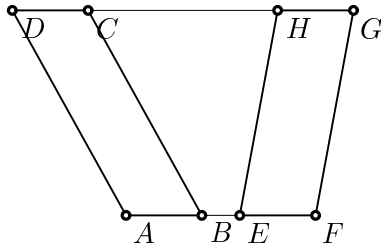
Proposition 3.3.38. *(Euclide I.35) Deux parallélogrammes de même base et entre deux même parallèles sont équidécomposables.*



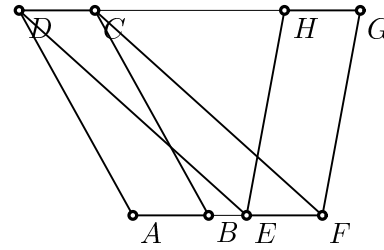
Soient $ABCD$ et $EBFC$ les deux parallélogrammes. Comme $[A, D] \equiv [B, C] \equiv [E, F]$, $[A, B] \equiv [D, C]$ et $[B, E] \equiv [C, F]$, par (CCC), les triangles $\triangle ABE$ et $\triangle DCF$ sont isométriques; ils sont donc équidécomposables. Comme le polygone $ABCGE$ se décompose en la réunion du parallélogramme $ABCD$ et du triangle $\triangle DGE$, mais aussi en la réunion des triangles $\triangle ABE$ et $\triangle BGC$, on obtient que le parallélogramme $ABCD$ se décompose en $\triangle ABE$ et $\triangle BGC$ auquel on retire $\triangle DGE$.

De même le parallélogramme $EBFC$ se décompose en $\triangle DCF$ et $\triangle BGC$ auquel on retire $\triangle DGE$. Comme on a vu que les deux triangles $\triangle ABE$ et $\triangle DCF$ sont équidécomposables, les deux parallélogrammes le sont aussi. Cqfd

Proposition 3.3.39. *(Euclide I.36) Deux parallélogrammes ayant des base isométriques et étant entre deux même parallèles sont équidécomposables.*



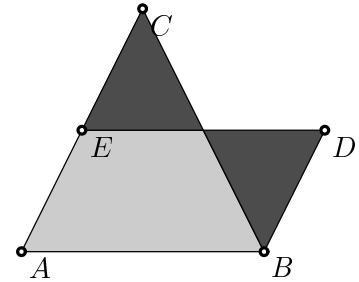
Démonstration



Euclide démontre ensuite (proposition 37) que deux triangles ayant même base et dont les sommets sont sur une parallèle à la base sont équidécomposables, puis dans la même logique que pour les parallélogrammes, il démontre que deux triangles ayant des bases et des hauteurs isométriques sont équidécomposables (proposition 38).

Il suffit pour cela de démontrer que l'on peut décomposer un triangle en un parallélogramme de même base et dont la hauteur est la moitié de la hauteur du triangle.

Ainsi si deux triangles ont des bases et des hauteurs isométriques, chacun d'eux est équidécomposable à un parallélogramme ayant une même base que le triangle et une hauteur égale à la moitié de celle du triangle. Les deux parallélogrammes sont équidécomposables et par suite les triangles aussi.



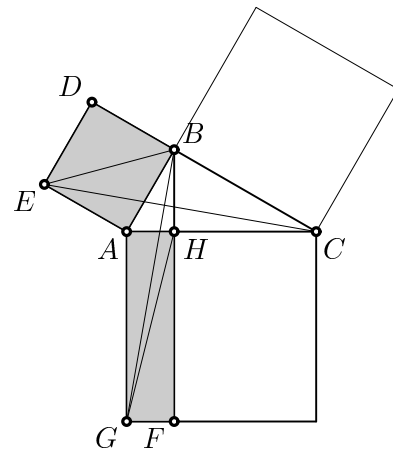
Pour l'instant, Euclide ne peut pas décomposer deux triangles de même aire, mais ayant des bases et des hauteurs différentes.

En effet, il peut décomposer un triangle en un parallélogramme, puis en un rectangle, mais il lui faut encore réussir à passer d'un rectangle à un autre rectangle de même aire. Il va donc donner une méthode pour décomposer un rectangle quelconque en un carré de même aire.

Théorème 3.3.40. (Théorème d'Euclide) Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle en B et H le pied de la hauteur issue de B , alors un carré de côté $[A, B]$ est équidécomposable à un rectangle de côtés $[A, H]$ et $[A, C]$.

Démonstration Comme $[E, A] \equiv [A, B]$, $[A, C] \equiv [A, G]$ et que $\widehat{EAC} \equiv \widehat{BAG} \equiv \square + \widehat{BAC}$, par (CAC), les triangles $\triangle EAC$ et $\triangle BAG$ sont isométriques et donc équidécomposables.

Par la prop. I.37, les triangles $\triangle EAB$ et $\triangle EAC$ sont équidécomposables, puisqu'ils ont une base commune $[E, A]$ et que $[B, C]$ est parallèle à $[E, A]$. Pour la même raison, les triangles $\triangle AGB$ et $\triangle AGH$ sont aussi équidécomposables. Et comme le carré $ABDE$ (resp. le rectangle $AHGF$) se décompose en deux copies du triangle $\triangle EAB$ (respectivement $\triangle AGH$), $ABDE$ et $AHGF$ sont équidécomposables. Cqfd Ceci donne une autre preuve



du

Théorème 3.3.41. (Théorème de Pythagore) Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle en B , alors

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

Il suffit, en effet, d'appliquer deux fois le théorème d'Euclide.

Concernant le théorème de Pythagore, on peut se poser la question suivante : Est-ce que sa réciproque est vraie? La réponse à cette question est oui. La preuve de ceci est laissée en exercice. Le théorème de Pythagore est la dernière proposition du premier livre des éléments d'Euclide. Nous n'allons pas lire les autres livres aussi complètement que le premier, mais nous allons voir quelques résultats particulièrement intéressants, surprenants ou utiles. Revenons à un autre corollaire du théorème d'Euclide.

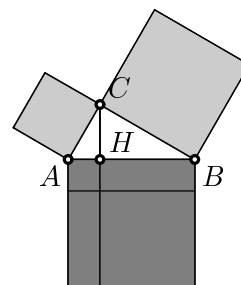
Théorème 3.3.42. (Théorème de la hauteur) Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de C , alors $\overline{AH} \cdot \overline{HB} = \overline{HC}^2$.

Démonstration Par Pythagore, la somme des aires des petits carrés est égale à l'aire du grand. Exprimons ces différentes aires en fonction des longueurs des côtés. A nouveau par Pythagore, la somme des aires des petits carrés vaut

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2.$$

D'autre part, l'aire du grand carré vaut

$$\overline{AB}^2 = (\overline{AH} + \overline{HB})^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 + 2\overline{AH} \overline{HB}.$$



On en déduit donc $\overline{AH} \overline{HB} = \overline{HC}^2$. Cqfd

- Questions :** 1) Etant donné deux segments, un de longueur a , l'autre de longueur 1, peut-on construire à la règle et au compas un carré de côté \sqrt{a} ?
2) La réciproque du théorème de la hauteur est-elle vraie?

Preuve du théorème d'équidécomposabilité.

Pour prouver l'équidécomposabilité de deux surfaces polygonales simples de même aire, il faut encore un résultat. Il s'agit de pouvoir décomposer toute surface polygonale simple en réunion de triangles disjoints. Cette opération bien qu'intuitive devrait être justifiée. La preuve de l'existence de cette triangulation se fait par induction sur le nombre de sommets du polygone. Si ce nombre n est égal à 3 (il ne peut pas être plus petit!), alors le polygone est déjà un triangle et la surface est triangulée.

Si $n > 3$, on suppose par hypothèse d'induction que toute surface polygonale simple ayant moins de n côtés est triangulable et il faut démontrer qu'une surface à n côtés est aussi triangulable.

Pour ce faire, il faut se convaincre que l'on peut trouver deux sommets du polygone formant le bord de la surface qui sont non adjacents et reliables par un segment de droite contenu dans la surface. Si c'est le cas, on peut partitionner la surface en deux surfaces polygonales simples ayant chacune moins de n côtés. Ces deux surfaces sont triangulables par hypothèse d'induction, donc la surface l'est aussi.

Soient S_1 et S_2 deux surfaces polygonales simples de même aire. Par le résultat précédent, on peut les trianguler. $S_i = T_{i,1} \cup T_{i,2} \cup \dots \cup T_{i,n_i}$ pour $i = 1, 2$. Chacun de ces triangles $T_{i,k}$ est équidécomposable à un carré $C_{i,k}$. Donc S_i et $C_{i,1} \cup C_{i,2} \cup \dots \cup C_{i,n_i}$ sont équidécomposables pour $i = 1, 2$. Et en appliquant Pythagore plusieurs fois, on obtient que $C_{i,1} \cup C_{i,2} \cup \dots \cup C_{i,n_i}$ est équidécomposable à un carré C_i pour $i = 1, 2$. Comme l'équidécomposabilité préserve l'aire et que les deux surface S_1 et S_2 sont de même aire, les deux carrés C_1 et C_2 sont isométriques et donc équidécomposables. Ceci démontre bien que S_1 et S_2 sont équidécomposables. Cqfd

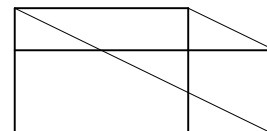
On remarque que cette méthode de découpe donne un très grand nombre de pièces. On peut donc chercher des découpes ayant le moins de pièces possibles, mais ceci est un problème bien plus difficile.

Exercice Soient deux rectangles de même aire et de côtés A, B et a, b respectivement, démontrez que

$$\frac{B}{a} = \frac{b}{A} = \frac{B-b}{a-A}.$$

Si $A \leq a \leq 2A$, en déduire une décomposition efficace d'un rectangle en l'autre. Peut-on se passer de la restriction $A \leq a \leq 2A$ dans cette décomposition?

L'exercice précédent nous permet d'équidécomposer deux rectangles de même aire avec peu de pièces. Voyons quelques quadratures explicites et efficaces de polygones réguliers.



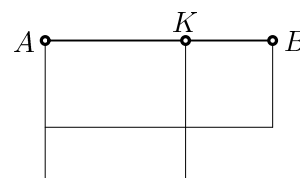
3.4 Quelques autres résultats des éléments d'Euclide.

Revenons au théorème de la hauteur. Il permet, étant donné un rectangle de côté a et b de construire un carré de même aire. Peut-on, dans la même optique, étant donné un segment $[A, B]$, construire un point K dans $[A, B]$ tel que le rectangle dont les côtés sont isométriques à $[A, B]$ et à $[K, B]$ ait la même aire que le carré de côté $[K, A]$? Ce problème est plus compliqué car il est sous forme implicite. Algébriquement, si on pose $l = \overline{AB}$, on cherche $0 < x < l$ tel que $x^2 = l(l-x)$ ou de façon équivalente, $x^2 + lx - l^2 = 0$. Comme $x > 0$ on a la solution $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}l$. Euclide donne une construction du point K à la **proposition II.11**.

Essayons de géométriser la preuve algébrique. Pour cela, construisons sur la perpendiculaire à $[A, B]$ passant par A le point E tel que $[A, B]$ et $[A, E]$ soient isométriques. Posons M le milieu du segment $[A, E]$. Posons J l'intersection de $[MA$ avec le cercle centré en M de rayon $[M, B]$. Alors le point K cherché est l'intersection du cercle centré en A de rayon $[A, J]$ avec $[A, B]$.

En effet, si on pose $l = \overline{AB}$, on veut trouver K sur $[A, B]$ tel que $\overline{AK} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}l$.

Comme $\overline{AM} = l/2$ et que AM est perpendiculaire à AB , par Pythagore, $\overline{MJ} = \overline{MB} = l\sqrt{5}/2$ et donc $\overline{AJ} = \overline{AK} = (-1 + \sqrt{5})l/2$. Cqfd



Revenons brièvement au contenu des livres II, III et IV des Eléments d'Euclide. Comme nous venons de le voir, le deuxième livre contient essentiellement des résultats sur les aires et se termine par le théorème d'équidécomposabilité des surfaces polygonales simples ou plutôt son corollaire énonçant que l'on peut construire un carré équidécomposable à toute surface polygonale simple.

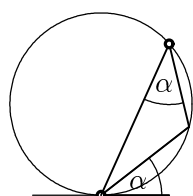
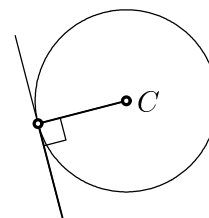
Le livre III présente essentiellement des résultats liés aux cercles. En particulier le théorème de l'angle au centre. De plus, il donne des propriétés et des caractérisations des tangentes à un cercle.

Rappelons qu'une droite d est **tangente à un cercle en un point P** si P est le seul point d'intersection entre la droite et le cercle.

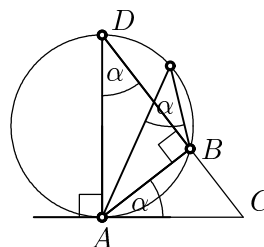
Il est facile de démontrer que cette définition est équivalente au fait que d est perpendiculaire au rayon $[O, P]$.

Remarquons d'autres propriétés des tangentes, en particulier la proposition 32 qui s'énonce comme suit :

Proposition 3.4.1. (*Proposition III.32*) Soient C un cercle et $[A, B]$ une corde de ce cercle, alors l'angle entre la tangente en A et la corde est égal à l'angle de vision de la corde.



Démonstration



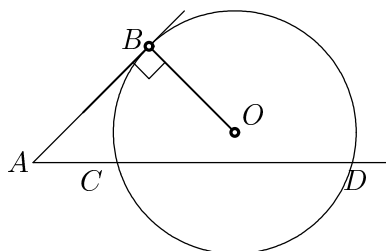
Traçons le diamètre passant par A et notons D le point antipodal et C le point d'intersection de DB avec la tangente au cercle en A , pour autant qu'il existe (ce qui est équivalent à supposer les points B et D distincts).

Traçons le cas où les points B et D sont confondus. La corde $[A, B]$ est donc un diamètre et on conclut en utilisant le cercle de Thalès.

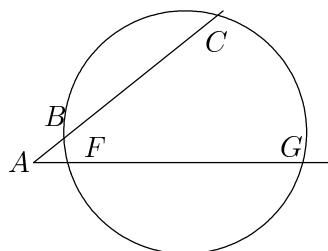
Revenons au cas où les points B et D sont distincts. Comme $[A, D]$ est un diamètre les angles \widehat{ABD} et \widehat{DAC} sont droits. Ceci permet de conclure (voir exercice) que les angles \widehat{ADB} et \widehat{BAC} sont isométriques. Comme on sait que l'angle de vision d'une corde est constant sur tous les points du cercle du même côté de AB que D , cela prouve la proposition. Cqfd

Un autre résultat est une caractérisation métrique de la tangente. Il s'agit des propositions 36 et 37 du livre III.

Proposition 3.4.2. (*propositions III.36 et III.37*) Soient C un cercle, A un point hors du cercle, B un point sur C et d une droite passant par A coupant C en deux points C et D , alors la droite AB est tangente à C en B si et seulement si $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$.



propositions III 36 et 37



résultat analogue

Démontrons le résultat analogue suivant :

Proposition 3.4.3. *Soient \mathcal{C} un cercle, A un point hors du cercle, e et d deux droites passant par A coupant chacune \mathcal{C} en deux points. Notons C et D (respectivement F et G) les points d'intersections de d avec \mathcal{C} (respectivement de e avec \mathcal{C}), alors*

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AF} \cdot \overline{AG}.$$

Démonstration Il existe de cette proposition une preuve n'utilisant pas le théorème de Thalès, mais elle est relativement compliquée. Aussi, même si ce théorème n'a pas encore été démontré, nous allons l'utiliser. Rappelons l'énoncé du théorème de Thalès : Deux triangles ont leurs angles respectifs isométriques (on dit que les triangles sont **semblables**) si et seulement si leurs côtés respectifs sont proportionnels (voir page 6).

Comme $[B, F]$ est une corde du cercle \mathcal{C} et que C et G sont du même côté de celle-ci, les angles \widehat{BCF} et \widehat{BGF} sont isométriques. Comme de plus l'angle entre d et e en A est commun aux deux triangles $\triangle ACF$ et $\triangle AGB$, ces deux triangles sont semblables et par Thalès, ils ont leurs côtés respectifs proportionnels, c'est-à-d. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$. Ce qui implique bien que $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AF} \cdot \overline{AG}$. Cqfd

Démontrons maintenant la caractérisation métrique de la tangente (les propositions III.36 et III.37).

Démonstration Si AB est tangent au cercle en B alors par la proposition III.32, les angles \widehat{ABC} et \widehat{BDC} sont isométriques. Cette observation permet de démontrer en utilisant Thalès et à l'aide des triangles $\triangle ABC$ et $\triangle DAB$, que $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$.

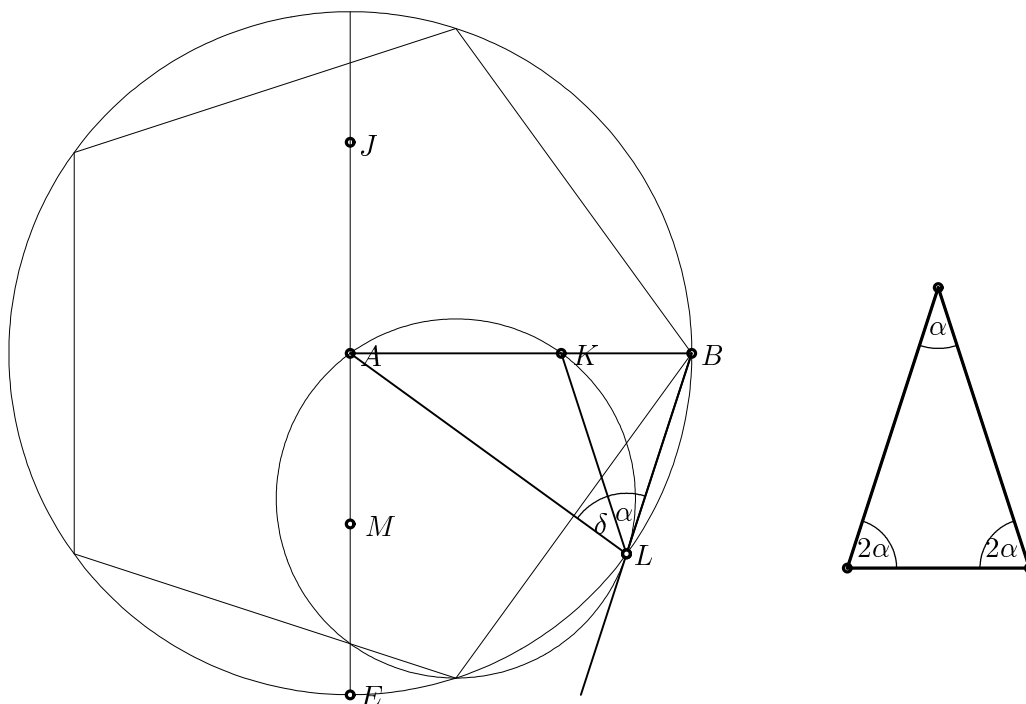
Démontrons la réciproque par contraposée. Supposons que AB coupe de manière non tangente le cercle en B , alors AB coupe le cercle en un point E différent de B et, par la proposition précédente, on a l'égalité $\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \overline{AC}$. Comme A est hors du cercle et que E et B sont distincts, $\overline{AB} \neq \overline{AE}$. Ce qui permet de conclure $\overline{AB}^2 \neq \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \overline{AC}$. Cqfd

Dans le livre IV, Euclide cherche à construire certains polygones réguliers dans un cercle. Construire un triangle équilatéral, un carré ou un hexagone régulier est facile. Le cas du pentagone régulier est beaucoup plus délicat et a été reconnu par les commentateurs des éléments comme un des chef-d'oeuvres d'Euclide. Chaque polygone régulier peut être inscrit dans un cercle. Inversément pour construire un n -gone régulier inscrit dans un cercle, il faut pouvoir construire l'angle $360^\circ/n$ afin de couper 360° en n parties égales. Dans le cas du pentagone, il faut obtenir 72° à la règle et au compas. Il n'est pas possible de construire n'importe quel polygone régulier, on peut montrer que l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas. Il est clair par une bissection d'angle que si on sait construire un n -gone régulier, alors on sait aussi construire un $2n$ -gone régulier. Euclide donne la construction des n -gones réguliers pour n prenant les valeurs suivantes : 2^k , $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$ et $3 \cdot 5 \cdot 2^k$. Il faudra attendre plus de vingt siècles pour que la construction d'un autre polygone régulier soit donnée. Gauss démontre à la fin du 18ème siècle que le 17-gone régulier est constructible à la règle et au compas.

Proposition 3.4.4. *Un pentagone régulier est constructible à la règle et au compas.*

Euclide construit un triangle isocèle dont les angles à la base valent deux fois l'angle au sommet. Posons α l'angle au sommet, on veut que $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180^\circ$. Ce qui implique que $\alpha = 36^\circ$ et qui permet de construire un décagone régulier. En prenant un sommet sur deux, on obtient le pentagone cherché. Tout d'abord démontrons ce lemme.

Lemme 3.4.5. *Construire un triangle isocèle dont les angles à la base valent deux fois l'angle au sommet*



Démonstration Notons $[A, B]$ un des deux côtés isométriques du triangle cherché. Construisons sur le cercle \mathcal{C} centré en A de rayon $[A, B]$, le point E de telle sorte que $[A, E]$ soit perpendiculaire à $[A, B]$ et posons M le milieu de $[A, E]$. Soit $\{J\} = \mathcal{C}(M, [M, B]) \cap [MA]$ et $\{K\} = \mathcal{C}(A, [A, J]) \cap [AB]$. La proposition II.11 implique que $\overline{AB} \cdot \overline{BK} = \overline{AK}^2$. Soit L un point d'intersection de \mathcal{C} avec le cercle centré en B de rayon $[A, K]$. Soit \mathcal{C}' le cercle passant par A, K et L . Comme $\overline{AK} = \overline{BL}$, par la proposition III.36/37, BL est tangent à \mathcal{C}' en L et donc par la proposition III.32 $\widehat{BAL} \equiv \widehat{KLB}$, notons cet angle α et notons δ , l'angle \widehat{ALK} . Comme \widehat{LKB} est le supplémentaire de \widehat{AKL} , $\widehat{LKB} = \alpha + \delta$. Comme le triangle ΔABL est isocèle, $\alpha + \delta \equiv \widehat{ALB} \equiv \widehat{ABL}$. Ceci implique que $\widehat{LKB} \equiv \widehat{ABL}$ et donc que le triangle ΔKBL est isocèle.

$$\text{D'où } \overline{AK} = \overline{BL} = \overline{KL}.$$

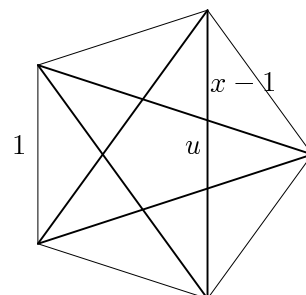
Ce qui permet de conclure en montrant que $\alpha \equiv \delta$, car le triangle ΔAKL est isocèle. Cqfd
La fin du quatrième livre contient des constructions permettant d'inscrire dans un cercle donné certains polygones réguliers. Dans le livre V, Euclide développe une arithmétique sur les segments, ceci pour suppléer à la faiblesse de la notion de nombre dans la connaissance grecque et pour permettre l'introduction de la proportion.

3.5 La similitude

Nous venons de construire le pentagone régulier. On se souvient aussi que le symbole des Pythagoriciens était le pentagramme ou pentagone étoilé. Il est clair que la construction du pentagone régulier permet aussi de construire le pentagone étoilé, simplement en reliant les

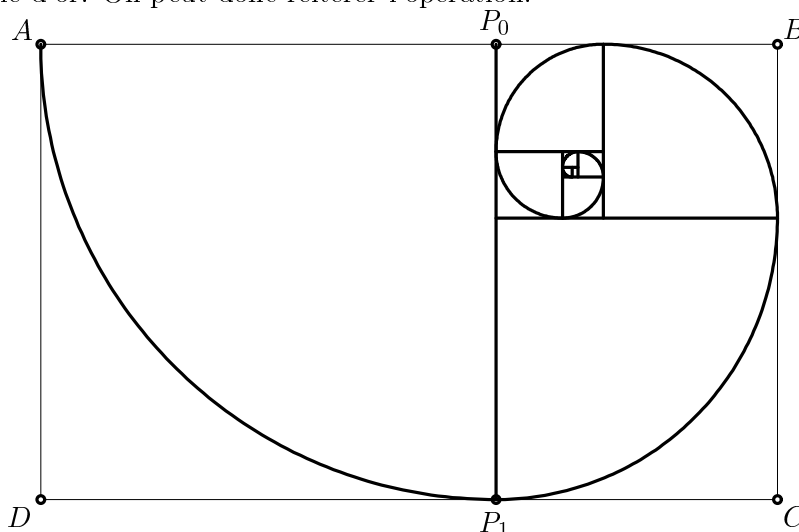
sommets les uns aux autres dans un ordre différent. On peut donc se demander que vaut le rapport entre la longueur du côté du pentagone régulier et celle du pentagone étoilé.

Supposons que le côté du pentagone régulier vaut 1 et notons x , le côté du pentagone étoilé. Notons aussi u la longueur du côté du pentagone régulier formant l'intérieur du pentagone étoilé. On a les relations suivantes. La longueur d'un côté d'une branche du pentagone étoilé vaut $x-1$ et donc $u = 2-x$. Par le théorème de Thalès, on obtient $u/1 = (x-1)/x$. Ce qui est équivalent à $x^2 - x - 1 = 0$. On a ainsi montré que le côté du pentagone étoilé régulier inscrit dans un pentagone régulier de côté 1 est la section d'or (ou le nombre d'or). Ce nombre Φ vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Chez les Grecs, ce rapport était le summum de la beauté et la plupart des monuments architecturaux (telles le Parthénon ou d'autres temples) sont construits en tenant compte de ce rapport. Dans la peinture, ce rapport fut aussi très utilisé et ce n'est pas étonnant qu'il fut repris à la Renaissance comme canon de la beauté. Nous allons voir une application de ce rapport particulier.



Exemple. (La spirale dorée.) A partir d'un rectangle $ABCD$ dont les côtés a et b forment un rapport d'or, nous construisons une spirale de la manière suivante.

Dans le rectangle, construire un carré de côté $a < b$ dont les sommets sont AP_0P_1D et tracer l'arc de cercle de rayon a et d'angle droit centré en P_0 . Le rectangle restant est à nouveau un rectangle d'or. On peut donc réitérer l'opération.



Assertion : Le rectangle P_0P_1CB est aussi un rectangle d'or.

Démonstration Comme $ABCD$ est un rectangle d'or, on a

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De plus on sait que $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, ce qui implique que $\Phi - 1 = 1/\Phi$.

On peut supposer que $\overline{AB} = \Phi$ et $\overline{AD} = 1$ sans perdre de généralité. On a donc $\overline{P_0B} = \Phi - 1 = 1/\Phi$ et $\overline{P_0P_1} = 1$. Ceci implique que

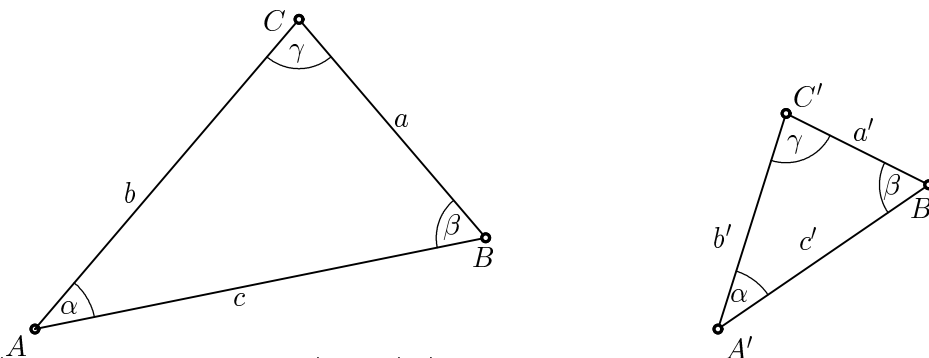
$$\frac{\overline{P_0P_1}}{\overline{P_0B}} = \Phi. \text{ Cqfd}$$

De façon intuitive, deux objets sont semblables, s'ils ont une forme identique, mais pas nécessairement les mêmes grandeurs (plus précisément si l'un est une homothétie de l'autre, c.-à-d. si les côtés respectifs des deux objets sont proportionnels). Dans l'exemple de la spirale dorée, les deux rectangles sont semblables. Plus généralement des polygones semblables ont des angles isométriques, mais ce n'est pas suffisant. En effet un carré et un rectangle non carré ne sont pas semblables. Dans le cas des triangles néanmoins, l'isométrie d'angles est suffisante. Définissons tout d'abord la similitude entre triangles.

Définition 3.5.1. Deux triangles sont semblables s'ils ont des angles respectifs isométriques (i.e. $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$ et $\gamma \equiv \gamma'$).

Le résultat principal concernant les triangles semblables est le suivant.

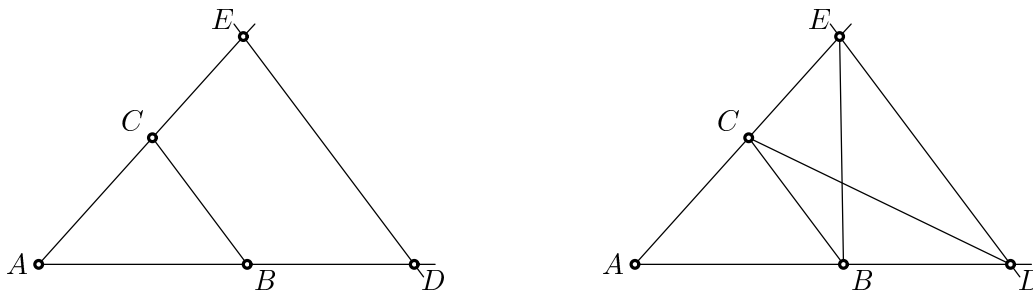
Théorème 3.5.2. Deux triangles sont semblables ($\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$, $\gamma \equiv \gamma'$) si et seulement s'ils ont des côtés proportionnels (i.e. $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.)



Ce résultat est souvent appelé le théorème des triangles semblables. Pour le démontrer nous allons utiliser un autre théorème grec fameux, le théorème de Thales.

Théorème 3.5.3. (Théorème de Thales) Soit ΔABC un triangle et d une droite parallèle à BC coupant AB au point D et AC en E , alors

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} \quad (*)$$



Démonstration On cherche à démontrer (*) comme des rapports d'aires entre triangles. Faisons quelques remarques. Premièrement, les triangles $\triangle BCE$ et $\triangle BCD$ ont la même aire, puisqu'ils ont une même base et que BC est parallèle à DE . Deuxièmement, les triangles $\triangle ABE$ et $\triangle ACD$ ont la même aire, puisqu'ils se décomposent chacun en deux triangles, l'un ($\triangle ABC$) étant leur intersection et l'autre étant précisément les triangles de la première observation. On obtient donc une égalité entre les rapports d'aires suivants :

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ABE)}{\mathcal{A}(\triangle ADE)} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ACD)}{\mathcal{A}(\triangle ADE)}.$$

Remarquons maintenant que les triangles $\triangle ACD$ et $\triangle ADE$ ont une hauteur commune notée h_1 (de même pour $\triangle ABE$ et $\triangle ADE$ qu'on note h_2). Ceci nous permet de conclure; en effet

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB} h_2/2}{\overline{AD} h_2/2} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ABE)}{\mathcal{A}(\triangle ADE)} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ACD)}{\mathcal{A}(\triangle ADE)} = \frac{\overline{AC} h_1/2}{\overline{AE} h_1/2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

Ceci démontre la première égalité énoncée dans (*). Reste à voir

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}}.$$

Pour cela construisons un triangle auxiliaire. Soit F sur $[A, D]$ tel que $\overline{AB} = \overline{FD}$ et G sur $[D, E]$ tel que $\overline{BC} = \overline{DG}$. Comme DE est parallèle à BC , par le théorème des angles alternes-internes, les angles \widehat{ABC} et \widehat{FDG} sont isométriques. Par CAC les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle FDG$ sont isométriques et donc \widehat{BAC} et \widehat{DFG} sont isométriques. Ce qui permet de dire que FG est parallèle à AE et par la première égalité démontrée précédemment, on a

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}.$$

Il reste à voir le cas où la droite d coupe les droites AB et AC de l'autre côté de A que B et C . Ceci se démontre en employant un triangle auxiliaire $\triangle AFG$ isométrique à $\triangle ABC$ du côté de d . Cqfd

Remarque 3.5.4. Cette preuve n'est pas celle d'Euclide, car il n'emploie jamais la notion d'aire. Une autre manière de démontrer ce théorème est de le faire pour des triangles semblables dont le rapport des côtés est rationnel et de prolonger par continuité pour tout rapport réel. Cette idée de preuve est plus dans l'esprit de celle d'Euclide, même si le langage et l'emploi d'un argument de continuité est anachronique.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème des triangles semblables.

Démonstration Supposons que $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$ et $\gamma \equiv \gamma'$. Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, les deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont isométriques les rapports des côtés respectifs valent tous 1.

D'autre part, si $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, on peut construire un point E sur $[A, B]$ tel que $\overline{AE} = \overline{A'B'}$ et un point F sur $[A, C]$ tel que $\overline{AF} = \overline{A'C'}$. Par CAC, les deux triangles $\triangle A'B'C'$ et $\triangle AEF$ sont isométriques. Ceci permet de dire par le théorème des angles alternes-internes que BC est parallèle à EF . Alors par le théorème de Thalès, les côtés des triangles $\triangle AEF$ et $\triangle ABC$ sont proportionnels et comme les triangles $\triangle AEF$ et $\triangle A'B'C'$ sont isométriques, les triangles $\triangle A'B'C'$ et $\triangle ABC$ ont des côtés proportionnels.

Inversément, supposons que

$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\right),$$

il faut montrer que $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$ et $\gamma \equiv \gamma'$.

Sur $[AB]$, construire un point E tel que $\overline{AE} = \overline{A'B'}$ et tracer un parallèle à BC passant par E . Notons F le point d'intersection de cette parallèle avec AC . Par Thalès les côtés des triangles $\triangle ABC$ et $\triangle AEF$ sont proportionnels. Comme par hypothèse, les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ ont des côtés proportionnels, on a les égalités.

$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}\right) \text{ et } \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\right).$$

Comme $\overline{AE} = \overline{A'B'}$, on déduit que $\overline{AF} = \overline{A'C'}$ et que $\overline{EF} = \overline{B'C'}$. Par CCC les triangles $\triangle AEF$ et $\triangle A'B'C'$ sont isométriques. Ceci permet de déduire $\alpha \equiv \alpha'$ et par le théorème des angles alterne-internes, $\beta \equiv \beta'$ et $\gamma \equiv \gamma'$. Cqfd

Remarque 3.5.5. La proportionnalité des côtés respectifs de deux triangles semblables peut être donnée d'une autre façon. En effet, le théorème des triangles semblables nous dit que deux triangles sont semblables si et seulement si les rapports suivants sont égaux :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Ceci est encore équivalent aux égalités suivantes :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \quad , \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}.$$

La différence entre les deux types d'égalités est que d'un côté, les quotients contiennent des longueurs appartenant à deux triangles différents, alors que dans le deuxième cas le rapport est fait entre des longueurs de côtés du même triangle.

La preuve de l'équivalence entre ces deux types d'égalités est purement algébrique et directe.

On peut généraliser le théorème de Thalès de la manière suivante.

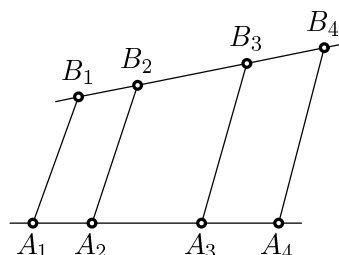
Théorème 3.5.6. *Etant données quatre droites parallèles d_1, d_2, d_3 et d_4 et deux autres droites d_5 et d_6 coupant d_1 (et donc d_2, d_3 et d_4). Soient A_i les points d'intersection de d_i avec d_5 et B_i les points d'intersection de d_i avec d_6 pour $i = 1 \dots 4$, alors*

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}.$$

Démonstration Traitons deux cas : Premièrement, supposons que d_5 et d_6 sont parallèles, alors les quadrilatères $A_1A_2B_2B_1$ et $A_3A_4B_4B_3$ sont des parallélogrammes, ils ont donc des côtés opposés isométriques. Ainsi $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$ et $\overline{A_3A_4} = \overline{B_3B_4}$.

Ce qui implique que

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = 1 = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_3B_4}} \Rightarrow \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}.$$



Deuxièmement supposons que d_5 et d_6 ne sont pas parallèles. Traçons une droite e parallèle à d_6 passant par A_1 et une droite f parallèle à d_6 passant par A_3 . Notons H le point d'intersection de e avec $\overline{A_2B_2}$ et N le point d'intersection de f avec $\overline{A_4B_4}$. Comme e et f sont parallèles, les angles $\widehat{A_2A_1H}$ et $\widehat{A_4A_3N}$ sont isométriques. Par un raisonnement analogue, sur les droites parallèles d_2 et d_4 et la droite d_5 , on déduit que les angles $\widehat{A_1A_2H}$ et $\widehat{A_3A_4N}$ sont isométriques. Les triangles $\triangle A_1A_2H$ et $\triangle A_3A_4N$ sont semblables. Par le théorème des triangles semblables, on a

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1H}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_3N}}$$

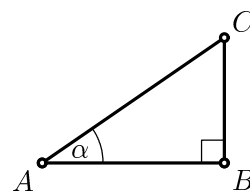
Comme e et f sont parallèles à d_6 et que les droites d_i pour $i = 1 \dots 4$ sont toutes parallèles entre elles, les quadrilatères $\overline{A_1HB_2B_1}$ et $\overline{A_3NB_4B_3}$ sont des parallélogrammes. Ceci montre que $\overline{A_1H} = \overline{B_2B_1}$ et $\overline{A_3N} = \overline{B_4B_3}$ et permet de conclure. Cqfd

Le théorème de Thalès nous dit que les rapports entre les côtés d'un triangle ne dépendent en fait que de ses angles. On peut s'intéresser au cas particulier des triangles rectangles et des rapports des côtés dans ces derniers. Le choix d'un angle aigu α définit l'ensemble des triangles rectangles semblables. Les rapports entre côtés pour tous ces triangles sont donc les mêmes et ne dépendent que de l'angle α . Ces différents rapports peuvent être considérés comme des fonctions de l'angle α . Ce sont les fonctions trigonométriques que nous allons étudier maintenant.

3.6 La trigonométrie

Comme nous l'avons dit, la trigonométrie est l'étude du rapport entre certains côtés des triangles rectangles. Rappelons tout d'abord la définition.

Définition Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle. On rappelle que le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse et les côtés adjacents, les cathètes. Soit α un angle aigu du triangle $\triangle ABC$, on pose le sinus de α (respectivement le cosinus et la tangente) comme le rapport entre le côté opposé à α et l'hypoténuse (respectivement entre le côté adjacent à α et l'hypoténuse et entre le côté opposé et le côté adjacent).



$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \cos(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Pour l'instant, ces définitions ne s'appliquent qu'à des angles α strictement compris entre l'angle nul et l'angle droit, puisqu'il faut que α soit un angle d'un triangle rectangle. Par convention on pose $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. En effet, ces valeurs prolongent les fonctions sinus et cosinus de façon continue. On verra plus tard comment les prolonger aux angles obtus. Voyons quelques propriétés directes de ces fonctions.

Propriétés

1. $0 < \cos(\alpha) < 1$ et $0 < \sin(\alpha) < 1$ pour tout angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
2. $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$$3. \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

$$4. \cos(\alpha) = \sin(\boxed{} - \alpha).$$

La preuve de la deuxième assertion est une conséquence directe des définitions, la troisième découle directement de Pythagore et celle-ci implique la première. La quatrième est une conséquence directe des définitions.

On voudrait essayer d'exprimer le sinus et le cosinus de $\alpha + \beta$ en fonction de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$.

Proposition 3.6.1. *Pour deux angles α et β positifs et tels que $\alpha + \beta < \boxed{}$,*

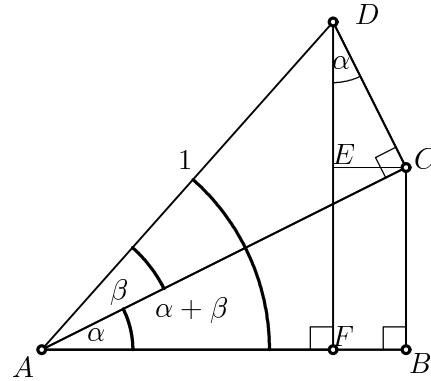
$$a) \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

$$b) \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta).$$

Démonstration

a) Supposons que le côté $[A, D]$ soit de longueur 1, alors $\cos(\alpha + \beta) = \overline{AF}$. On a aussi que $\overline{AC} = \cos(\beta)$ et que $\overline{CD} = \sin(\beta)$. Comme de plus $\overline{AB} = \overline{AC} \cos(\alpha)$ et puisque $\overline{CE} = \overline{CD} \sin(\alpha)$ (car $\widehat{EDC} = \alpha$), on a

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \overline{AB} - \overline{BF} \\ &= \overline{AC} \cos(\alpha) - \overline{EC} \\ &= \cos(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned}$$



On peut faire une preuve similaire de l'assertion b), mais on peut aussi en faire une preuve purement algébrique. En effet pour tout nombre x compris strictement entre 0 et 1, il existe un unique nombre positif y tel que $x^2 + y^2 = 1$. Comme on a déjà démontré l'assertion a), si on démontre que

$$(\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta))^2 + (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))^2 = 1.$$

L'assertion b) sera démontrée.

$$\begin{aligned} &(\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta))^2 + (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))^2 \\ &= \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta) - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) \\ &\quad + \cos^2(\alpha) \sin^2(\beta) + 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) \\ &= \cos^2(\alpha) (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) + \sin^2(\alpha) (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) \\ &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Théorème 3.6.2. *(Le théorème du sinus) Pour tout triangle ΔABC , le rapport entre le sinus d'un angle et le côté opposé à cet angle est constant. C'est-à-dire qu'on a les égalités :*

$$\frac{\sin(\alpha)}{BC} = \frac{\sin(\beta)}{AC} = \frac{\sin(\gamma)}{AB}.$$

Démonstration Traitons deux cas.

Premier cas : $\alpha, \beta, \gamma < \square$ Notons H_A et H_B les pieds des hauteurs issues de A et de B . Comme les angles sont aigus, H_A est contenu dans le segment $[B, C]$ et H_B dans $[A, C]$. Ceci permet de dire que

$$\frac{\overline{BH_B}}{\overline{AB}} = \sin(\alpha) \text{ et } \frac{\overline{BH_B}}{\overline{BC}} = \sin(\gamma) \Rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\overline{BC}} = \frac{\sin(\gamma)}{\overline{AB}}.$$

De la même manière en prenant la hauteur $[A, H_A]$, on démontre que

$$\frac{\sin(\beta)}{\overline{AC}} = \frac{\sin(\gamma)}{\overline{AB}}.$$

Deuxième cas : $\alpha > \square$, remarquons tout d'abord que l'énoncé n'est pas clair, puisque le sinus n'est défini que pour des angles plus petits que l'angle droit. Néanmoins, comme α est obtu, les angles β et γ sont aigus. On peut donc déduire comme précédemment, en prenant la hauteur issue de A , que $\sin(\gamma)/\overline{AB} = \sin(\beta)/\overline{AC}$.

Et comme H_C le pied de la hauteur issue de C n'est pas contenu dans $[A, B]$, en prenant l'angle $\widehat{H_C AC} = \alpha^s$, on obtient de même que $\sin(\alpha^s)/\overline{BC} = \sin(\beta)/\overline{AC}$. Comme α est obtu, α^s est aigu et donc $\sin(\alpha^s)$ est bien défini. On déduit donc :

$$\frac{\sin(\alpha^s)}{\overline{BC}} = \frac{\sin(\beta)}{\overline{AC}} = \frac{\sin(\gamma)}{\overline{AB}}.$$

Ceci nous incite à donner deux énoncés du théorème du sinus dans les cas où α est aigu ou obtu, mais comme le sinus d'un angle obtu, n'est pas défini, on peut le définir de telle sorte que le théorème du sinus soit vérifié pour tout α compris entre l'angle nul et l'angle plat.

Ceci revient à poser, par définition, pour $\square < \alpha < 2\square$, $\sin(\alpha) = \sin(\alpha^s)$. Cqfd

Ainsi pour étendre la validité d'un résultat (le théorème du sinus), la notion de sinus a été étendue. Ceci est très fréquent en mathématiques.

Exercice. Connaissez-vous d'autres exemples en mathématiques où on a étendu une notion de telle sorte qu'une relation reste valable?

Peut-on de même étendre le cosinus aux angles obtus?

Pour cela démontrons le théorème du cosinus. Il s'agit d'une généralisation du théorème de Pythagore.

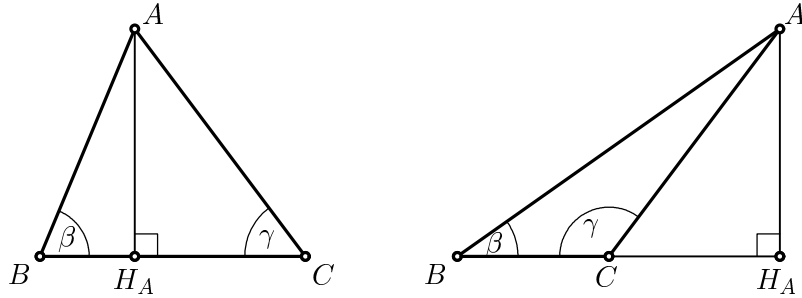
Théorème 3.6.3. (*Le théorème du cosinus*) Pour tout triangle ΔABC , on a les égalités :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC}\cos(\gamma).$$

Comme il n'y a pas de conditions sur le triangle, des relations similaires, mais où le rôle des côtés est interchangé, sont évidemment valables.

Démonstration Traitons deux cas. Premier cas : $\beta, \gamma < \square$. Soit H_A le pied de la hauteur issue de A , Comme γ et β sont aigus, H_A est contenue dans le segment $[B, C]$.

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AH_A}^2 + \overline{H_A B}^2 \\ &= \overline{AH_A}^2 + (\overline{BC} - \overline{H_A C})^2 \\ &= \overline{AH_A}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}\overline{H_A C} + \overline{H_A C}^2 \\ &= (\overline{AC}\sin(\gamma))^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}\overline{AC}\cos(\gamma) + (\overline{AC}\cos(\gamma))^2 \\ &= \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}\overline{AC}\cos(\gamma) + \overline{AC}^2\cos^2(\gamma) + \overline{AC}^2\sin^2(\gamma) \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\overline{AC}\cos(\gamma) \end{aligned}$$



Deuxième cas : $\gamma > \frac{\pi}{2}$, A nouveau, comme le cosinus d'un angle obtus n'est pas défini, on a un problème. De plus le pied H_A de la hauteur issue de A est tel que $\overline{H_A B} = \overline{H_A C} + \overline{C B}$. On peut donc faire une démonstration similaire

$$\begin{aligned}
 \overline{AB}^2 &= \overline{AH_A}^2 + \overline{H_A B}^2 \\
 &= \overline{AH_A}^2 + (\overline{BC} + \overline{H_A C})^2 \\
 &= (\overline{AC} \sin(\gamma^s))^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC} \overline{AC} \cos(\gamma^s) + (\overline{AC} \cos(\gamma^s))^2 \\
 &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{BC} \overline{AC} \cos(\gamma^s)
 \end{aligned}$$

Comme pour le sinus, si l'on veut que le théorème du cosinus soit valable dans tous les triangles, il faut poser par définition $\cos(\gamma) = -\cos(\gamma^s)$ pour $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$. Cqfd

3.7 Euclide et la géométrie dans l'espace

Revenons une dernière fois à aux éléments. Jusqu'à présent nous n'avons vu que de la géométrie plane, mais dans les derniers livres, Euclide s'intéresse à la géométrie dans l'espace. En particulier, comme dans le cas des polygones réguliers, il s'intéresse à construire des polyèdres réguliers.

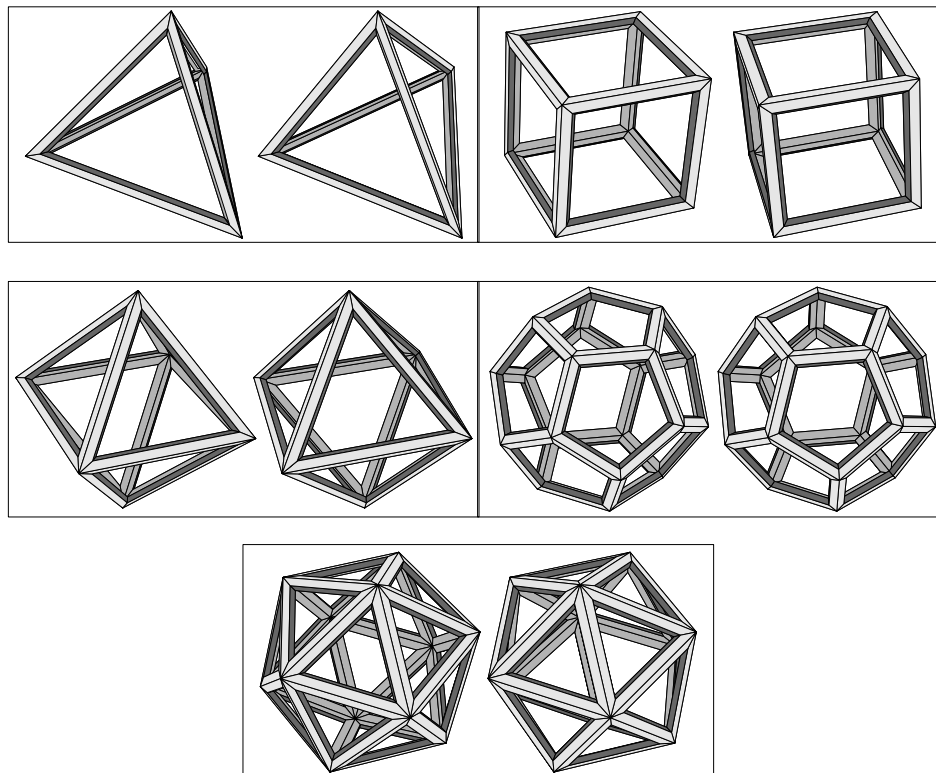
Rappelons qu'un polygone simple $A_1 \dots A_n$ est **régulier** si tous ses côtés sont isométriques de même que tous ses angles.

Heuristiquement, un polyèdre est un volume dans l'espace dont les faces sont des polygones. Dans le cas des polyèdres convexes, on peut donner une définition plus précise de la manière suivante. On remarque tout d'abord qu'un plan coupe l'espace en deux demi-espaces. Un polyèdre est donc l'intersection de n demi-espaces donnés par n plans. Pour espérer avoir un volume fini, il faut supposer $n \geq 4$.

Définition 3.7.1. Un polyèdre est **régulier**, s'il est convexe, si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si chaque sommet est contenu dans le même nombre de faces.

Il est clair qu'il existe des polygones réguliers à n côtés pour n'importe quelle valeur de n plus grande ou égale à 3 (même si tous ces polygones ne sont pas constructibles à la règle et au compas). Parmi ces polygones réguliers, quels sont ceux qui peuvent être les faces d'un polyèdre régulier?

Platon s'intéresse aux polyèdres réguliers et les lie aux éléments primitifs constituant l'univers (feu ↔ tétraèdre, terre ↔ cube, air ↔ octaèdre, éther ↔ dodécaèdre et eau ↔ icosaèdre). On appelle ces cinq polyèdres réguliers les solides platoniciens.



On en connaît donc cinq, mais y en a-t-il d'autres?

Théorème 3.7.2. *Les cinq solides platoniciens sont les seuls polyèdres réguliers.*

Démonstration Nous avons défini un polyèdre régulier comme un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers isométriques et dont chaque sommet est contenu dans le même nombre de faces. Notons (n, q) un polyèdre ayant comme face un polygone à n côtés et dont chaque sommet est contenu dans q faces. Voyons quelques conditions restrictives sur les valeurs que peuvent prendre n et q .

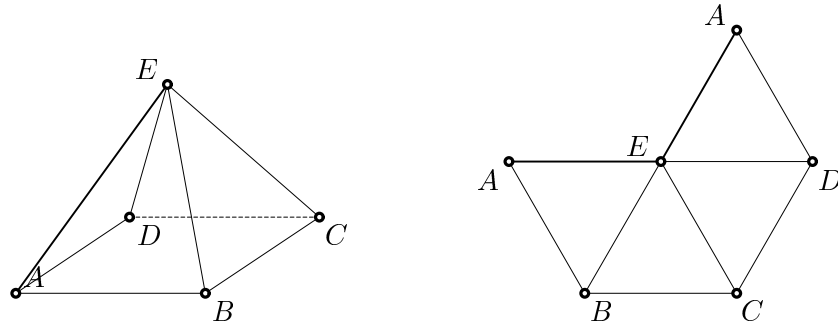
Premièrement $n \geq 3$ et $q \geq 3$. En effet, le polygone régulier ayant le moins de faces est le triangle et si un sommet est contenu dans deux faces uniquement alors ces deux faces sont confondues, puisqu'elles sont planes et ont deux arêtes communes.

Deuxièmement, dans un polygone régulier à n côtés l'angle interne $\alpha(n)$ est égal à $180(n-2)/n$ degrés. En effet le triangle constitué des sommets d'une arête et du centre O du cercle circonscrit est isocèle et d'angle en O égal à $360/n$. Comme le triangle est isocèle les deux autres angles sont égaux entre eux et valent $180(n-2)/2n$. La fonction $\alpha(n)$ est croissante en n (i.e. $n > n' \Rightarrow \alpha(n) > \alpha(n')$).

Il suffit de constater que $(n-2)/n < (n-1)/(n+1)$ puisque

$$\frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{(n+1)n} > 0.$$

Troisièmement comme un polyèdre (n, q) est convexe, $q\alpha(n) < 360$. En effet si on prend les faces touchant un sommet, on obtient une sorte de pyramide et si l'on coupe le long d'une arête, on peut aplatir la pyramide sur le plan, ce qui permet de conclure. Voir exemple de l'octaèdre.



En combinant les deuxièmes et troisièmes remarques, on obtient que

$$\frac{q \cdot 180 (n - 2)}{n} < 360 \Leftrightarrow \frac{q(n - 2)}{n} < 2.$$

Regardons quelles valeurs de q et de n sont valables.

$n = 3$ On obtient donc $q/3 < 2$ ce qui est équivalent à $q < 6$. En utilisant la première observation, on obtient donc les valeurs possibles suivantes $3 \leq q < 6$. Les polyèdres possibles pour $n = 3$ sont donc $(3, 3)$, $(3, 4)$ et $(3, 5)$.

$n = 4$ De même, $q/2 < 2$ et $3 \leq q$ impliquent $3 \leq q < 4$, ce qui donne le polyèdre possible $(4, 3)$.

$n = 5$ Idemtiquement $q \cdot 3/5 < 2$ implique $3 \leq q < 10/3 < 4$, ce qui donne le polyèdre $(5, 3)$.

$n = 6$ De même $q \cdot 4/6 < 2$ implique $3 \leq q < 3$, ce qui est impossible. Géométriquement, $n = 6$ revient à utiliser des hexagones réguliers et $q = 3$ indique que l'on devrait avoir 3 hexagones par sommet, mais ceci donne exactement le pavage du plan par des hexagones, cela ne peut donc pas être un polyèdre régulier.

$n > 6$ Comme $\alpha(n)$ est une fonction croissante, il n'existe aucun entier $q \geq 3$, tel que $q\alpha(n) < 360$. Il n'existe donc pas de polyèdre régulier dont les faces soient des polygones à plus de six côtés.

Les valeurs pour lesquelles un polyèdre régulier pourrait exister sont donc $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ et $(5, 3)$.

Il est intéressant de remarquer que pour chacune de ces paires de nombres, on connaît un polyèdre régulier : il s'agit du tétraèdre, de l'octaèdre, de l'icosaèdre, du cube et du dodécaèdre.

Mais pour l'instant nous n'avons pas montré que pour une paire (n, q) il ne peut y avoir qu'un seul polyèdre. En effet, nous n'avons que le nombre de côtés des polygones formant les faces et le nombre de polygones touchant un sommet, mais cela suffit-il pour que le nombre total

de sommets du polyèdre soit déterminé? La réponse est oui, mais nécessite de trouver une relation entre le nombre de faces f , le nombre d'arêtes a et le nombre de sommets s d'un polyèdre. Il s'agit de la caractéristique d'Euler. Nous allons supposer pour le cours que le théorème suivant est vrai et nous le démontrerons en exercice.

Théorème 3.7.3. *Tout polyèdre convexe satisfait*

$$f - a + s = 2.$$

Supposons qu'un polyèdre régulier (n, q) ait f faces, a arêtes et s sommets. Comme toutes les faces sont des n -gones et que chaque arête est contenue dans deux faces, on a la relation $a = nf/2$. De plus chaque sommet est contenu dans q faces, ce qui implique que $s = nf/q$. Par la caractéristique d'Euler on obtient

$$f + \frac{nf}{q} - \frac{nf}{2} = 2.$$

D'où on déduit que le nombre de faces d'un polyèdre régulier est uniquement déterminé par la paire (n, q) et vaut

$$f = \frac{4q}{2q + 2n - nq}. \text{ Cqfd}$$

3.8 Quelques notes historiques

Il y aurait encore beaucoup à dire sur la géométrie grecque, mais nous n'allons pas continuer dans cette voie. Néanmoins il est difficile de passer sous silence les noms d'Archimède et d'Appolonius.

Si Archimède est avant tout connu pour ces apports en physique (principe hydrostatique, leviers, etc...) et en ingénierie (vis d'Archimède, engins de guerre), on lui doit aussi des apports théoriques tels que des approximations de π via des polygones réguliers, l'équivalence entre la rectification du cercle et la quadrature du disque, ainsi que des rudiments du calcul intégral.

Appolonius est connu pour son traité sur les coniques. Nous étudierons les coniques plus tard. Il y aurait encore beaucoup à dire sur les succès de la géométrie grecque, mais certains problèmes restent toujours non résolus. C'est en particulier le cas de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, de la quadrature du disque à la règle et au compas et, dans un autre cadre, de la "démonstration" du cinquième postulat d'Euclide. Il faut attendre le développement de l'arithmétique et de la résolution d'équations par les arabes pour pouvoir approcher ces problèmes sous un angle nouveau. Il s'agit d'algébriser la géométrie, c'est-à-dire de décrire les points du plan ou de l'espace par des coordonnées (i.e. des couples ou triplets de nombres) et les objets géométriques par des ensembles de points satisfaisant certaines équations ou inéquations. Ce changement de paradigme important est systématiquement introduit par Descartes en 1664. Descartes nomme cette approche géométrie analytique.

4 La géométrie analytique

La première remarque banale en apparence est de mettre en bijection préservant les distances l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels et une droite. Explicitement, choisissons \mathcal{O} un point de la droite correspondant au nombre 0 qu'on appelle l'origine et un autre point $\mathbf{1}$ distinct de \mathcal{O} correspondant au nombre 1. Ceci revient à choisir une unité de longueur pour les segments en disant que la longueur du segment $[\mathcal{O}, \mathbf{1}]$ est égale à 1, ainsi qu'une orientation de la droite. En effet à tout point \mathcal{P} sur la droite du même côté de \mathcal{O} que $\mathbf{1}$, on associe le nombre correspondant à la longueur du segment $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$. et si \mathcal{P} n'est pas du même côté de \mathcal{O} que $\mathbf{1}$, on associe le nombre correspondant à moins une fois la longueur du segment $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$.



Souvent on associe les nombres positifs aux points à droite de l'origine et les nombres négatifs aux points à gauche de l'origine.

L'idée de Descartes fut de généraliser cette bijection entre la droite et les nombres réels à une bijection du plan (ou de l'espace) avec les couples (respectivement les triplets) de nombres réels et de remarquer que, comme tout objet géométrique est formé d'un ensemble de points du plan (ou de l'espace), cet objet peut être caractérisé par des équations. Un point du plan appartient à un objet géométrique si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation associée à l'objet.

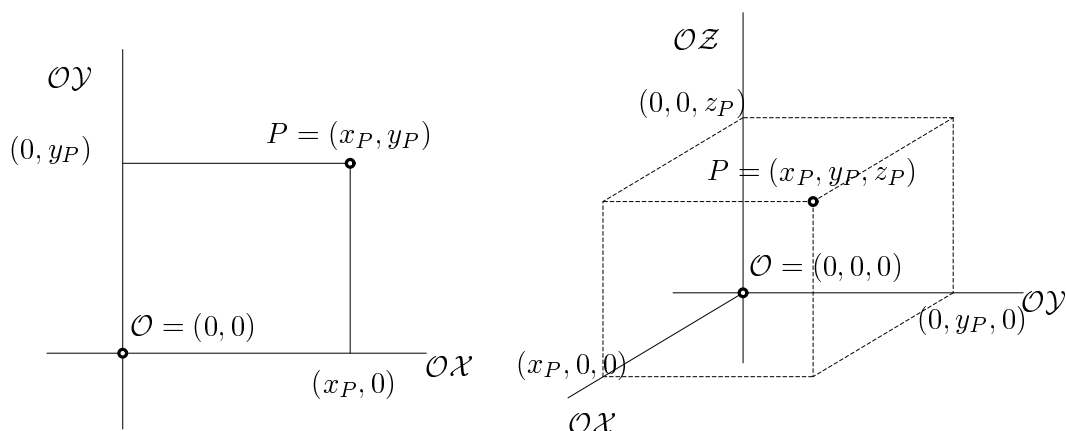
Cette idée permet de transformer un problème géométrique en un problème algébrique.

4.1 Système d'axes et coordonnées

Le plan E est en bijection avec $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Cette bijection n'est pas unique, il faut faire des choix. Tout d'abord on choisit une **origine** \mathcal{O} , puis deux axes de coordonnées \mathcal{OX} et \mathcal{OY} (c'est-à-dire deux droites distinctes passant par \mathcal{O}). On les choisit en général perpendiculaires, l'une verticale et l'autre horizontale, mais ce n'est absolument pas indispensable. Chacune de ces droites est en bijection avec \mathbb{R} et on peut choisir que \mathcal{O} correspond à 0 pour chacune de ces bijections, ainsi on peut associer le couple $(0, 0)$ à \mathcal{O} . Soit P un point du plan, il existe une unique droite d parallèle à \mathcal{OY} passant par P . Notons P_x l'intersection de d avec \mathcal{OX} (dans le cas où les axes sont perpendiculaires, P_x est le pied de la perpendiculaire à \mathcal{OX} passant par P). À P_x on associe le couple $(x_P, 0)$ où x_P est égale à la longueur du segment $[\mathcal{O}, P_x]$ munie d'un signe.

De même il existe une unique droite \tilde{d} parallèle à \mathcal{OX} passant par P . Notons P_y l'intersection de \tilde{d} avec \mathcal{OY} . À P_y on associe le couple $(0, y_P)$ où y_P est égale à la longueur du segment

$[\mathcal{O}, P_y]$ munie d'un signe. Ainsi au point P on associe le couple de nombres (x_P, y_P) .



Définition 4.1.1. Pour tout point P du plan, on appelle **coordonnées** de P relativement au système d'axes \mathcal{OX} et \mathcal{OY} le couple (x_P, y_P) . x_P est l'abscisse de P et y_P l'ordonnée de P .

Dans le cas de l'espace, on choisit trois droites \mathcal{OX} , \mathcal{OY} et \mathcal{OZ} distinctes passant toutes par une origine \mathcal{O} et telles que \mathcal{OZ} ne soit pas dans le plan E défini par \mathcal{OX} et \mathcal{OY} .

Souvent on choisit \mathcal{OX} , \mathcal{OY} et \mathcal{OZ} perpendiculaires deux à deux. De la même manière que dans le plan, pour P un point quelconque de l'espace, notons d la droite parallèle à \mathcal{OZ} passant par P et notons P_z le point d'intersection entre d et le plan E . Dans E , le point P_z a les coordonnées (x_P, y_P) . Notons z_P la longueur du segment $[P, P_z]$ avec le signe donnée par l'orientation choisie pour \mathcal{OZ} , les coordonnées de P sont donc (x_P, y_P, z_P) .

On peut ainsi décrire les objets géométriques comme un ensemble de points dont les coordonnées satisfont certaines équations.

Essayons de décrire certains objets de cette manière. Intéressons-nous aux objets de base de la géométrie euclidienne, le cercle et la droite.

4.2 Description analytique d'objets géométriques

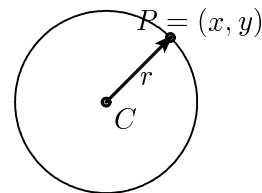
L'équation d'un cercle centré en $C = (a, b)$ de rayon r .

On sait que le cercle est l'ensemble des points du plan dont la distance à C est égale à r . Par Pythagore, la distance entre deux points P_0 et P_1 de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est égale à

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

On déduit donc que le cercle est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(C, r) &= \{P \mid \overline{PC} = r\} \\ &= \{P = (x, y) \mid \overline{PC} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\} \\ &= \{P = (x, y) \mid \overline{PC}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\} \end{aligned}$$



L'équation du cercle est donc

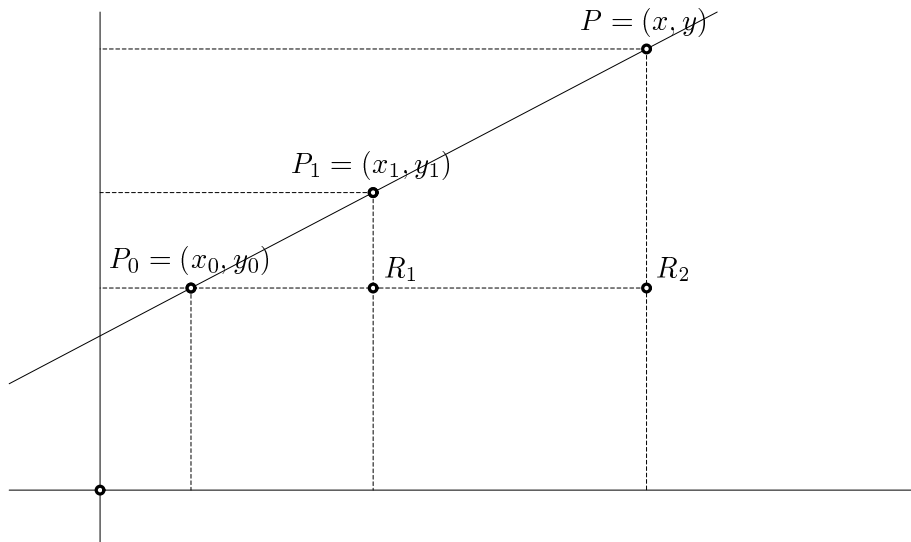
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

L'équation d'une droite passant par deux points

Soient $P_0 = (x_0, y_0)$ et $P_1 = (x_1, y_1)$ deux points distincts du plan, on sait qu'il existe une unique droite passant par ces deux points. Si les deux points ont la même abscisse ($x_0 = x_1$), la droite est verticale (ou plus généralement parallèle au deuxième axe de coordonnées) et donc tous les points de cette droite ont la même abscisse. La droite se décrit donc comme $\{P = (x, y) \mid x = x_0\}$ et l'équation de cette droite est $x = x_0$.

De manière similaire, si les deux points ont même ordonnée ($y_0 = y_1$), la droite est horizontale et son équation est $y = y_0$.

Supposons que la droite ne soit pas parallèle aux axes (ce qui revient à supposer que les deux points ont des abscisses et des ordonnées distinctes). Soit P un point quelconque de la droite de coordonnées (x, y) .



Les triangles $\Delta P_0 R_1 P_1$ et $\Delta P_0 R_2 P$ sont semblables, donc par Thalès, on obtient

$$\frac{\overline{R_1 P_1}}{\overline{R_1 P_0}} = \frac{\overline{R_2 P}}{\overline{R_2 P_0}} \Leftrightarrow \frac{|y_1 - y_0|}{|x_1 - x_0|} = \frac{|y - y_0|}{|x - x_0|}.$$

Pour éliminer les valeurs absolues, il faut différencier les cas. Supposons que $x_0 < x_1$ et $y_0 < y_1$. Si P est du même côté de P_0 que P_1 , alors toutes les différences sont positives et l'équation devient

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Si P_0 est entre P et P_1 , l'équation devient

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y}{x_0 - x} \Leftrightarrow y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

On traite similairement les cas où $x_0 < x_1$ et $y_0 > y_1$. Et on obtient l'équation explicite de la droite

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Le terme $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ est appelé la pente de la droite. Cette équation n'est pas valable pour une droite verticale, mais elle redonne bien la même équation dans le cas d'une droite horizontale. Est-il possible de trouver une équation qui permet de décrire tous les types de droites?

L'équation générale d'une droite est donnée par l'équation

$$ax + by + c = 0 \text{ avec } a \text{ ou } b \neq 0.$$

Si b est non nul, alors on retrouve bien l'équation précédente $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Remarquons aussi que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente. La preuve de cette remarque est facile et laissée en exercice.

Question : Caractériser de manière similaire le fait que deux droites soient perpendiculaires. Cette manière d'algébriser la géométrie permet de donner des formules algébriques pour toutes les constructions à la règle et au compas.

Par exemple étant donné une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et un point P de coordonnées (X_0, Y_0) , la distance entre la droite et le point vaut

$$d(P, d) = \sqrt{\frac{(\alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma)^2}{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

La preuve de ceci est laissée en exercice.

4.3 Un théorème de Descartes

A priori cette idée d'introduire des équations pour décrire des objets géométriques à l'air banale, mais ce fut le premier pas pour montrer que les trois fameux problèmes grecs de constructions à la règle et au compas étaient impossibles.

Pour cela il faut démontrer le théorème de Descartes suivant qui permet de caractériser les points constructibles à la règle et au compas à l'aide d'un critère algébrique sur les composantes.

Théorème 4.3.1. *Soient les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Un point de coordonnées (α, β) est constructible à la règle et au compas si et seulement si les nombres α et β s'écrivent comme expression finie ne contenant que des nombres entiers, les quatre opérations $(+, -, *, /)$ ainsi que le symbole $\sqrt{\quad}$.*

Pour un nombre x décrit par une expression E , notons $\#(E)$ le nombre de termes dans l'expression. Par exemple $\#(2) = 1$, $\#(\sqrt[3]{3}) = 2$, $\#(4/3 + 2/3) = 7$ et $\#(\sqrt[2]{2/3}) = 4$. Il est à remarquer que le nombre de termes dépend de l'expression et non pas seulement du nombre décrit (en effet $2 = 4/3 + 2/3$).

La démonstration de ce résultat se fait par récurrence.

Démonstration "⇐" On suppose que α et β sont des nombres réels qui peuvent s'écrire comme des expressions ne contenant que des nombres entiers, les quatre opérations et le symbole racine carrée, et il faut démontrer que le point de coordonnées (α, β) peut être construit à la

règle et au compas (i.e. que l'on peut construire un segment à la règle et au compas dont la longueur vaut α et de même pour β). Il suffit de le faire pour α .

Démontrons cette implication par récurrence sur le nombre de termes dans l'expression représentant α .

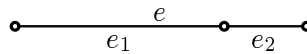
Le premier pas de récurrence (ancrage) dit que toute expression ne contenant qu'un seul terme est constructible à la règle et au compas. Or les expressions ne contenant qu'un terme et représentant un nombre sont uniquement de la forme $n \in \mathbb{N}$. Tout nombre entier peut être construit, puisque les points P_0 (resp. P_1) de coordonnées $(0, 0)$ (resp. $(1, 0)$) sont donnés. Le segment $[P_0, P_1]$ est de longueur 1. En reportant ce segment n fois sur la droite P_0P_1 on obtient un segment de longueur n .

Pas d'induction :

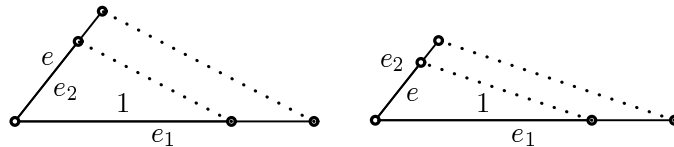
Hypothèse d'induction : Toute expression e contenant au plus n termes est constructible à la règle et au compas.

A voir : Toute expression e contenant $n + 1$ termes est constructible à la règle et au compas.

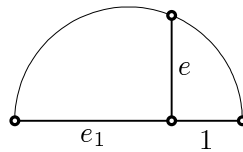
- i) Si $e = e_1 + e_2$ ou $e = e_1 - e_2$ et que $\#(e) = n + 1$, alors $\#(e_1) + \#(e_2) = n$ et donc, par hypothèse d'induction, e_1 et e_2 sont constructibles à la règle et au compas. Comme de plus, l'addition et la soustraction sont évidentes par les axiomes d'Euclide. e est constructible à la règle et au compas.



- ii) Si $e = e_1 * e_2$ ou $e = e_1/e_2$ et que $\#(e) = n + 1$, de la manière qu'en i), e_1 et e_2 sont constructibles à la règle et au compas. En employant le théorème de Thalès $e = e_1 * e_2$ et $e = e_1/e_2$ le sont aussi (par Thalès).



- iii) Si $e = \sqrt[n]{e_1}$ et $\#(e) = n + 1$, alors $\#(e_1) = n$ et e_1 est donc constructible. Par le théorème de la hauteur, si e_1 est constructible alors $e = \sqrt[n]{e_1}$ l'est aussi.



Démontrons maintenant l'implication réciproque.

" \Rightarrow " On suppose que α et β sont les coordonnées d'un point constructible à la règle et au compas et on doit démontrer qu'il existe des expressions ne contenant que des nombres entiers, les quatre opérations et le symbole racine carrée représentant α et β .

Construire à la règle et au compas, veut dire que l'on obtient le point $P = (\alpha, \beta)$, partant des points $(0, 0)$ et $(0, 1)$, par une suite finie d'intersections d'une droite avec une autre droite, d'une droite avec un cercle et de deux cercles.

Notre démonstration se fait par récurrence sur le nombre de pas de la construction. Remarquons tout d'abord qu'étant donnés les points $(0, 0)$ et $(0, 1)$, on peut construire tous les points à coordonnées entières et même à coordonnées rationnelles par Thalès. De plus un point (α, β) est constructible à la règle et au compas s'il peut être obtenu comme

1. l'intersection de deux droites,
2. l'intersection d'une droite et d'un cercle,
3. ou comme l'intersection de deux cercles.

Étudions les analogues algébriques de ces trois cas. Premièrement si le point est l'intersection de deux droites d_1 et d_2 données par quatre points $Q_i = (x_i, y_i)$ pour $i = 1, \dots, 4$ (i.e $d_1 = Q_1Q_2$ et $d_2 = Q_3Q_4$) tels que les coordonnées ont la forme algébrique voulue. Alors les équations des droites d_1 et d_2 sont données par

$$d_1 : \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \quad d_2 : \quad y = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}(x - x_3) + y_3$$

On en déduit que l'intersection des deux droites a comme abscisse x une expression fractionnaire en les $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$ et y_4 . Donc x a la forme algébrique voulue.

En remplaçant la valeur de x dans l'équation de d_1 , on obtient de même une expression algébrique pour y . Remarquons que si une droite contient deux points dont les coordonnées sont des expressions ne contenant que des nombres entiers, les quatre opérations et la racine carrée, alors si l'équation de la droite est $y = ax + b$, les paramètres a et b sont aussi de cette forme.

Deuxièmement supposons que le point $P = (\alpha, \beta)$ soit l'intersection d'un cercle \mathcal{C} de rayon r centré au point de coordonnées $Q = (c, d)$ et d'une droite δ d'équation $y = ax + b$. Comme l'équation du cercle est $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$, on obtient en substituant $y = ax + b$ dans l'équation du cercle et en développant :

$$(1 + a^2)x^2 + (2ab - 2c - 2ad)x + (c^2 + b^2 + d^2 - 2db - r^2) = 0.$$

Par la formule de résolution d'une équation du second degré, on obtient les valeurs de x :

$$x_{1,2} = \frac{-(2ab - 2c - 2ad) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 + a^2)},$$

où $\Delta = (2ab - 2c - 2ad)^2 - 4(1 + a^2)(c^2 + b^2 + d^2 - 2db - r^2)$ est le discriminant de l'équation. Pour que l'équation ait des solutions réelles il faut et suffit que $\Delta \geq 0$. En développant on obtient que

$$\frac{\Delta}{4} = r^2(1 + a^2) - (ac + b - d)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \geq \frac{(ac + b - d)^2}{(1 + a^2)} = \text{dist}(\delta, Q)^2.$$

Ce qui montre bien que les intersections entre la droite δ et le cercle \mathcal{C} existent si et seulement si $\Delta \geq 0$. Dans le cas où ces intersections existent et si les nombres a, b, c, d et r peuvent s'écrire comme expression ne contenant que des entiers, les quatre opérations et la racine carrée, alors x s'écrit aussi sous une telle forme et par suite $y = ax + b$ aussi.

Troisièmement si le point est l'intersection de deux cercles, il suffit de se rendre compte que si les deux cercles s'intersectent alors leurs points d'intersections définissent une droite dont on peut calculer l'équation (si les deux points d'intersection sont confondus, la droite est tangente).

L'étude de l'intersection de deux cercles peut donc se ramener au cas de l'intersection d'une droite et d'un cercle vu précédemment. Il faut néanmoins se convaincre que les paramètres de la droite d'intersection ont bien la forme algébrique voulue. Comme les centres des cercles est de la forme algébrique voulue, la pente de la droite entre eux l'est aussi. Ceci démontre déjà que la droite passant par les intersections des deux cercles à une pente ayant la bonne forme algébrique. Il reste à montrer qu'un point sur cette droite à des coordonnées de la bonne forme. Le point d'intersection entre la droite reliant les deux centres et celle reliant les deux intersections satisfait cela.

Pour conclure, il faut donc supposer par induction que le point $P = (\alpha, \beta)$ se construit en $n+1$ pas élémentaires. Si P est obtenu comme l'intersection de deux droites alors la construction de chacune d'elle se fait en au plus n pas et donc, par hypothèse de récurrence, les deux droites ont des équations dont les paramètres sont des expressions ne contenant que des entiers, les quatre opérations et la racine carrée. Par le point 1, cela implique que les coordonnées de P sont aussi de telles expressions. Dans le cas où P est l'intersection d'un cercle et d'une droite (respectivement de deux cercles), on conclut de façon similaire en utilisant le cas 2 (respectivement le cas 3). \square

Pour montrer que la duplication du cube n'est pas constructible à la règle et au compas il faut donc montrer que $\sqrt[3]{2}$ ne peut pas s'écrire comme une expression ne contenant que des entiers, les quatre opérations et la racine carrée. De même pour la trisection de l'angle il faut trouver un angle α dont la trisection induit une équation de degré trois via des formules trigonométriques et que cette équation n'a pas de solution rationnelle. Ceci peut être fait, mais sort du cadre strict de la géométrie. Nous ne le ferons donc pas. Pour la quadrature du cercle, Lindemann a démontré à la fin du 19e siècle que π n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers (on dit que π est transcendant) et donc ne peut pas s'écrire comme une expression ne contenant que des entiers, les quatre opérations et la racine carrée. Ces résultats impliquent qu'on ne peut pas construire à la règle et au compas des solutions aux trois grands problèmes des Grecs.

Revenons à l'aide de ce nouvel outil sur certaines constructions euclidiennes et en particulier sur la première proposition d'Euclide. On se souvient que certains commentateurs ont remarqué qu'Euclide n'avait pas donné de postulat pour l'existence de l'intersection de deux cercles. Rappelons que pour Euclide, les seuls nombres sont les entiers et les rationnels. Ceci nous amène à une question simple :

Question : Peut-on construire un triangle équilatéral dont les coordonnées sont rationnelles ? La réponse est négative dans un système de coordonnées orthonormées. Pour le démontrer, il faut le lemme suivant.

Lemme. *Soit d une droite d'équation $y = ax + b$ avec $a \notin \mathbb{Q}$, alors il existe au plus un point P sur la droite à coordonnées rationnelles.*

Démonstration Par contraposée, supposons que deux points $P = (x_0, y_0)$ et $Q = (x_1, y_1)$ sont à coordonnées rationnelles (i.e. x_0, y_0, x_1 et y_1 appartiennent à \mathbb{Q}). alors la pente de la droite est donnée par $a = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ qui est un nombre rationnel. Cqfd

Pour démontrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral à coordonnées rationnelles, il suffit de remarquer que si deux points de coordonnées rationnelles forment la base du triangle, alors la pente de la droite passant par ces deux points est rationnelle et comme les trois angles d'un triangle équilatéral valent 60° on sait que la tangente d'un tel angle vaut $\sqrt{3}$ qui n'est pas rationnel. Comme l'angle entre l'horizontale et la droite passant par un des sommet

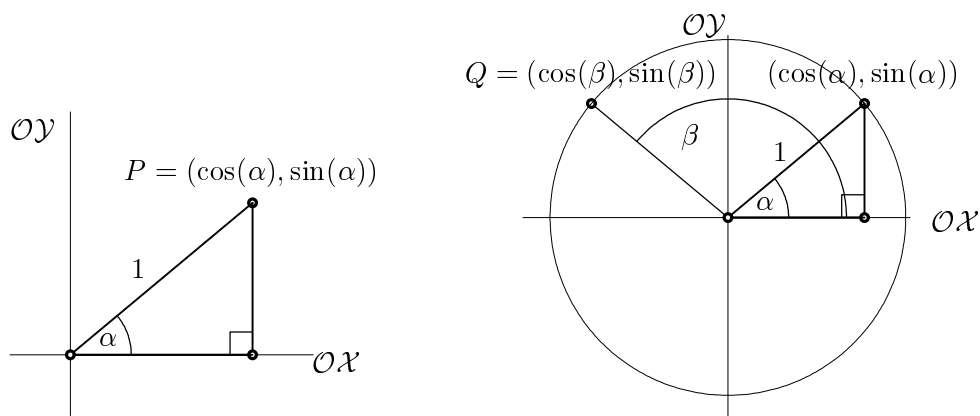
de la base et le troisième sommet du triangle est la somme de l'angle α fait par la base et l'horizontale et 60° . Et puisque la pente d'une droite correspond à la tangente de cette droite avec l'horizontale, la pente du côté reliant un sommet de la base avec le troisième sommet du triangle vaut

$$\tan(\alpha + 60^\circ) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(60^\circ)}{1 + \tan(\alpha)\tan(60^\circ)}.$$

Ce qui implique que $\tan(\alpha + 60^\circ)$ n'est pas rationnel, sinon $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$ le serait aussi. Par le lemme le sommet du triangle équilatéral ne peut pas avoir de coordonnées rationnelles puisque qu'il appartient à une droite de pente irrationnelle ayant un autre point à coordonnées rationnelles. Ceci implique qu'il n'existe pas de triangle équilatéral à coordonnées rationnelles dans un système d'axes orthonormés.

4.4 Un petit retour sur la trigonométrie.

Les fonctions trigonométriques avaient été introduites tout d'abord via Thalès (les rapports entre les côtés d'un triangle rectangle ne dépendant que des angles du triangle). Cette approche limite la définition des fonctions trigonométriques aux angles aigus. On a vu comment les prolonger via certains théorèmes, mais l'introduction des coordonnées permet de justifier ces extensions naturellement. Puisque les fonctions trigonométriques ne dépendent que des angles, on peut normaliser le triangle rectangle en choisissant l'hypoténuse de longueur 1. De plus les axes de coordonnées peuvent être choisis de telle sorte que l'une des cathètes du triangle soit sur le premier axe (et l'un de ses sommets confondus avec l'origine) et l'autre soit parallèle au deuxième.



Avec ces choix, si l'angle du triangle à l'origine vaut α , les coordonnées du sommet du triangle hors du premier axe valent $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Ceci permet de définir la valeur du sinus et du cosinus pour des angles compris entre 0 et π ou, en terme de points sur le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1, avec des points à coordonnées positives. Ce cercle a une importance particulière.

Définition *Le cercle de rayon 1 centré à l'origine est appelé **cercle trigonométrique**.*

On peut choisir un point quelconque Q sur le cercle trigonométrique. Ce point détermine un unique angle positif β autour de l'origine partant du point $(1,0)$ et arrivant au point Q . Pour

coïncider avec la définition des fonctions trigonométriques pour des angles aigus, c'est-à-dire pour des points à coordonnées positives, on pose que les coordonnées de Q sont égales à $(\cos(\beta), \sin(\beta))$. Ceci permet de définir les fonctions trigonométriques pour tout angle centré à l'origine et ayant un de ses côtés sur la partie positive du premier axes de coordonnées. Mais tout angle du plan définit un unique point sur le cercle trigonométrique quand on le reporte de telle sorte qu'une des demi-droites le définissant coïncide avec la partie positive du premier axe de coordonnée. Ceci permet donc de définir la valeur des fonctions trigonométriques pour tous les angles du plan. On peut se convaincre que toutes les formules démontrées dans le cas des angles aigus se prolongent au cas des angles quelconques.

5 La géométrie vectorielle

5.1 Relations et classes d'équivalence

Soit X un ensemble. Formellement une **relation** \mathcal{R} sur X est la donnée d'un sous-ensemble non vide de $X \times X = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}$. Soient x et y deux éléments de X . Si x est lié à y par la relation \mathcal{R} (formellement si (x, y) se trouve dans le sous-ensemble définissant la relation \mathcal{R}), on note ce lien $x\mathcal{R}y$. On dit que la relation \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si

- (i) $\forall x \in X, x\mathcal{R}x$, (réflexivité)
- (ii) si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$, (symétrie)
- (iii) si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$. (transitivité)

Exemple 5.1.1.

- 1) Soit X l'ensemble des segments du plan Π , $X = \{[P, Q] \mid P, Q \in \Pi\}$. La relation \mathcal{R} définie par $[P, Q]\mathcal{R}[R, S] \Leftrightarrow \overline{PQ} = \overline{RS}$ est une relation d'équivalence sur X .
- 2) Soit $X = \mathbb{N}$. Les relations suivantes ne sont pas des relations d'équivalence sur X :

$$x\mathcal{R}_1y \Leftrightarrow x < y \text{ est ni réflexive, ni symétrique.}$$

$$x\mathcal{R}_2y \Leftrightarrow |x - y| = 1 \text{ est ni réflexive, ni transitive.}$$

Soit X un ensemble, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X , et x un élément de X . On appelle l'ensemble $\mathcal{C}_x = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}$ la **classe d'équivalence** de x . On la note également souvent \bar{x} .

Proposition 5.1.2. *Les classes d'équivalence partitionnent l'ensemble X , c'est-à-dire qu'elles sont disjointes et leur réunion est égale à X .*

Démonstration. Il est clair que la réunion de toutes ces classes contient X puisque tout élément de X appartient à une classe. Chaque classe étant un sous-ensemble de X , leur réunion l'est aussi. Il en résulte que la réunion des classes d'équivalence donne exactement X .

Supposons que deux classes \mathcal{C}_x et \mathcal{C}_y ne soient pas disjointes, il s'agit de montrer qu'elles sont égales. Soit $z_0 \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$, $x\mathcal{R}z_0$ et $y\mathcal{R}z_0$, par symétrie $z_0\mathcal{R}y$ puis par transitivité $x\mathcal{R}y$. Pour tout $z \in \mathcal{C}_x$, $z\mathcal{R}x$ et comme $x\mathcal{R}y$ on a de nouveau par transitivité, $z\mathcal{R}y$, ce qui implique $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y$. De la même manière on montre $\mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x$ et obtient donc l'égalité entre les deux classes. Cqfd

Exemple 5.1.3. Pour la relation d'équivalence de l'exemple 5.1.1 la classe d'équivalence d'un segment $[P, Q]$ du plan Π est l'ensemble $\mathcal{C}_{[P, Q]} = \{[R, S] \mid R, S \in \Pi \text{ et } \overline{RS} = \overline{PQ}\}$.

Soit X un ensemble et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . On appelle **espace quotient** l'ensemble des classes d'équivalence $\{\mathcal{C}_x \mid x \in X\}$, noté X/\mathcal{R} .

Exemple 5.1.4. 1) Soit la relation d'équivalence \mathcal{R}_3 sur l'ensemble \mathbb{Z} définie par $m\mathcal{R}_3n \Leftrightarrow m$ et n ont même reste de division par 3. L'espace quotient \mathbb{Z}/\mathcal{R}_3 , noté également $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Z}_3 est $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Remarquons qu'il existe des représentants "canoniques" (0, 1 et 2) pour les classes d'équivalence.

- 2) Soit $F = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ l'ensemble des fractions et la relation d'équivalence \mathcal{R} sur F définie par $\frac{m}{n} \mathcal{R}_s \frac{r}{s} \Leftrightarrow ms = nr$.
L'espace quotient $F/\mathcal{R} = \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels. Ici il y a également des représentants "canoniques", les fractions réduites.

Remarque 5.1.5. Une opération sur l'ensemble de départ X ne permet pas toujours de définir une opération sur l'espace quotient. Dans le cas des fractions

- 1) Pour que l'addition usuelle définisse une opération sur les classes d'équivalence, il faut que si $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ et $\frac{k}{l} = \frac{m}{n}$, alors $\frac{p}{q} + \frac{k}{l} = \frac{r}{s} + \frac{m}{n}$.
Or $\frac{p}{q} + \frac{k}{l} = \frac{r}{s} + \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{lp+kq}{lq} = \frac{nr+ms}{ns} \Leftrightarrow (lp+kq)ns = (nr+ms)lq \Leftrightarrow lnps + knqs = lnqr + lmqs$ qui est vérifié puisque $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ et $\frac{k}{l} = \frac{m}{n} \Rightarrow ps = qr$ et $kn = lm$.
- 2) L'addition que pratiquent malheureusement certains de nos élèves $\frac{p}{q} \boxplus \frac{k}{l} = \frac{p+k}{q+l}$, ne définit pas d'opération sur l'espace quotient.

5.2 Flèches et vecteurs

Soit E le plan ou l'espace et soient P et Q deux points de E . La **flèche** (P, Q) est le segment orienté allant de P à Q .

On dit que deux flèches (P, Q) et (R, S) sont **équivalentes**, noté $(P, Q) \equiv (R, S)$, si elles ont même longueur, même sens et même direction.

Précisons un peu ce que l'on entend par là. Avoir la même longueur veut évidemment dire que $\overline{PQ} = \overline{RS}$. Supposons P différent de Q et R différent de S . Avoir la même direction et même sens ne peuvent se définir que si P est différent de Q (et donc R différent de S). Avoir la même direction revient à dire que les droites PQ et RS sont parallèles. Avoir le même sens est visuellement clair, mais pour formaliser cette notion on peut dire que, si les deux conditions précédentes sont déjà remplies, (P, Q) et (R, S) ont même sens si $PQSR$ est un parallélogramme. Dans le cas où les deux flèches n'ont pas le même sens, le quadrilatère $PQSR$ n'est pas simple. Il est intéressant de remarquer que cette condition "d'être un parallélogramme" implique toutes les conditions précédentes, on peut donc formellement définir :

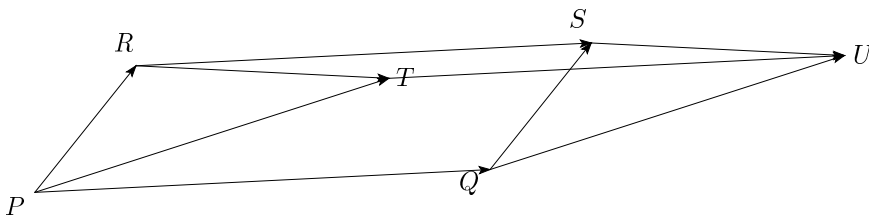
Définition 5.2.1. Les flèches (P, Q) et (R, S) sont en relation si

Soit $P = Q$ et $R = S$;

Soit $P \neq Q$, $\overline{PQ} = \overline{RS}$, $PQ \parallel RS$ et $PQSR$ est un parallélogramme.

Proposition 5.2.2. Ceci est bien une relation d'équivalence.

Démonstration. La seule difficulté de cette preuve est dans la transitivité du sens. Si (P, Q) et



(R, S) ont même sens et que (R, S) et (T, U) ont aussi même sens, alors $PQSR$ et $RSUT$ sont des parallélogrammes. Il faut donc se convaincre que $PQUT$ est aussi un parallélogramme. Comme PQ est parallèle à RS et que RS est parallèle à TU , il est clair que PQ est parallèle à TU . Il faut donc montrer que PT est aussi parallèle à QU .

Deux cas se présentent :

Soit tous les points P, Q, R, S, T et U sont tous dans un même plan. Ce cas se présente évidemment toujours si l'on travaille dans le plan. Par le théorème des angles alternes internes (utilisé deux fois) les angles \widehat{QSU} et \widehat{PRT} sont isométriques. Et par CAC, les triangles ΔQSU et ΔPRT sont isométriques. Ceci permet de conclure, à nouveau par le théorème des angles alternes internes que PT et QU sont parallèles.

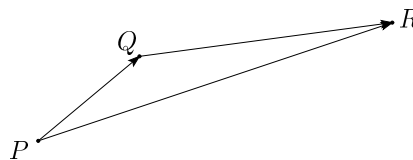
Soit les points Q, S et U définissent un plan π distinct de celui défini par P, R et T , que l'on note π' . Comme $\overline{PQ} = \overline{RS} = \overline{TU}$ et que les droites PQ, RS et TU sont parallèles, les plans π et π' sont parallèles. Ceci implique que les droites QU et PT ne se coupent pas. Le quadrilatère $PQUT$ est donc un parallélogramme. \square

La classe d'équivalence d'une flèche (P, Q) est appelé le **vecteur** \overrightarrow{PQ} . Les flèches dégénérées en un point forment la classe $\{(P, P) \mid P \in E\}$, notée $\vec{0}$ et appelée **vecteur nul**. L'ensemble des vecteurs (l'espace quotient E/\equiv) se notera V . Dans le cas particulier où E est le plan on parlera de V_2 .

On peut définir de la même manière une relation d'équivalence entre flèches dans l'espace, il faudrait néanmoins démontrer que c'est une relation d'équivalence. La preuve de ceci est différente et est omise dans ce cours. Dans le cas de l'espace, on note l'ensemble des vecteurs V_3 .

5.3 Addition vectorielle

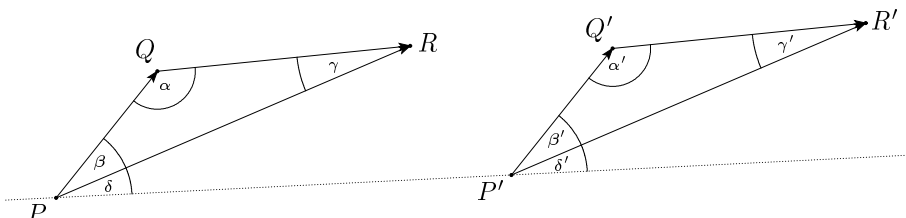
Soient \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs. Soit (P, Q) une flèche représentant \vec{v} et soit R l'extrémité de la flèche représentant \vec{w} d'origine Q . Le vecteur $\vec{v} + \vec{w}$ est la classe d'équivalence de la flèche (P, R) .



Proposition 5.3.1. *L'addition sur V est bien définie.*

Démonstration. On doit montrer que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \text{ et } \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{Q'R'} \Rightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$$



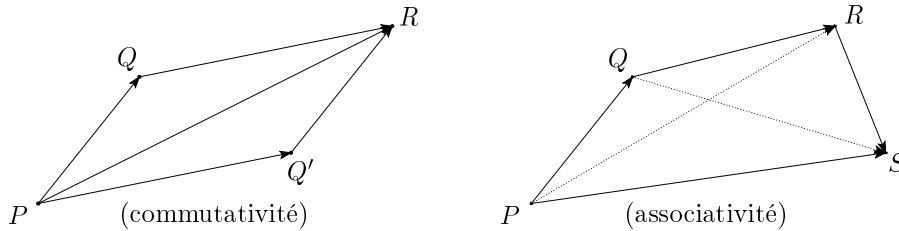
Par hypothèse les flèches (P, Q) et (P', Q') ainsi que (Q, R) et (Q', R') ont même direction, même sens et même longueur. Il suit de $PQ \parallel P'Q'$ et $QR \parallel Q'R'$ que $\alpha = \alpha'$. Par CAC, les triangles ΔPRQ et $\Delta P'R'Q'$ sont isométriques ce qui implique que (P, R) et (P', R') ont

même longueur. De plus $PQ \parallel P'Q' \Rightarrow \beta + \delta = \beta' + \delta'$ et comme $\beta = \beta'$ ceci implique $\delta = \delta'$, c'est-à-dire (P, R) et (P', R') ont même direction. Finalement le sens des flèches (P, R) et (P', R') est le même puisque celui des flèches (P, Q) et (P', Q') ainsi que celui de (Q, R) et (Q', R') l'est. Cette preuve est identique à celle de la transitivité d' "avoir le même sens" de la proposition précédente. \square

Proposition 5.3.2. *Pour tout $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V$*

- 1) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$, (commutativité)
- 2) $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$, (associativité)
- 3) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
- 4) il existe $\vec{v}^- \in V$ tel que $\vec{v} + \vec{v}^- = \vec{0}$. On appelle \vec{v}^- l'opposé de \vec{v} , noté $-\vec{v}$.

Démonstration.



Soient les flèches (P, Q) représentant \vec{v} et (Q, R) représentant \vec{w} . Par définition de l'addition (P, R) représente $\vec{v} + \vec{w}$. Soit (P, Q') la flèche représentant \vec{w} ayant son origine en P . Puisque $(P, Q') \equiv (Q, R)$, $PQ'RQ$ forme un parallélogramme et donc $(P, Q) \equiv (Q', R)$, c'est à dire (Q', R) représente \vec{v} . Par définition de l'addition de vecteurs (P, R) représente $\vec{w} + \vec{v}$. Par la proposition 5.1.2 $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ ce qui démontre le point 1).

Soient maintenant les flèches (P, Q) , (Q, R) et (R, S) représentant respectivement \vec{v} , \vec{w} et \vec{u} . Par définition de l'addition (P, R) est un représentant de $\vec{v} + \vec{w}$ et donc (P, S) un représentant de $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$. De même (Q, S) est un représentant de $\vec{w} + \vec{u}$ et (P, S) est un représentant de $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$. Par la proposition 5.1.2. $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$.

Soit pour le point 3) la flèche (P, Q) représentant \vec{v} . Le vecteur nul $\vec{0}$ a été défini comme la classe d'équivalence des flèches dégénérées en un point, son représentant d'origine Q est donc la flèche (Q, Q) . Par définition de l'addition, la flèche (P, Q) est un représentant de $\vec{v} + \vec{0}$ et donc $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ par la proposition 5.1.2.

Le point 4) finalement se démontre en remarquant que pour (P, Q) représentant \vec{v} , (Q, P) est un représentant du vecteur \vec{v}^- cherché. \square

5.4 Multiplication par un réel

Exemple 5.4.1. Soit $\vec{v} \in V$, considérons le vecteur $\vec{v} + \vec{v}$. Soient (P, Q) et (Q, R) deux représentants de \vec{v} . Par définition de l'addition (P, R) est un représentant de $\vec{v} + \vec{v}$. Puisque P, Q et R sont alignés et que $\overline{PQ} = \overline{QR}$, la flèche (P, R) a même direction et sens que (P, Q) et est de longueur double. On notera par $2\vec{v}$ le vecteur $\vec{v} + \vec{v}$.

Soient plus généralement $\vec{v} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda > 0$, $\lambda \vec{v}$ est l'unique vecteur dont les représentants sont parallèles à ceux de \vec{v} , de même sens et dont la longueur est multiplié par le facteur λ .

Si $\lambda < 0$, $\lambda \vec{v}$ est l'unique vecteur dont les représentants sont parallèles à ceux de \vec{v} , de sens opposé et dont la longueur est multiplié par le facteur $|\lambda|$.

Si $\lambda = 0$, $\lambda \vec{v} = 0 \vec{v} = \vec{0}$.

Remarque 5.4.2. Soit $\vec{v} \in V$ un vecteur. Les flèches qui représentent \vec{v} ont toutes même longueur et on peut donc définir la **longueur** ou **norme** du vecteur \vec{v} , notée $\|\vec{v}\|$ comme la longueur de ses représentants. Pour la multiplication par un réel λ on obtient la relation

$$\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|.$$

Proposition 5.4.3. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{v}, \vec{w} \in V$

- 1) $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$,
- 2) $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$,
- 3) $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$,
- 4) $1\vec{v} = \vec{v}$.

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Remarque 5.4.4. Tout ensemble V munie d'une addition et d'une multiplication par des réels satisfaisant

- A1) Pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$,
- A2) pour tout $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V$, $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$,
- A3) il existe $\vec{0} \in V$ tel que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$, pour tout $\vec{v} \in V$,
- A4) pour tout $\vec{v} \in V$ il existe $\vec{v}_- \in V$ tel que $\vec{v} + \vec{v}_- = \vec{0}$.
- M1) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{v} \in V$, $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$,
- M2) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{v} \in V$, $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$,
- M3) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$,
- M4) pour tout $\vec{v} \in V$, $1\vec{v} = \vec{v}$.

est un **espace vectoriel réel**.

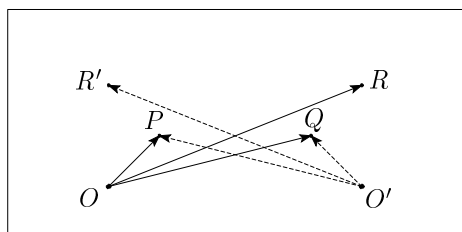
Même si les exemples que l'on a vu d'espaces vectoriels sont des classes de flèches et sont donc très liés à la géométrie, ce ne sont de loin pas les seuls. La notion d'espace vectoriel est certainement une des notions clé dans les mathématiques contemporaines. Voici deux exemples d'espace vectoriels.

Exemple. 1. \mathbb{R} est un espace vectoriel sur lui-même.

2. Pour n entier, l'ensemble des polynômes de degré plus petits ou égaux à n à coefficients réels. On rappelle qu'un polynôme de degré n est une expression de la forme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ avec les a_i réels et $a_n \neq 0$.

5.5 Lien avec la géométrie analytique

Remarque 5.5.1. Jusqu'ici dans le texte la distinction entre flèches (représentants) et vecteurs (classes d'équivalence) a été claire. Par la suite il y aura des abus de langage, dans le sens que l'on désignera par "vecteur \overrightarrow{AB} dans le plan" le représentant privilégié du vecteur \overline{AB} constitué de la flèche d'origine A et d'extrémité B .

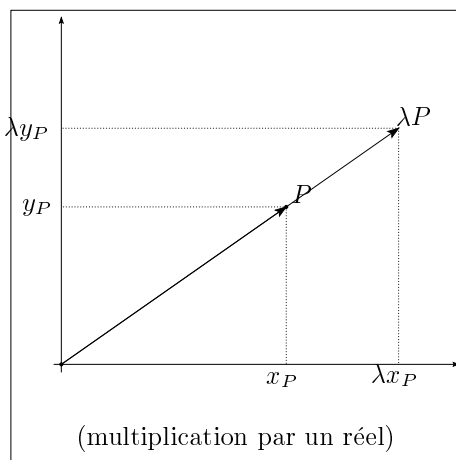
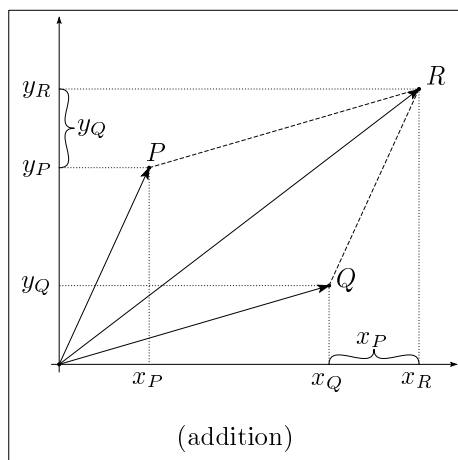


L'addition de deux points P et Q du plan n'est pas définie. Par contre si un point du plan est fixé comme origine O , il est naturel de représenter les points P et Q par les vecteurs \overrightarrow{OP} et \overrightarrow{OQ} respectivement. On peut alors additionner ces deux vecteurs pour obtenir \overrightarrow{OR} . Il faut remarquer que le résultat de cette addition, et donc le point R obtenu, dépendent du choix de l'origine. Dès qu'une origine O est fixée, $(\Pi, O) \cong V_2$, car tout vecteur de V_2 peut être représenté par la flèche d'origine O . Si, de plus des axes de coordonnées sont fixés, on

peut alors identifier

$$(\Pi, O) \cong V_2 \cong \mathbb{R}^2.$$

L'addition vectorielle correspond alors à l'addition des coordonnées, et la multiplication par un réel λ à la multiplication des coordonnées par λ .



Remarque 5.5.2. La même démarche permet, après le choix d'une origine et d'un système d'axes de coordonnées, d'identifier l'espace avec $\mathbb{R}^3 \cong V_3$.

Etant donné un système d'axes de coordonnées orthogonales pour V_2 les vecteurs de la **base canonique** B sont: \vec{e}_1 parallèle à OX de sens positif et de longueur 1, et \vec{e}_2 parallèle à OY de sens positif et de longueur 1.

Pour tout $A, B \in \Pi$, on note

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{e}_1 + y_A \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

et

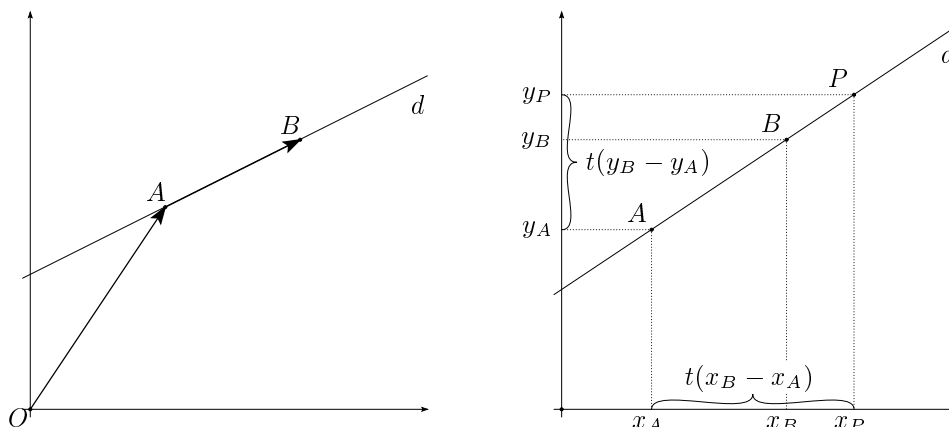
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{e}_1 + (y_B - y_A) \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.5.3. On obtient la base canonique de V_3 en ajoutant \vec{e}_3 parallèle à OZ de sens positif et de longueur 1 relativement au système d'axes de coordonnées choisi.

5.6 La droite dans le plan et dans l'espace

Soit d une droite dans le plan, passant par A et B . Alors

$$d = \{P \mid \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}\} = \{P = (x_A + t(x_B - x_A); y_A + t(y_B - y_A)) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



Cette caractérisation de d s'appelle **l'équation paramétrique de la droite** dans le plan. Elle permet de retrouver l'équation analytique de la droite puisque

$$\begin{aligned} P = (x; y) \in d &\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \\ &\Rightarrow t = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \\ &\Rightarrow y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)x + \left(y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A\right) \end{aligned}$$

qui est de la forme $y = ax + b$.

Exemple 5.6.1. Soient $A = (1; 4)$ et $B = (-5; 40)$. L'équation paramétrique de la droite passant par ces deux points est $(x, y) = (1 - 6t; 4 + 36t)$, l'équation analytique $y = -6x + 10$.

L'avantage de l'approche paramétrique réside dans le fait qu'elle permet de décrire de la même façon une droite dans l'espace, tandis que l'équation analytique ne se généralise pas bien.

De l'équation paramétrique de la droite dans l'espace, $d = \{P \mid \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}\}$, on déduit

$$\begin{aligned} P = (x; y; z) \in d &\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \end{aligned}$$

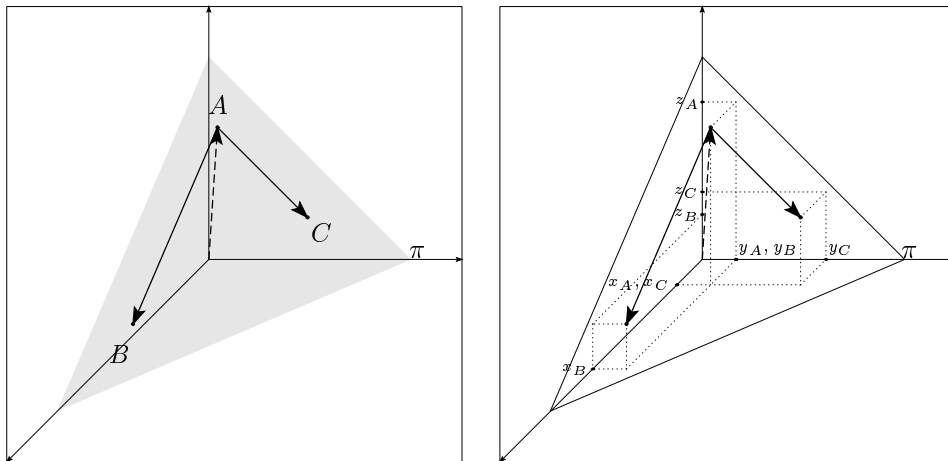
qui sont les **équations analytiques** de la droite dans l'espace.

L'utilité de plusieurs descriptions d'un même objet vient du fait que certaines descriptions sont plus appropriées que d'autres pour résoudre certains problèmes. Dans le cas de la droite, l'équation paramétrique permet de décrire tous les points de celle-ci. Ainsi en faisant varier les valeurs de t arbitrairement, on obtient tous les points de la droite. Mais si on donne un point par ses coordonnées et que l'on se demande si ce point est sur la droite, alors les équations analytiques sont plus appropriées puisqu'il suffit de contrôler que les équations sont satisfaites alors qu'avec la forme paramétrique, il faudrait résoudre un système d'équations.

5.7 Le plan dans l'espace

Soit Π un plan passant par les points non-alignés A , B et C . On peut décrire Π par son **équation biparamétrique**,

$$\Pi = \{P \mid \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}, \quad s, t \in \mathbb{R}\}.$$



Exemple 5.7.1. Soient $A = (1; 0; 0)$, $B = (0; 1; 0)$ et $C = (0; 0; 1)$.

$$\begin{aligned} P = (x; y; z) \in \Pi &\Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \\ &\Rightarrow x + y + z = 1 \end{aligned}$$

qui est l'**équation analytique** de ce plan dans l'espace.

Remarque 5.7.2. Etant donné les équations biparamétriques du plan, on peut déduire l'équation analytique de ce dernier en éliminant les paramètres t et s .

5.8 Le produit scalaire

La longueur (ou norme) d'un vecteur \vec{v} possède les propriétés suivantes:

N1) $\|\vec{v}\| \geq 0$ et $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$,

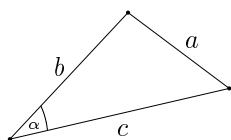
N2) $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V$,

N3) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$. (inégalité triangulaire)

Soit E un espace vectoriel réel et soit une application $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Si l'application satisfait N1), N2) et N3) elle est appelée une **norme** sur E .

Si deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont parallèles et de même sens, alors $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

En général on ne peut pas exprimer $\|\vec{v} + \vec{w}\|$ uniquement en fonction de $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$ puisqu'il faut tenir compte de la position respective des vecteurs (de l'angle).



Théorème. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (Théorème du cosinus)

Pour \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs, on définit le **produit scalaire** de \vec{v} et \vec{w} par

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha$$

où α est l'angle entre \vec{v} et \vec{w} .

Proposition 5.8.1.

1) $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,

2) $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$,

3) le produit scalaire est bilinéaire

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 | \gamma \vec{w}_1 + \delta \vec{w}_2 \rangle &= \langle \alpha \vec{v}_1 | \gamma \vec{w}_1 + \delta \vec{w}_2 \rangle + \langle \beta \vec{v}_2 | \gamma \vec{w}_1 + \delta \vec{w}_2 \rangle \\ &= \alpha \gamma \langle \vec{v}_1 | \vec{w}_1 \rangle + \alpha \delta \langle \vec{v}_1 | \vec{w}_2 \rangle + \beta \gamma \langle \vec{v}_2 | \vec{w}_1 \rangle + \beta \delta \langle \vec{v}_2 | \vec{w}_2 \rangle, \end{aligned}$$

4) le produit scalaire mesure la perpendicularité (orthogonalité):

$$\text{si } \vec{v} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}, \text{ alors } (\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}),$$

5) $\langle \vec{v} | \vec{0} \rangle = 0$,

6) $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$,

7) $\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$,

8) $|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$. (inégalité de Cauchy-Schwarz)

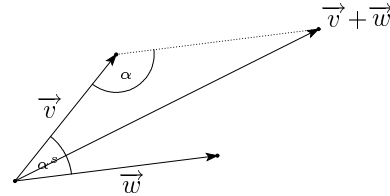
Remarque 5.8.2. Toute fonction $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant 1), 2) et 3) s'appelle un **produit scalaire** sur V .

Les seules propriétés ne découlant pas immédiatement de la définition du produit scalaire sont 3) et 6).

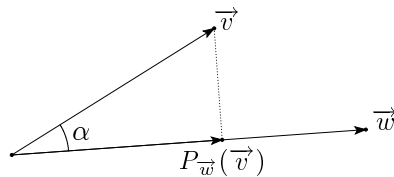
Pour la propriété 6) nous proposons deux preuves, une première preuve géométrique et, après avoir démontré la propriété 3), une deuxième preuve algébrique.

La preuve géométrique se base sur le théorème du cosinus:

$$\begin{aligned} & \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 \\ = & \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \cos \alpha \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \\ = & \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2 \cos \alpha^s \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \\ = & \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle. \end{aligned}$$



La démonstration de 3) se base sur un concept important; la projection orthogonale. Soient \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs, avec $\vec{w} \neq \vec{0}$. La **projection orthogonale** de \vec{v} sur \vec{w} , notée $P_{\vec{w}}(\vec{v})$, est un vecteur parallèle à \vec{w} dont l'extrémité est le pied de la perpendiculaire à \vec{w} passant par l'extrémité de \vec{v} .



$$P_{\vec{w}}(\vec{v}) = \|\vec{v}\| \cos \alpha \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|},$$

car $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ est un vecteur parallèle à \vec{w} de longueur 1, $\|\vec{v}\| |\cos \alpha|$ est la longueur du segment reliant l'origine de \vec{w} au pied de la perpendiculaire. De plus, $\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow P_{\vec{w}} \vec{v}$ et \vec{w} ont même sens, et $\cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow P_{\vec{w}} \vec{v}$ et \vec{w} sont de sens opposé.

Exprimons $P_{\vec{w}}(\vec{v})$ en fonction de \vec{v} , \vec{w} et de leur produit scalaire:

$$\begin{aligned} \cos \alpha = \frac{\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} & \Rightarrow P_{\vec{w}}(\vec{v}) = \|\vec{v}\| \frac{\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \\ & \Rightarrow P_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} \vec{w} \end{aligned}$$

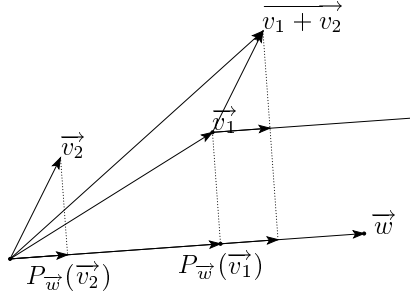
Remarque 5.8.3. La projection $P_{\vec{w}}(\vec{v})$ du vecteur \vec{v} sur le vecteur \vec{w} possède une propriété intéressante. C'est le vecteur parallèle à \vec{w} qui approche le mieux \vec{v} . Plus précisément,

$$\|P_{\vec{w}}(\vec{v}) - \vec{v}\| \leq \|\vec{r} - \vec{v}\| \quad \text{pour tout } \vec{r} \text{ parallèle à } \vec{w}.$$

Proposition 5.8.4. $P_{\vec{w}}$ est **linéaire**, c'est à dire: $\forall v_1, v_2 \in V_2$ et $\forall \alpha$ réel

$$a) P_{\vec{w}}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = P_{\vec{w}}(\vec{v}_1) + P_{\vec{w}}(\vec{v}_2),$$

$$b) P_{\vec{w}}(\alpha \vec{v}) = \alpha P_{\vec{w}}(\vec{v})$$



La démonstration de a) est faite en exercice et découle directement du dessin précédent. Par Thalès $\frac{\|P_{\vec{w}}(\alpha \vec{v})\|}{\|P_{\vec{w}}(\vec{v})\|} = |\alpha|$ et donc $P_{\vec{w}}(\alpha \vec{v}) = \alpha P_{\vec{w}}(\vec{v})$ ce qui démontre le point b).

Nous pouvons maintenant prouver le point 3) de la proposition 5.8.1. Montrons d'abord

$$\langle \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{v}_1 | \vec{w} \rangle + \beta \langle \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle.$$

Nous savons que

$$P_{\vec{w}}(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \frac{\langle \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} \vec{w}.$$

De plus nous avons montré que la projection orthogonale est linéaire, d'où

$$\begin{aligned} P_{\vec{w}}(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) &= \alpha P_{\vec{w}}(\vec{v}_1) + \beta P_{\vec{w}}(\vec{v}_2) = \alpha \frac{\langle \vec{v}_1 | \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} \vec{w} + \beta \frac{\langle \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} \vec{w} \\ &= \frac{\alpha \langle \vec{v}_1 | \vec{w} \rangle + \beta \langle \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} \vec{w}. \end{aligned}$$

Et donc finalement $\langle \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{v}_1 | \vec{w} \rangle + \beta \langle \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle$.

En utilisant la symétrie du produit scalaire (le point 1) de la proposition 5.8.1),

$$\begin{aligned} \langle \vec{z} | \gamma \vec{w}_1 + \delta \vec{w}_2 \rangle &= \langle \gamma \vec{w}_1 + \delta \vec{w}_2 | \vec{z} \rangle = \gamma \langle \vec{w}_1 | \vec{z} \rangle + \delta \langle \vec{w}_2 | \vec{z} \rangle \\ &= \gamma \langle \vec{z} | \vec{w}_1 \rangle + \delta \langle \vec{z} | \vec{w}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Pour $z = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$ on obtient

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 | \gamma \vec{w}_1 + \delta \vec{w}_2 \rangle &= \gamma \langle \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 | \vec{w}_1 \rangle + \delta \langle \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 | \vec{w}_2 \rangle \\ &= \alpha \gamma \langle \vec{v}_1 | \vec{w}_1 \rangle + \beta \gamma \langle \vec{v}_2 | \vec{w}_1 \rangle + \alpha \delta \langle \vec{v}_1 | \vec{w}_2 \rangle + \beta \delta \langle \vec{v}_2 | \vec{w}_2 \rangle, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du point 3).

Grâce à la bilinéarité du produit scalaire nous pouvons maintenant donner une preuve algébrique simple de la propriété 6) de la proposition 5.8.1.

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= \langle \vec{v} + \vec{w} | \vec{v} + \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{w} | \vec{w} \rangle \\ &= \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2 \\ \Rightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle &= \frac{1}{2}(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2). \end{aligned}$$

Remarque 5.8.5.

1. Comment calculer $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ si on connaît leurs composantes dans la base canonique ou une autre base orthonormée (pour mémoire une base est orthonormale si tous les vecteurs qui la composent sont de norme 1 et perpendiculaires deux à deux)?

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2, \\ \vec{w} &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle &= \langle v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 | w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 \rangle \\ &= v_1 w_1 \langle \vec{e}_1 | \vec{e}_1 \rangle + v_1 w_2 \langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle + v_2 w_1 \langle \vec{e}_2 | \vec{e}_1 \rangle + v_2 w_2 \langle \vec{e}_2 | \vec{e}_2 \rangle \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2.\end{aligned}$$

2. Dans $V_3 \cong \mathbb{R}^3$, on peut définir le produit scalaire et la projection orthogonale de la même manière. Ceux-ci jouissent des mêmes propriétés que dans $V_2 \cong \mathbb{R}^2$. Ainsi dans V_3 et pour la base canonique (ou toute autre base orthonormée), on a

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

3. Inversément, étant donné un vecteur \vec{v} dans l'espace vectoriel V_2 (resp. V_3) muni du produit scalaire et d'une base orthonormale \vec{e}_1, \vec{e}_2 (resp. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), on peut calculer les composantes de \vec{v} dans cette base, comme

$$\vec{v} = \langle \vec{v} | \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{v} | \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 \quad (\text{resp. } \vec{v} = \langle \vec{v} | \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{v} | \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{v} | \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3).$$

4. Dans un espace vectoriel avec produit scalaire, le théorème de Pythagore découle de l'orthogonalité des vecteurs \vec{v} et \vec{w} :

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2.$$

5. Comment obtenir l'équation analytique d'un plan sans passer par l'équation biparamétrique et la résolution du système d'équations linéaire?

Pour tout plan Π , il existe une unique droite d passant par l'origine O et perpendiculaire à Π (c'est à dire perpendiculaire à toute droite du plan passant par $R = d \cap \Pi$).

Soit $\vec{n} = \overrightarrow{RQ}$ avec $Q \in d$, alors $\forall A, B \in \Pi$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \langle \vec{n} | \overrightarrow{AB} \rangle = 0$. De plus si on connaît un vecteur \vec{n} normal à Π et un point $A \in \Pi$, Π est uniquement déterminé:

Supposons que dans la base canonique orthonormée

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad A = (x_A; y_A; z_A) \text{ et } P = (x; y; z).$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}.$$

On obtient alors l'équation analytique du plan comme suit

$$\begin{aligned}
 P \in \Pi &\Leftrightarrow \langle \vec{n} | \overrightarrow{AP} \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle \vec{n} | \overrightarrow{OP} \rangle - \langle \vec{n} | \overrightarrow{OA} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{n} | \overrightarrow{OP} \rangle = \langle \vec{n} | \overrightarrow{OA} \rangle \\
 &\Leftrightarrow ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A \\
 &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A).
 \end{aligned}$$

5.9 Le produit vectoriel

Etant donnés deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} non parallèles dans V_3 comment construire explicitement (en termes de composantes) un vecteur perpendiculaire à \vec{v} et \vec{w} ? Ou bien, de manière équivalente, étant donnés trois points non alignés de l'espace, comment construire explicitement un vecteur perpendiculaire au plan déterminé par ces trois points?

Remarque 5.9.1. Avant de pouvoir construire un vecteur perpendiculaire au plan déterminé par trois points (ou deux vecteurs), il faut s'assurer que ce plan existe. Si les trois points sont alignés (ou les deux vecteurs parallèles), ils ne définissent pas un plan unique. La question qui se pose est donc de savoir déterminer si trois points sont alignés ou, question équivalente, si deux vecteurs sont parallèles.

Proposition 5.9.2. Deux vecteurs \vec{r} et \vec{s} du plan sont parallèles si et seulement si $r_1s_2 - r_2s_1 = 0$.

Démonstration. Supposons d'abord que les deux vecteurs sont parallèles. Si $\vec{s} = \vec{0}$ la proposition est démontrée puisque dans ce cas $s_1 = s_2 = 0$. Soit donc $\vec{s} \neq \vec{0}$ ce qui implique que l'une de ses composantes est non nulle, supposons que $s_1 \neq 0$ (la preuve est analogue en raisonnant pour $s_2 \neq 0$). Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \parallel \vec{s} &\Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{r} = \lambda \vec{s} \Leftrightarrow r_1 = \lambda s_1 \text{ et } r_2 = \lambda s_2 \\
 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{r_1}{s_1} \text{ et } r_2 = \lambda s_2 \Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{s_1} s_2 \\
 &\Rightarrow r_1s_2 - r_2s_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $r_1s_2 - r_2s_1 = 0$. Si $s_1 \neq 0$ il s'ensuit $r_2 = \frac{r_1}{s_1}s_2$ et il est facile de se convaincre que $\vec{r} = \lambda \vec{s}$ pour $\lambda = \frac{r_1}{s_1}$. Si $s_2 \neq 0$, alors $\lambda = \frac{r_2}{s_2}$ fait l'affaire. Si finalement $s_1 = s_2 = 0$ les deux vecteurs \vec{r} et \vec{s} sont également parallèles puisque $\vec{s} = \vec{0} = 0\vec{r}$.

Proposition 5.9.3. Le *déterminant* de \vec{r} et $\vec{s} \in V$ défini par

$$\det(\vec{r}, \vec{s}) = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = r_1s_2 - r_2s_1$$

possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
 1) \det(\vec{r}_1 + \vec{r}_2, \vec{s}) &= \det(\vec{r}_1, \vec{s}) + \det(\vec{r}_2, \vec{s}), \\
 \det(\lambda \vec{r}, \vec{s}) &= \lambda \det(\vec{r}, \vec{s}), \\
 \text{et de même pour } \vec{s} &= \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \text{ et } \vec{s} = \lambda \vec{s}_1, \quad (\text{linéarité en chaque variable})
 \end{aligned}$$

$$2) \det(\vec{r}, \vec{s}) = -\det(\vec{s}, \vec{r}),$$

$$3) \det(\vec{r}, \vec{r}) = 0,$$

4) *interprétation géométrique:*

$$|\det(\vec{r}, \vec{s})| = \text{aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs.}$$

Les preuves de 1) et 2) sont laissées en exercice, la propriété 3) découle de 2). Pour 4) soient A l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs et α l'angle entre les deux vecteurs.

$$\begin{aligned} A &= \|\vec{r}\| \|\vec{s}\| |\sin \alpha| \\ \Leftrightarrow A^2 &= \|\vec{r}\|^2 \|\vec{s}\|^2 \sin^2 \alpha = \|\vec{r}\|^2 \|\vec{s}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \|\vec{r}\|^2 \|\vec{s}\|^2 \left(1 - \left(\frac{\langle \vec{r} | \vec{s} \rangle}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} \right)^2 \right) = \|\vec{r}\|^2 \|\vec{s}\|^2 - \langle \vec{r} | \vec{s} \rangle^2 \\ &= (r_1^2 + r_2^2)(s_1^2 + s_2^2) - (r_1 s_1 + r_2 s_2)^2 \\ &= r_1^2 s_1^2 + r_1^2 s_2^2 + r_2^2 s_1^2 + r_2^2 s_2^2 - r_1^2 s_1^2 - 2r_1 s_1 r_2 s_2 - r_2^2 s_2^2 \\ &= r_1^2 s_2^2 - 2r_1 s_2 r_2 s_1 + r_2^2 s_1^2 = (r_1 s_2 - r_2 s_1)^2 \\ &= (\det(\vec{r}, \vec{s}))^2 \\ \Leftrightarrow A &= |\det(\vec{r}, \vec{s})|. \end{aligned}$$

Proposition 5.9.4. Deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont parallèles si et seulement si

$$\begin{cases} v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0 \\ v_1 w_3 - v_3 w_1 = 0 \\ v_2 w_3 - v_3 w_2 = 0 \end{cases}$$

Pour la preuve s'inspirer de celle de la proposition 5.9.2.

Pour \vec{v} et $\vec{w} \in V_3$ le **produit vectoriel** de \vec{v} et \vec{w} est défini par

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Proposition 5.9.5.

$$1) \langle \vec{v} \times \vec{w} | \vec{v} \rangle = 0 \text{ et } \langle \vec{v} \times \vec{w} | \vec{w} \rangle = 0,$$

$$2) \vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont non nuls et non parallèles,}$$

$$3) \vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v}),$$

$$4) (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{w} + \vec{v}_2 \times \vec{w},$$

$$(\lambda \vec{v}) \times \vec{w} = \lambda(\vec{v} \times \vec{w}),$$

$$\text{et de même pour } \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \text{ et } \vec{w} = \lambda \vec{w}_1, \quad (\text{linéarité en chaque variable})$$

5) *interprétation géométrique:*

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \varphi = \text{aire du parallélogramme défini par } \vec{v} \text{ et } \vec{w}.$$

Les preuves des points 1) à 3) sont laissées en exercice, la preuve du point 4) est simple mais longue et fastidieuse, le point 5) finalement se démontre de la même manière qu'en deux dimensions.

Remarque 5.9.6. Dans $V_2 \cong \mathbb{R}^2$ deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. Peut-on voir le même phénomène dans $V_3 \cong \mathbb{R}^3$ avec trois vecteurs \vec{v} , \vec{w} et \vec{z} ? Quand peut-on exprimer un vecteur \vec{z} comme $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), c'est à dire quand est-ce que \vec{z} est dans le plan engendré par \vec{v} et \vec{w} ?

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{z} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \Leftrightarrow$ le volume du parallépipède $vol(P)$ défini par les trois vecteurs est nul.

$$\begin{aligned} vol(P) &= (\text{Aire du parallélogramme défini par } \vec{v} \text{ et } \vec{w}) \cdot \text{hauteur} \\ &= \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{z}\| \cos \varphi \quad (\text{où } \varphi \text{ est l'angle entre } \vec{z} \text{ et } \vec{v} \times \vec{w}) \\ &= \langle \vec{v} \times \vec{w} | \vec{z} \rangle \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) z_1 + (-v_1 w_3 + v_3 w_1) z_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) z_3 \\ &= z_1 v_2 w_3 - z_1 w_2 v_3 - z_2 v_1 w_3 + z_2 v_3 w_1 + z_3 v_1 w_2 - z_3 v_2 w_1 \end{aligned}$$

Pour $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V_3 \cong \mathbb{R}^3$, on définit le **déterminant** de $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ par

$$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ v_3 & w_3 & z_3 \end{vmatrix} = vol(P)$$

Proposition 5.9.7.

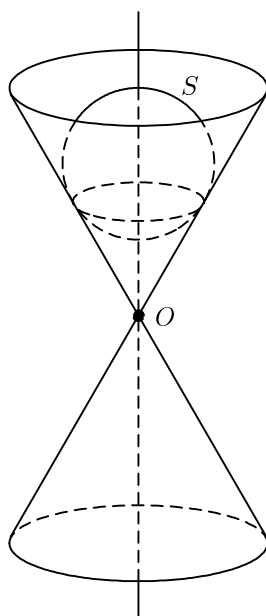
- 1) $\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z})$ est linéaire en les trois variables,
- 2) $\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) = -\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{z}) = -\det(\vec{v}, \vec{z}, \vec{w})$,
(si on permute deux vecteurs adjacents le déterminant change de signe)
- 3) $\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) = 0 \Leftrightarrow$ un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

6 Les coniques

6.1 Les cônes et leurs propriétés

Soient S une sphère dans l'espace et O un point qui se trouve à l'extérieur de S . Considérons la famille des droites tangentes à S passant par O . On définit les termes suivants :

- la réunion de ces droites s'appelle un **cône** ;
- chaque droite s'appelle une **génératrice** du cône ;
- le point O s'appelle le **sommet** du cône ;
- la droite passant par O et le centre de S s'appelle l'**axe** du cône.

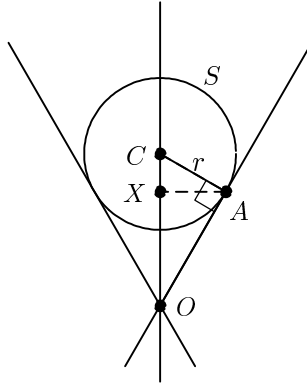


Proposition 6.1.1. *Considérons le cône de sommet O tangent à la sphère S .*

- Les points de tangence entre S et les génératrices du cône sont tous à égale distance du sommet O .*
- L'angle entre les génératrices et l'axe du cône est constant.*
- Les points de tangence entre S et les génératrices du cône sont dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône.*

Démonstration. Soit A un point de tangence entre S et une génératrice du cône. Soient C le centre et r le rayon de la sphère S . Considérons l'intersection du cône avec le plan contenant les trois points O , A et C (voir la figure ci-dessous). Comme la génératrice OA est tangente à S , le triangle $\triangle OAC$ est rectangle en A . Le théorème de Pythagore implique donc que

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OC}^2 - r^2},$$



ce qui est indépendant du point de tangence A . Autrement dit, en appliquant le raisonnement précédent à n'importe quel autre point de tangence entre S et une génératrice du cône, on obtient le même résultat, ce qui termine la démonstration du point (i).

Soit B un autre point de tangence entre S et une génératrice du cône. Comparons les deux triangles $\triangle OAC$ et $\triangle OBC$:

- par le point (i) de cette proposition, $\overline{OA} = \overline{OB}$;
- A et B se trouvent tous les deux sur la sphère S , donc $\overline{AC} = \overline{BC} = r$;
- les deux triangles ont le côté OC en commun.

Le troisième cas d'égalité de triangles (côté-côté-côté) implique que $\triangle OAC$ et $\triangle OBC$ sont isométriques. En particulier,

$$\widehat{COA} = \widehat{COB},$$

ce qui démontre le point (ii).

Pour le point (iii), soit X le pied de la hauteur du triangle $\triangle OAC$ issue de A et soit Y le pied de la hauteur de $\triangle OBC$ issue de B . Comparons les triangles $\triangle OAX$ et $\triangle OBY$:

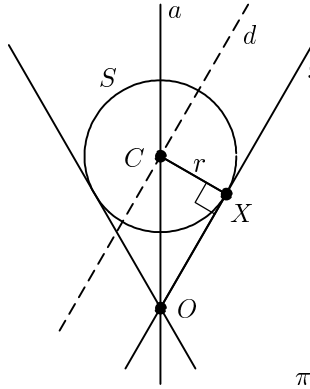
- par le point (ii) de cette proposition, les angles \widehat{XOA} et \widehat{YOB} sont égaux ;
- par le point (i) de cette proposition, on a $\overline{OA} = \overline{OB}$;
- $\widehat{OAX} = 90^\circ - \widehat{XOA} = 90^\circ - \widehat{XOB} = \widehat{OBY}$.

Il résulte du deuxième cas d'égalité de triangles (angle-côté-angle) que $\triangle OAX$ et $\triangle OBY$ sont isométriques. En particulier, $\overline{OX} = \overline{OY}$. Les points X et Y se trouvent donc sur la demi-droite $[OC$ à la même distance de O , c'est-à-dire $X = Y$. Ceci démontre que les pieds des hauteurs issues des points de tangence sont tous confondus, ce qui implique que les points de tangence se trouvent dans un plan perpendiculaire à OC . \square

Remarque 6.1.2. L'angle entre les génératrices et l'axe du cône s'appelle souvent l'**angle d'ouverture** du cône.

Proposition 6.1.3. *Pour tout nombre réel positif r , il existe une sphère de rayon r inscriptible dans un cône donné.*

Démonstration. Soient O le sommet, a l'axe et g une génératrice du cône donné. Soit π le plan contenant a et g et soit d une droite dans π parallèle à g et à distance r de g . Soient C le point d'intersection de d avec a et X le point d'intersection de g avec la perpendiculaire à g passant par C . Soit S la sphère centrée en C de rayon r . On doit montrer que S est

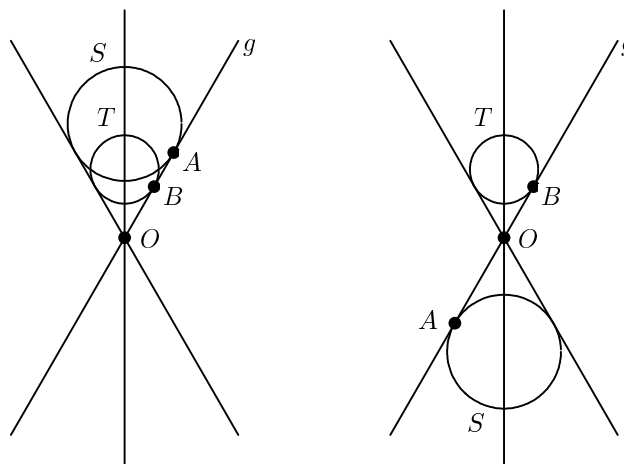


tangente à chaque génératrice du cône. On sait déjà qu'elle est tangente à g ; supposons donc que g' est une autre génératrice. Soit Y le point d'intersection de g' avec la perpendiculaire à g' passant par C . Notons que la distance entre C et g' est égale à \overline{CY} . Si on démontre que $\overline{CY} = r$, on aura alors que S est tangente à g' au point Y , et ainsi la preuve sera terminée. A cet effet, comparons les triangles ΔOXC et ΔOYC :

- d'après la partie (ii) de la proposition 6.1.1, $\widehat{COX} = \widehat{COY}$;
- les deux triangles ont le côté OC en commun ;
- $\widehat{XCO} = 90^\circ - \widehat{COX} = 90^\circ - \widehat{COY} = \widehat{YCO}$.

Par le deuxième cas d'égalité de triangles (angle-côté-angle), ΔOXC et ΔOYC sont donc isométriques. En particulier, $\overline{CY} = \overline{CX} = r$. \square

Proposition 6.1.4. *Si deux sphères sont inscrites dans un cône, la distance entre les points de tangence situés sur une même génératrice est constante.*

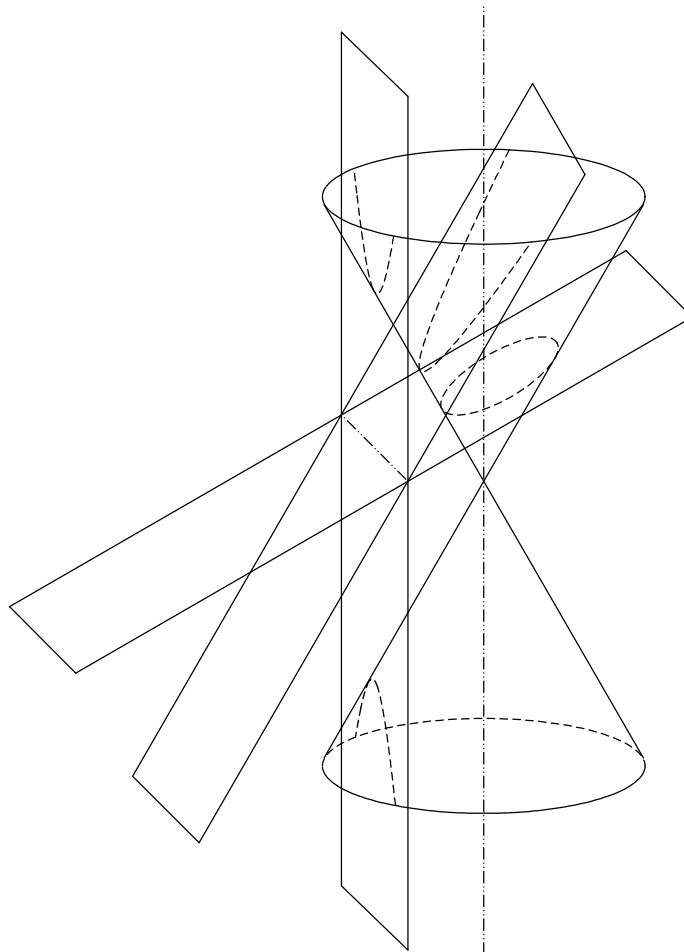


Démonstration. Supposons que S et T sont des sphères inscrites dans le cône. Soient O le sommet et g une génératrice du cône. Soit A le point de tangence entre S et g , et soit B le point de tangence entre T et g . Si S et T sont du même côté du sommet O (comme dans l'image de gauche), alors $\overline{AB} = |\overline{OA} - \overline{OB}|$; sinon, $\overline{AB} = \overline{OA} + \overline{OB}$. Par la proposition 6.1.1(i), les distances \overline{OA} et \overline{OB} sont indépendantes de la génératrice g choisie. La distance \overline{AB} l'est donc aussi. \square

6.2 La définition des coniques

Une **conique** est l'intersection d'un plan π avec un cône. Soit α l'angle d'ouverture du cône et soit β l'angle entre π et l'axe du cône². En comparant les angles α et β , on classifie trois types de coniques :

- si $\beta > \alpha$, la conique s'appelle une **ellipse** ;
- si $\beta < \alpha$, la conique s'appelle une **hyperbole** ;
- si $\beta = \alpha$, la conique s'appelle une **parabole**.

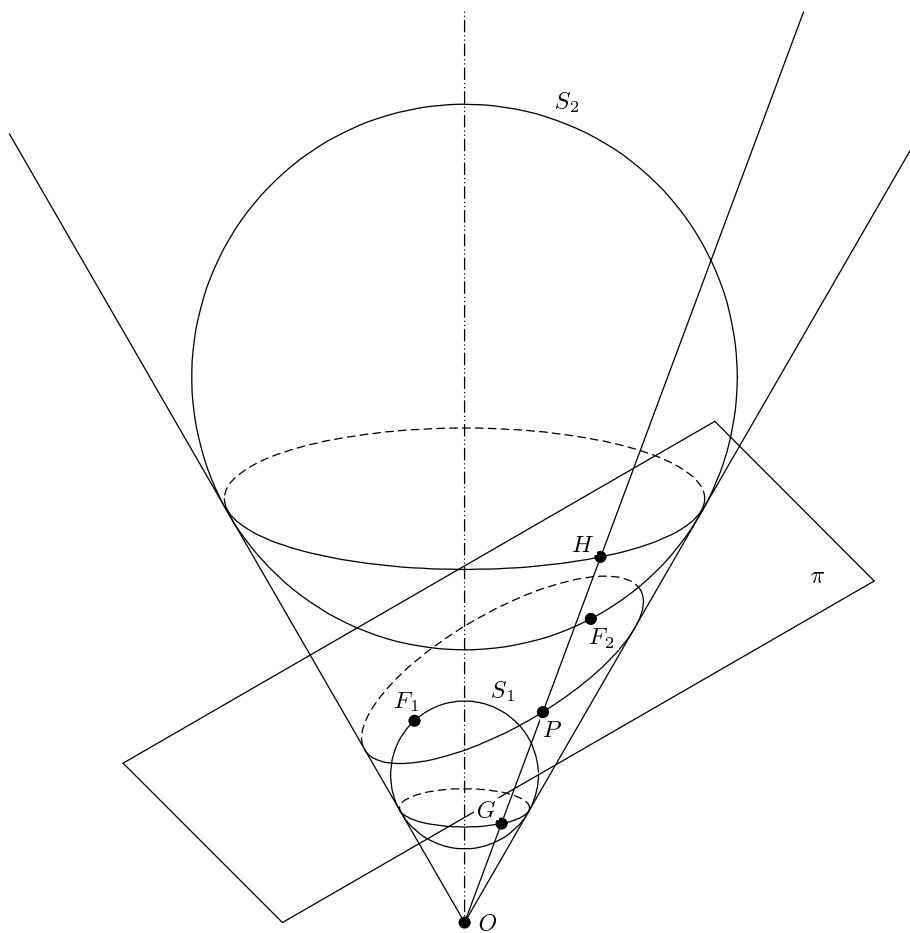


²L'angle β entre un plan π et une droite d qui l'intersecte est défini comme le complémentaire de l'angle entre d et la perpendiculaire à π passant par le point d'intersection.

6.3 L'ellipse

Supposons qu'un plan π intersecte un cône donné de telle façon que l'angle d'ouverture α du cône soit plus petit que l'angle β entre π et l'axe du cône. Pour éviter la situation banale où l'intersection est réduite à un seul point, on suppose aussi que π ne passe pas par le sommet O du cône.

Par proposition 6.1.3, pour chaque nombre réel positif r , il existe une sphère de rayon r qui est inscriptible dans le cône ; il en résulte³ que l'on peut trouver deux sphères S_1 et S_2 qui sont à la fois inscriptibles dans le cône et tangentes au plan π . Soient F_1 et F_2 les points d'intersection de π avec S_1 et S_2 , respectivement. On appelle F_1 et F_2 les **foyers** de l'ellipse.



Proposition 6.3.1. *La somme des distances entre un point de l'ellipse et les foyers de l'ellipse est constante. Autrement dit, il existe un nombre réel k tel que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$ pour tout point P de l'ellipse.*

Démonstration. Soit P un point de l'ellipse. Soit G le point de tangence entre la génératrice OP du cône et la sphère S_1 , et soit H le point de tangence entre OP et S_2 . Considérons le cône de sommet P tangent à la sphère S_1 : les points F_1 et G sont des points de tangence

³Il faut une explication ici !

entre ce cône et S_1 ; il suit du point (i) de la proposition 6.1.1 que $\overline{PF_1} = \overline{PG}$. De même, en considérant le cône de sommet P tangent à la sphère S_2 , on trouve que $\overline{PF_2} = \overline{PH}$. Comme P est un point du segment $[GH]$, on a

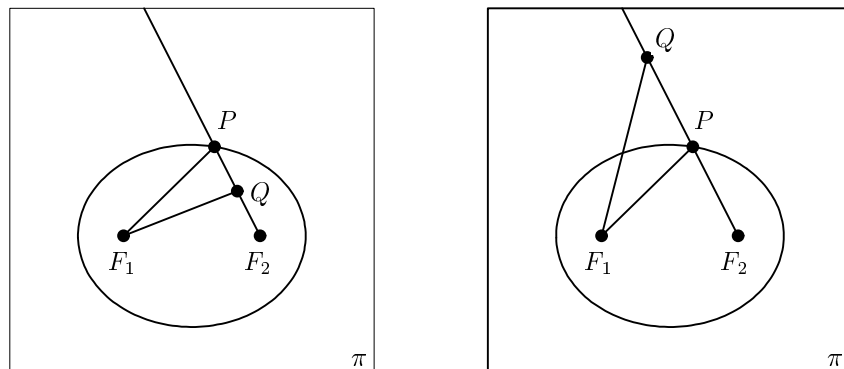
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PG} + \overline{PH} = \overline{GH}.$$

En appliquant la proposition 6.1.4 aux sphères S_1 et S_2 et à la génératrice OP , on voit que la distance \overline{GH} est indépendante du point P de l'ellipse choisi au début. On peut donc prendre $k = \overline{GH}$. \square

Remarque 6.3.2. Soit P un point de l'ellipse ne se trouvant pas sur la droite F_1F_2 et soit k la constante de la proposition précédente. Par l'inégalité du triangle, on a $\overline{F_1F_2} \leq \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$. Supposons que cette inégalité soit une égalité, c'est-à-dire que $k = \overline{F_1F_2}$. Ainsi, le point P se trouverait dans le segment $[F_1F_2]$, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse sur P . Il s'ensuit que $k > \overline{F_1F_2}$.

Proposition 6.3.3. Soit k la constante de la proposition 6.3.1. Si Q est un point du plan π qui ne se trouve pas sur l'ellipse, alors $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} \neq k$.

Démonstration. Soit Q un point dans π n'appartenant pas à l'ellipse. Si $Q = F_2$, alors $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{F_1F_2} < k$; supposons donc que $Q \neq F_2$. Soit P le point d'intersection de l'ellipse avec la demi-droite $QF_2]$. Si Q est à l'intérieur de l'ellipse, comme dans la figure de



gauche, alors, par l'inégalité du triangle,

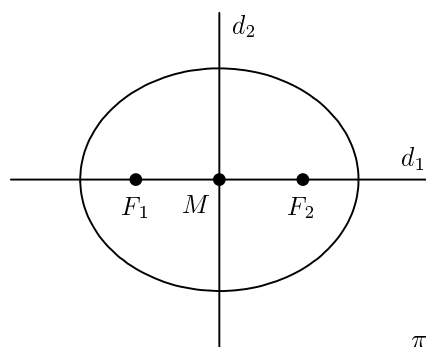
$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} < \overline{PF_1} + \overline{PQ} + \overline{QF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k.$$

D'autre part, si Q est à l'extérieur de l'ellipse, alors

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QP} + \overline{PF_2} > \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k. \quad \square$$

Remarque 6.3.4. Les propositions 6.3.1 et 6.3.3 réunies montrent que l'ellipse est l'ensemble de points P du plan π tels que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$, où k est un nombre réel plus grand que la distance entre F_1 et F_2 .

Remarque 6.3.5. Si $\beta = 90^\circ$, alors les deux foyers F_1 et F_2 se confondent, et par la remarque 6.3.4, l'ellipse est donc l'ensemble des points P du plan π tels que $\overline{PF_1} = \frac{k}{2}$, où k est un nombre réel strictement positif ; autrement dit, l'ellipse s'identifie au cercle centré en F_1 de rayon $\frac{k}{2}$.

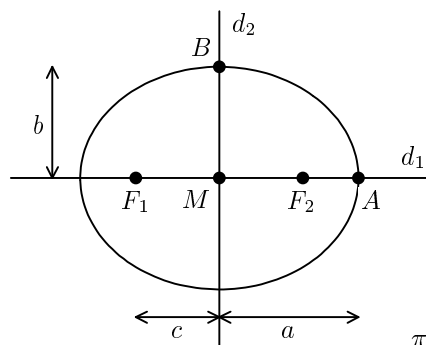


On supposera par la suite que $\beta < 90^\circ$: les deux foyers F_1 et F_2 sont alors distincts. Soit d_1 la droite (dans le plan π) passant par F_1 et F_2 , soit d_2 la médiatrice du segment $[F_1, F_2]$ dans π et soit M le point d'intersection de d_1 et de d_2 .

Lemme 6.3.6. *Les droites d_1 et d_2 sont des axes de symétrie de l'ellipse.*

La démonstration de cette remarque est laissée en exercice.

Soit A un des points d'intersection de d_1 avec l'ellipse, et soit B un des points d'intersection de d_2 avec l'ellipse. Les segments $[AM]$ et $[BM]$ s'appellent le **grand demi-axe** et le **petit**



demi-axe de l'ellipse, respectivement. Soient $a = \overline{AM}$ et $b = \overline{BM}$. Soit c la moitié de la distance entre F_1 et F_2 , c'est-à-dire $c = \overline{F_1M} = \overline{F_2M}$.

Lemme 6.3.7. $k = 2a$ et $c^2 = a^2 - b^2$

Démonstration. Le point A étant sur l'ellipse,

$$k = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = (a + c) + (a - c) = 2a.$$

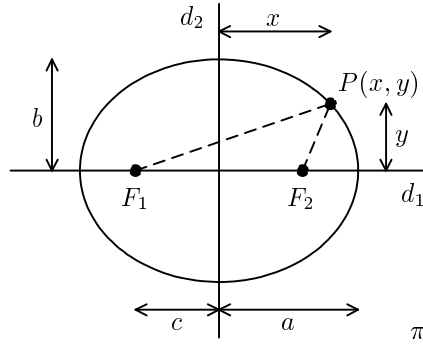
Considérons maintenant le point B . Par symétrie, $\overline{BF_1} = \overline{BF_2}$, donc

$$2a = k = \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 2\overline{BF_1} ;$$

autrement dit, $\overline{BF_1} = a$. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ΔF_1BM , on trouve que

$$a^2 = \overline{BF_1}^2 = \overline{F_1M}^2 + \overline{BM}^2 = c^2 + b^2. \quad \square$$

Considérons maintenant les droites d_1 et d_2 comme des axes cartésiens ; prenons d_1 comme l'axe des x et d_2 comme l'axe des y . Disons que le demi-axe positif des x est celui contenant le foyer F_2 . Les coordonnées de F_1 et F_2 sont donc $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, respectivement.



Proposition 6.3.8. Pour tout point $P(x, y)$ sur l'ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (*)$$

Démonstration. Pour commencer, remarquons que pour chaque point $P(x, y)$ du plan π , les distances entre P et les deux foyers F_1 et F_2 sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \\ \overline{PF_2} &= \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $P(x, y)$ est un point de l'ellipse. Par le lemme 6.3.7,

$$\begin{aligned} 2a &= \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ \implies \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevons au carré les deux côtés de l'égalité une première fois

$$\begin{aligned} (x - c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}\right)^2 \\ \implies x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ \implies 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\ \implies \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= a + \frac{cx}{a}, \end{aligned}$$

et puis une seconde fois

$$\begin{aligned} (x + c)^2 + y^2 &= \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \implies x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} \\ \implies \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \\ \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1. \end{aligned}$$

Par le lemme 6.3.7, $a^2 - c^2 = b^2$, ce qui termine la démonstration. \square

Proposition 6.3.9. Si x et y sont des nombres réels satisfaisant l'équation (*), alors le point $P(x, y)$ se trouve sur l'ellipse.

Avant de démontrer cette proposition, on a besoin d'un lemme technique.⁴

Lemme 6.3.10. *Si x et y sont des nombres réels satisfaisant l'équation (*), alors*

$$a + \frac{cx}{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0.$$

Démonstration du lemme 6.3.10. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que (*) est satisfaite. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\implies \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ &\implies x^2 \leq a^2 \quad \text{et} \quad y^2 \leq b^2 \end{aligned}$$

L'inégalité en x implique que $-a \leq x \leq a$. En multipliant cette dernière inégalité par c , on trouve que $-ca \leq cx \leq ca$. Il s'ensuit que

$$(x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \leq a^2 + 2ca + c^2 + b^2 = 2a^2 + 2ca \leq 4a^2 = (2a)^2.$$

En prenant la racine carrée de chaque côté, on obtient

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \leq \sqrt{(2a)^2} = |2a| = 2a \implies 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0,$$

ce qui démontre la deuxième inégalité énoncée. Pour la première, remarquons que l'inégalité $-ca \leq cx \leq ca$ trouvée ci-dessus implique en particulier que $cx \geq -ca$. En divisant cette dernière inégalité par a , on trouve $\frac{cx}{a} \geq -c$, et donc

$$a + \frac{cx}{a} \geq c + \frac{cx}{a} \geq c - c = 0. \quad \square$$

Démonstration de la proposition 6.3.9. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que (*) est satisfaite. Si on "remonte" les implications à la fin de la preuve de la proposition 6.3.8, on trouve que

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2.$$

En prenant la racine carrée de cette équation, on obtient

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|a + \frac{cx}{a}\right| = a + \frac{cx}{a},$$

la dernière égalité étant une conséquence du lemme 6.3.10. On remonte de nouveau les implications de la preuve de la proposition 6.3.8 jusqu'à ce que l'on voie

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Par le lemme 6.3.10, si on prend la racine carrée de cette équation, on trouve

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

c'est-à-dire $\overline{PF_2} = 2a - \overline{PF_1}$, donc P est sur l'ellipse. □

Remarque 6.3.11. Les propositions 6.3.8 et 6.3.9 réunies montrent que l'ellipse est l'ensemble des points (x, y) du plan π tels que

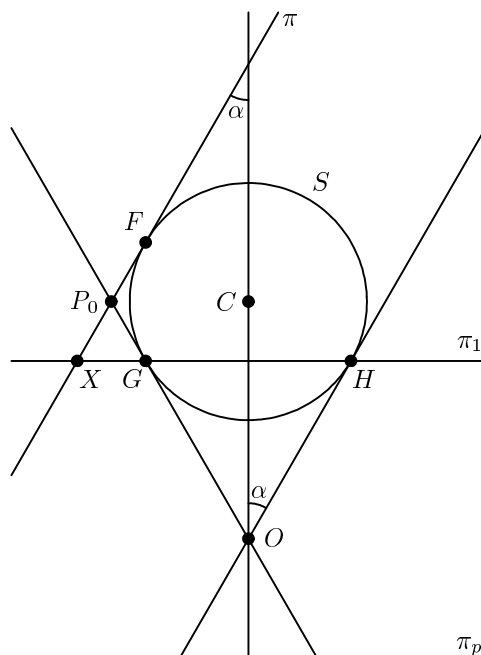
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

⁴C'est peut-être une bonne idée de lire d'abord la preuve de la proposition 6.3.9 pour comprendre l'utilité du lemme !

6.4 La parabole

Supposons que le plan π intersecte le cône de telle façon que l'angle d'ouverture α du cône soit égal à l'angle β entre π et le cône. Pour éviter la situation banale où l'intersection est réduite à une droite, on suppose de plus que π ne passe pas par le sommet O du cône.

Contrairement aux cas de l'ellipse et de l'hyperbole, il n'existe qu'une sphère qui est à la fois inscriptible dans le cône et tangente au plan π . Appelons-la S . Soit F le point d'intersection



entre π et S , soit π_1 le plan contenant tous les points de tangence entre S et le cône et soit d la droite qui est l'intersection entre les plans π et π_1 . On appelle F le **foyer** et d la **directrice** de la parabole. Soit C le centre de la sphère S et soit π_p le plan passant par les trois points O , C et F . La directrice d est perpendiculaire au plan π_p ; soit X le point d'intersection entre d et π_p . Dans la figure ci-dessus, on voit la projection du cône sur le plan π_p . Soit P_0 le point de la parabole qui se trouve sur π_p et soient G et H les deux points de tangence entre S et le cône qui appartiennent au plan π_p ; disons que G est celui qui est le plus proche au point P_0 .

Par le théorème des angles alternes-externes, les droites XP_0 et OH sont parallèles. Considérons les deux triangles $\triangle OGH$ et $\triangle P_0GX$:

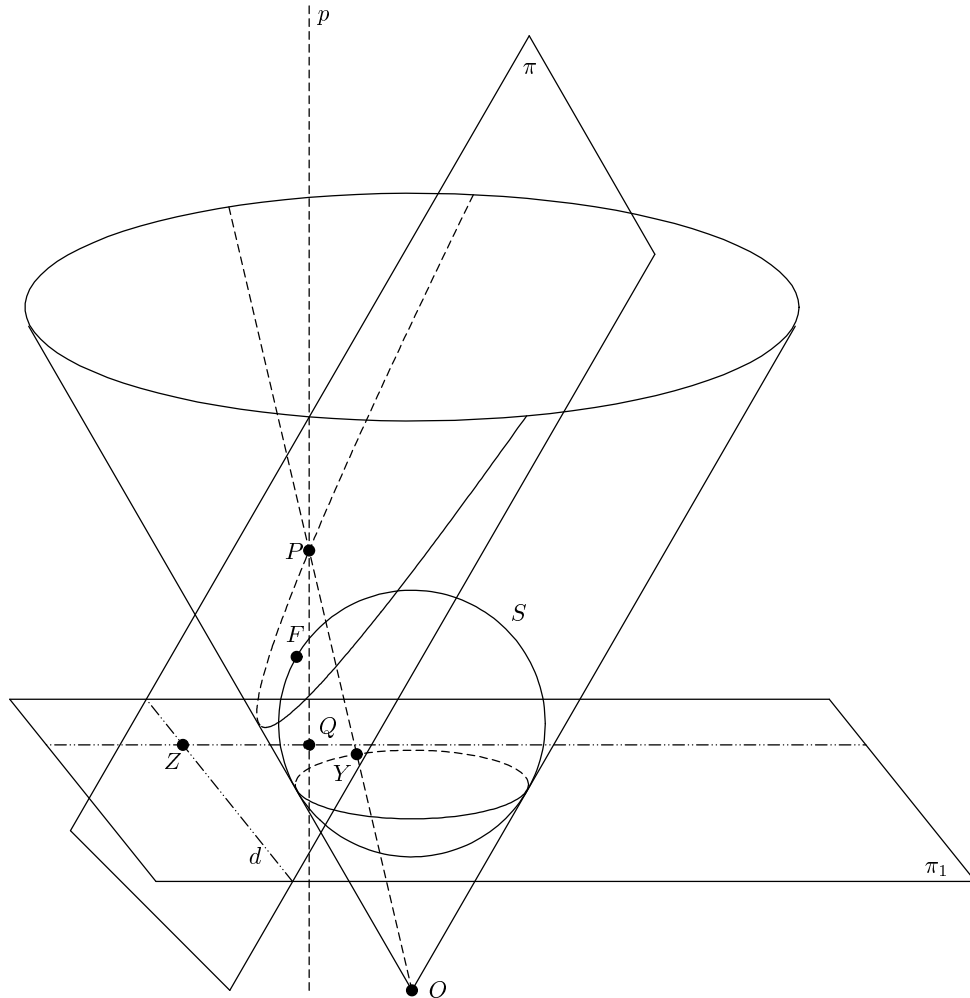
- les angles \widehat{OGH} et $\widehat{P_0GX}$ sont opposés et donc égaux ;
- par le théorème des angles alternes-externes, $\widehat{GHO} = \widehat{GXP_0}$ et $\widehat{HOG} = \widehat{XP_0G}$.

Les triangles $\triangle OGH$ et $\triangle P_0GX$ sont donc semblables.

Par la proposition 6.1.1(i), $\overline{OG} = \overline{OH}$; il en résulte que $\overline{P_0G} = \overline{P_0X}$. Maintenant, appliquons la proposition 6.1.1(i) au cône de sommet P_0 tangent à la sphère S : on trouve que $\overline{P_0G} = \overline{P_0F}$, c'est-à-dire $\overline{P_0F} = \overline{P_0X}$. Notons que $\overline{P_0X}$ est la distance entre P_0 et la directrice.

Proposition 6.4.1. *Pour tout point P de la parabole, la distance \overline{PF} est égale à la distance de P à la directrice.*

Démonstration. Supposons que P est un point de la parabole. Soient p la droite perpendiculaire au plan π_1 passant par P , et Q le point d'intersection de p avec π_1 . Soient Y le point



de tangence entre S et la génératrice OP du cône et Z le point d'intersection de la directrice d avec la perpendiculaire à d passant par Q .

Démontrer la proposition revient à montrer deux choses : premièrement que Z est bien la projection orthogonale de P sur la directrice d et donc que la distance \overline{PZ} réalise bien la distance de P à d . Deuxièmement que $\overline{PZ} = \overline{PF}$.

Le premier point se démontre en remarquant, à l'aide de Pythagore, que la distance entre un point T de la directrice et P est plus grande ou égale à la distance entre Z et P , puisque

$$\overline{PT}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QZ}^2 + \overline{ZT}^2 \geq \overline{PQ}^2 + \overline{QZ}^2 = \overline{PZ}^2.$$

Le deuxième point se démontre en montrant que les deux longueurs \overline{PZ} et \overline{PF} sont en fait égales à \overline{PY} . Les droites PF et PY sont tangentes à la sphère S , ce qui implique $\overline{PF} = \overline{PY}$ par 6.1.1.

Reste à voir $\overline{PZ} = \overline{PY}$.

Comparons les triangles ΔPQY et ΔPQZ . Ces deux triangles ont en commun le segment $[P, Q]$. De plus, la droite $p = PQ$ étant perpendiculaire à π_1 et les points Y et Z appartenant au plan π_1 , les angles \widehat{PQY} et \widehat{PQZ} sont des angles droits. Si on montre que les angles \widehat{QPY} et \widehat{QPZ} sont égaux, par (ACA), les deux triangles sont isométriques et donc $\overline{PZ} = \overline{PY}$.

La droite p étant parallèle à l'axe du cône (puisque ces deux droites sont perpendiculaires au plan π_1), \widehat{QPY} est égal à α l'angle d'ouverture du cône.

Comme l'angle entre la droite p et le plan π est en fait défini par $\square - \widehat{nPp}$ où n est la droite perpendiculaire au plan π passant par P et que π définit une parabole, on a l'égalité $\square - \widehat{nPp} = \alpha$. Si on démontre que Z appartient au plan π_2 engendré par les droites p et n (et donc contenant P), on aura bien que $\square - \widehat{nPp} = \widehat{QPZ}$.

On a vu en exercice que la projection orthogonale d'un point P sur une droite d est l'intersection de d avec le plan perpendiculaire à d passant par P , dans notre cas π_2 . Ceci démontre bien que Z appartient à π_2 et termine donc la démonstration. \square

Proposition 6.4.2. *Si Q est un point du plan π ne se trouvant pas sur la parabole, alors la distance \overline{QF} n'est pas égale à la distance de Q à la directrice.*

Démonstration. Soit Q un point dans π n'appartenant pas à la parabole. Si $Q = F$, alors $\overline{QF} = 0$ mais la distance de Q à la directrice d est strictement positive, puisque F ne se trouve pas sur d ; supposons donc que $Q \neq F$. Soit P le point d'intersection de la parabole avec la demi-droite $[QF]$. Soit X le pied de la perpendiculaire à d passant par P et soit Y le pied de la perpendiculaire à d passant par Q . Notons que les distances de P et Q à la directrice sont égales à \overline{PX} et \overline{QY} , respectivement. On voit ci-dessous les deux situations possibles : dans la figure de gauche, le point Q est au même côté de la parabole que le foyer F ; dans la figure de droite, il est au côté opposé.



Par la proposition 6.4.1, $\overline{PF} = \overline{PX}$, c'est-à-dire le triangle ΔPXF est isocèle et les angles \widehat{PXF} et \widehat{XFP} sont donc égaux. Supposons par l'absurde que $\overline{QF} = \overline{QY}$. Le triangle ΔQYF est alors isocèle aussi, ce qui implique que $\widehat{QYF} = \widehat{YFQ}$. Puisque les droites PX et QY sont parallèles, on a $\widehat{FPX} = \widehat{FQY}$, donc

$$\widehat{XFP} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{FPX}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{FQY}) = \widehat{YFQ}.$$

Les trois points P , Q et F étant alignés, il résulte que les points X , Y et F sont alignés aussi, c'est-à-dire $F \in XY$, ce qui est impossible. \square

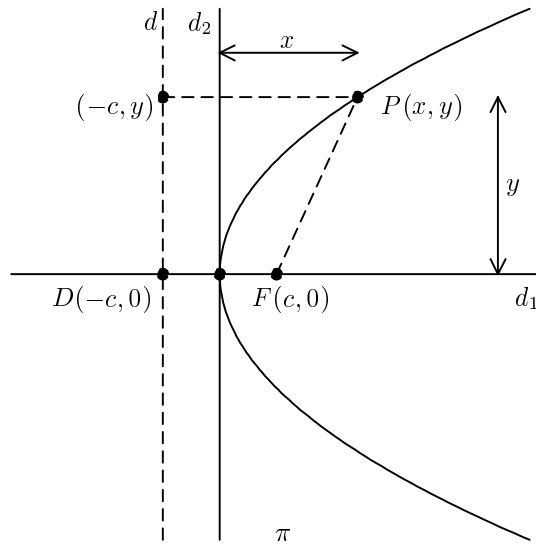
Remarque 6.4.3. Les propositions 6.4.1 et 6.4.2 réunies impliquent que la parabole est l'ensemble des points P du plan π tels que \overline{PF} est égale à la distance entre P et la directrice.

Soit d_1 la perpendiculaire (dans le plan π) à la directrice d passant par F , soit D le point d'intersection de d_1 et de d et soit d_2 la parallèle à d passant par le point à mi-distance entre D et F . Soit $c = \frac{1}{2}\overline{DF}$.

Lemme 6.4.4. *La droite d_1 est un axe de symétrie de la parabole.*

Démonstration. Soit P un point de la parabole et soit P_1 son image par la symétrie d'axe d_1 . Il est alors évident que $\overline{PF} = \overline{P_1F}$ et que la distance de P à la directrice d est égale à la distance de P_1 à d . Il en résulte que P_1 se trouve aussi sur la parabole. \square

Considérons les droites d_1 et d_2 comme des axes cartésiens ; prenons d_1 comme l'axe des x et d_2 comme l'axe des y . Disons que le demi-axe positif des x est celui contenant le foyer F . Les coordonnées des points D et F sont alors $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, respectivement.



Remarque 6.4.5. Le point d'intersection de d_1 avec la parabole s'appelle le **sommet** de la parabole. Par la remarque 6.4.3, on voit qu'il se trouve à l'origine $(0, 0)$ du système de coordonnées.

Proposition 6.4.6. *Pour tout point $P(x, y)$ sur la parabole,*

$$y^2 = 4cx. \quad (\dagger)$$

Démonstration. Pour commencer, remarquons que pour chaque point $P(x, y)$ du plan,

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

et la distance entre P et la directrice d est égale à

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x+c)^2} = |x+c|.$$

Supposons maintenant que P est un point de la parabole. Ces deux distances sont alors égales, c'est-à-dire $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x+c|$. Puisque la parabole se trouve à droite de la

directrice, $x > -c$, ce qui implique que $x + c > 0$ donc $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = x + c$. En élevant cette dernière équation au carré, on trouve

$$\begin{aligned} & (x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2 \\ \implies & x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 \\ \implies & y^2 = 4cx. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 6.4.7. *Si x et y sont des nombres réels satisfaisant l'équation (\dagger) , alors le point $P(x, y)$ se trouve sur la parabole.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que (\dagger) est satisfaite. En remontant les implications à la fin de la preuve précédente, on trouve que $(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$. Si on prend la racine carrée de cette équation, on obtient

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |x + c| = x + c,$$

la dernière égalité étant une conséquence du fait que $x + c = \frac{1}{4c}y^2 + c \geq 0$. \square

Remarque 6.4.8. Les propositions 6.4.6 et 6.4.7 réunies impliquent que la parabole est l'ensemble des points (x, y) du plan π tels que

$$y^2 = 4cx.$$

6.5 L'hyperbole

Supposons maintenant que le plan π intersecte le cône de telle façon que l'angle d'ouverture α du cône soit plus grand que l'angle β entre π et le cône. Pour éviter la situation banale où l'intersection est réduite à deux droites, on suppose aussi que π ne passe pas par le sommet O du cône. Comme pour le cas de l'ellipse, on peut trouver deux sphères S_1 et S_2 qui sont à la fois inscriptibles dans le cône et tangentes au plan π . Soient F_1 et F_2 les points d'intersection de π avec S_1 et S_2 , respectivement. On appelle F_1 et F_2 les **foyers** de l'hyperbole.

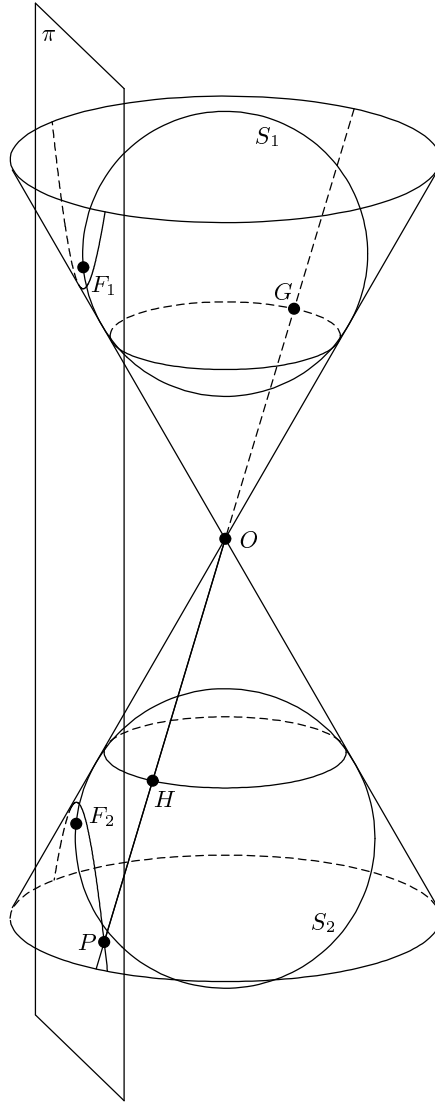
Proposition 6.5.1. *La valeur absolue de la différence des distances d'un point de l'hyperbole aux foyers de l'hyperbole est constante. Autrement dit, il existe un nombre réel k tel que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k$ pour tout point P de l'hyperbole.*

Démonstration. Soit P un point de l'hyperbole. Soient G et H les points de tangence entre la génératrice OP du cône et les sphères S_1 et S_2 , respectivement. Comme dans la preuve de la proposition 6.3.1, $\overline{PF_1} = \overline{PG}$ et $\overline{PF_2} = \overline{PH}$, donc

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PG} - \overline{PH}| = \overline{GH}.$$

Par la proposition 6.1.4, la distance \overline{GH} est indépendante du point P de l'hyperbole choisi au début. On peut donc prendre $k = \overline{GH}$. \square

Remarque 6.5.2. Soit P un point de l'hyperbole ne se trouvant pas sur la droite F_1F_2 et tel que $\overline{PF_1} \geq \overline{PF_2}$. Soit k la constante de la proposition précédente. Par l'inégalité du triangle, on a $\overline{PF_1} \leq \overline{PF_2} + \overline{F_1F_2}$. Supposons que cette inégalité soit une égalité. Ainsi, le point F_2 se trouverait dans le segment $[PF_1]$, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse sur P . Il s'ensuit que $k = \overline{PF_1} - \overline{PF_2} < \overline{F_1F_2}$, c'est-à-dire k est plus petit que la distance entre les foyers de l'hyperbole.



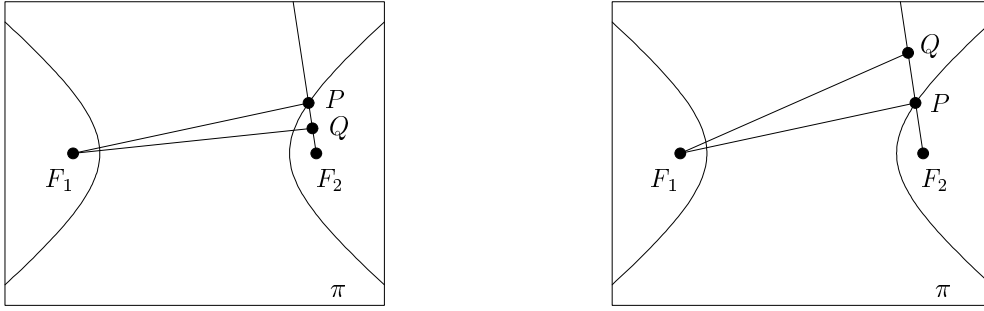
Proposition 6.5.3. Soit k la constante de la proposition 6.5.1. Si Q est un point du plan π qui ne se trouve pas sur l'hyperbole, alors $|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| \neq k$.

Démonstration. Soit Q un point dans π n'appartenant pas à l'hyperbole. Quitte à échanger les noms des foyers de l'hyperbole, on peut supposer que $\overline{QF_1} \geq \overline{QF_2}$. Si $Q = F_2$, alors $\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{F_1F_2} > k$; supposons donc que $Q \neq F_2$. Soit P le point d'intersection de l'hyperbole avec la demi-droite QF_2 . Si Q est "au même côté" de l'hyperbole que F_2 , comme dans la figure de gauche, alors $\overline{PQ} + \overline{QF_2} = \overline{PF_2}$, donc

$$\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{PQ} - \overline{PF_2} > \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k.$$

Si Q est "à l'autre côté" de l'hyperbole de F_2 , alors $\overline{QP} + \overline{PF_2} = \overline{QF_2}$, donc

$$\overline{QF_1} - \overline{QF_2} < \overline{PF_1} + \overline{QP} - \overline{QF_2} = \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k. \quad \square$$

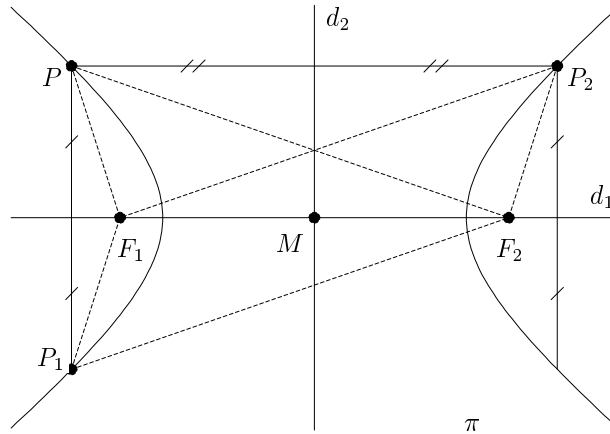


Remarque 6.5.4. Les propositions 6.5.1 et 6.5.3 réunies impliquent que l'hyperbole est l'ensemble des points P du plan π tels que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k$, où k est un nombre réel plus petit que la distance entre F_1 et F_2 .

Soit d_1 la droite (dans le plan π) passant par les foyers de l'hyperbole, soit d_2 la médiatrice de F_1 et F_2 dans π et soit M le point d'intersection de d_1 et de d_2 .

Lemme 6.5.5. Les droites d_1 et d_2 sont des axes de symétrie de l'hyperbole.

Démonstration. Soit P un point de l'hyperbole. Soient P_1 et P_2 les images de P par les symétries d'axes d_1 et d_2 , respectivement. Si $P_1 = P$, alors P_1 est sur l'hyperbole ; supposons donc que $P_1 \neq P$. Comme dans la preuve du lemme 6.3.6, $\overline{P_1F_1} = \overline{PF_1}$ et $\overline{P_1F_2} = \overline{PF_2}$, donc



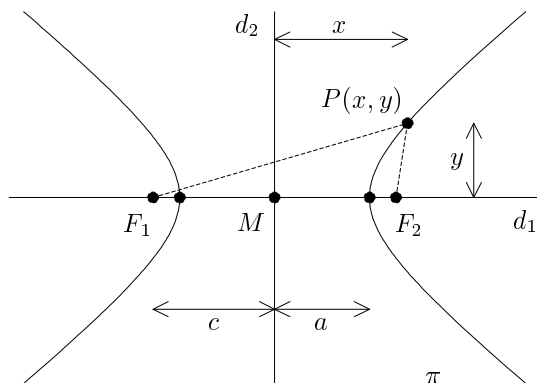
$|\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2}| = |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k$, c'est-à-dire P_1 est sur l'hyperbole. Considérons maintenant le point P_2 . Si $P_2 = P$, alors P_2 est sur l'hyperbole ; supposons donc que $P_2 \neq P$. En suivant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 6.3.6, on trouve que $\overline{PF_1} = \overline{P_2F_2}$ et $\overline{PF_2} = \overline{P_2F_1}$, ce qui implique que $|\overline{P_2F_1} - \overline{P_2F_2}| = |\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| = k$. \square

Soit a la moitié de la distance entre les deux points d'intersection de d_1 avec l'hyperbole et soit c la moitié de la distance entre F_1 et F_2 . Posons $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Lemme 6.5.6. $k = 2a$

Démonstration. Soit A le point d'intersection de d_1 avec l'hyperbole tel que $\overline{AF_1} > \overline{AF_2}$. Alors, $k = \overline{AF_1} - \overline{AF_2} = (c + a) - (c - a) = 2a$. \square

Considérons les droites d_1 et d_2 comme des axes cartésiens ; prenons d_1 comme l'axe des x et d_2 comme l'axe des y . Disons que le demi-axe positif des x est celui contenant le foyer F_2 . Les coordonnées de F_1 et F_2 sont donc $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, respectivement.



Remarque 6.5.7. Les deux points d'intersection de la droite d_1 avec l'hyperbole s'appellent souvent les **sommets** de l'hyperbole. Ils se trouvent aux points de coordonnées $(-a, 0)$ et $(a, 0)$.

Proposition 6.5.8. Pour tout point $P(x, y)$ sur l'hyperbole,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (**)$$

Démonstration. Soit $P(x, y)$ un point de l'hyperbole. Supposons que $x > 0$, c'est-à-dire que $\overline{PF_1} > \overline{PF_2}$. Par le lemme 6.5.6,

$$\begin{aligned} 2a &= \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \implies \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevons au carré les deux côtés de l'égalité une première fois

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\ \implies x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ \implies -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\ \implies \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= -a + \frac{cx}{a}, \end{aligned}$$

et puis une seconde fois

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= \left(-a + \frac{cx}{a}\right)^2 \implies x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} \\ \implies \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \\ \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1 ; \end{aligned}$$

puisque $b^2 = c^2 - a^2$, ceci termine la démonstration pour les points de l'hyperbole dont la coordonnée en x est positive. Supposons maintenant que $x < 0$. Soit P_2 l'image de P par la symétrie d'axe d_2 , comme dans la preuve du lemme 6.5.5. Les coordonnées du point P_2 sont $(-x, y)$, donc par la première partie de cette démonstration,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \square$$

Proposition 6.5.9. *Si x et y sont des nombres réels satisfaisant l'équation (**), alors le point $P(x, y)$ se trouve sur l'hyperbole.*

Comme pour la démonstration de la proposition 6.3.9, on a besoin d'un lemme technique afin de pouvoir "remonter" les implications de la preuve précédente.

Lemme 6.5.10. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > 0$ et l'équation (**) est satisfaite. Alors,*

$$-a + \frac{cx}{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0.$$

Démonstration. Il suit de l'équation (**) que

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1,$$

donc $x^2 \geq a^2$. Puisque $x > 0$, ceci implique que $x \geq a$. En multipliant cette dernière inégalité par $\frac{c}{a}$, on trouve

$$\frac{cx}{a} \geq c \quad \implies \quad -a + \frac{cx}{a} \geq -a + c \geq 0.$$

Ceci démontre la première inégalité ; la deuxième est évidente. □

Démonstration de la proposition 6.5.9. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que l'équation (**) est satisfaite. Supposons que $x > 0$. Grâce au lemme 6.5.10, on peut remonter les implications de la première partie de la preuve de la proposition 6.5.8 pour démontrer que le point $P(x, y)$ se trouve sur l'hyperbole. Supposons alors que $x < 0$. Soit P_2 le point de coordonnées $(-x, y)$. Alors,

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donc, par la première partie de cette démonstration, P_2 est un point de l'hyperbole. Il suit du lemme 6.5.5 que P l'est aussi. □

Remarque 6.5.11. Les propositions 6.5.8 et 6.5.9 réunies impliquent que l'hyperbole est l'ensemble des points (x, y) du plan π tels que

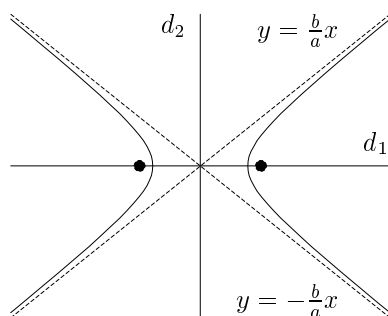
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On appelle cette équation, l'équation canonique de l'hyperbole.

Remarque 6.5.12. Soient x et y des nombres réels positifs tels que le point (x, y) se trouve sur l'hyperbole. Comme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ peut se réécrire $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 1$, on déduit que $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = (\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^{-1}$. De plus si $|x|$ est grand, alors $|y|$ l'est aussi puisque (x, y) appartient à l'hyperbole et donc satisfait l'équation canonique ci-dessus.

Deux cas se présentent :

1. Si x et y sont de même signe, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{-1}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. Ce qui implique que l'hyperbole tend vers la droite $y = \frac{bx}{a}$ dans les premiers et troisièmes quadrants du plan (i.e. les points du plan où x et y sont de même signe).
2. Si x et y sont de signes opposés, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{-1}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. Ce qui implique que l'hyperbole tend vers la droite $y = -\frac{bx}{a}$ dans les deuxièmes et quatrièmes quadrants du plan.



Les asymptotes de l'hyperbole

On appelle les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ les **asymptotes** de l'hyperbole.

6.6 Changement de coordonnées

Jusqu'à présent, on a considéré des équations de coniques dans des systèmes de coordonnées très particuliers : dans les cas de l'ellipse et de l'hyperbole, les axes cartésiens étaient les axes de symétrie de la conique ; dans le cas de la parabole, l'axe des x était l'axe de symétrie et l'axe des y était au milieu de la directrice et du foyer. Dans cette section on étudiera ce qui se passe dans le cas général, c'est-à-dire quand les axes sont situés de manière quelconque.

Le changement le plus simple que l'on peut effectuer à une courbe dans le plan est une translation. Si, dans l'équation de la courbe, on remplace x par $x - x_0$ et y par $y - y_0$, où x_0 et y_0 sont des nombres réels, alors la courbe se trouvera x_0 unités plus à droite et y_0 unités plus en haut.

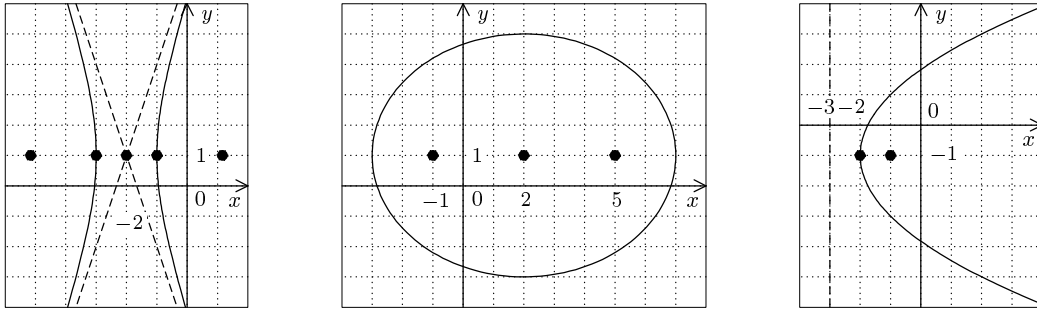
Exemple 6.6.1. La courbe d'équation

$$\frac{(x + 2)^2}{1^2} - \frac{(y - 1)^2}{3^2} = 1$$

est la translatée par 2 unités à gauche et 1 unité en haut de la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

La dernière équation est celle d'une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations $y = 3x$ et $y = -3x$. Ses sommets se trouvent sur l'axe des x à une distance de 1 unité de l'origine ; ses foyers se trouvent sur l'axe des x à une distance de $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ unités de l'origine. La courbe représentée par l'équation originale est donc une hyperbole centrée en $(-2, 1)$ dont les asymptotes sont les droites d'équation $y - 1 = 3(x + 2)$ et $y - 1 = -3(x + 2)$. Les sommets se trouvent aux points $(-3, 1)$ et $(-1, 1)$ et les foyers se trouvent aux points $(-2 - \sqrt{10}, 1)$ et $(-2 + \sqrt{10}, 1)$.



Les trois coniques des exemples 6.6.1, 6.6.2 et 6.6.3

Exemple 6.6.2. La courbe d'équation

$$\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-1)^2}{4^2} = 1$$

est la translatée par 2 unités à droite et 1 unité en haut de la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1,$$

c'est-à-dire d'une ellipse centrée à l'origine dont les longueurs du grand demi-axe et du petit demi-axe sont 5 et 4, respectivement. Ses foyers se trouvent $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ unités à gauche et à droite de l'origine, aux points $(-3, 0)$ et $(3, 0)$. La courbe représentée par l'équation originale est alors une ellipse centrée en $(2, 1)$ dont les longueurs du grand demi-axe et du petit demi-axe sont également 5 et 4, respectivement. Les foyers se trouvent aux points $(-1, 1)$ et $(5, 1)$.

Exemple 6.6.3. La courbe d'équation

$$(y+1)^2 = 4(x+2)$$

est une parabole de sommet $(-2, -1)$ dont la directrice est la droite d'équation $x = -3$ et le foyer est $(-1, -1)$.

L'équation d'une courbe translatée est souvent moins transparente que celles des exemples 6.6.1, 6.6.2 et 6.6.3, comme on verra ci-dessous.

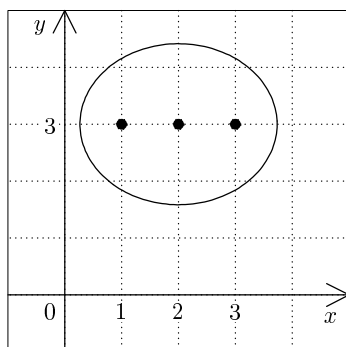
Exemple 6.6.4. Soit l'équation

$$2x^2 - 8x + 3y^2 - 18y + 29 = 0.$$

Complétons les carrés en x et en y :

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 3(y^2 - 6y + 9) - 27 + 29 &= 0 \\ \implies 2(x-2)^2 + 3(y-3)^2 &= 6 \\ \implies \frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} &= 1. \end{aligned}$$

On retrouve alors l'équation d'une ellipse centrée en $(2, 3)$ dont les longueurs du grand demi-axe et du petit demi-axe sont $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$, respectivement. Les foyers se trouvent $\sqrt{3-2} = 1$ unité à gauche et à droite du centre, c'est-à-dire aux points $(1, 3)$ et $(3, 3)$.

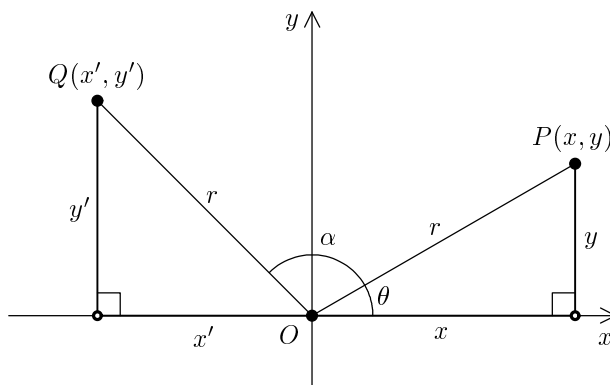


L'ellipse de l'exemple 6.6.4

Le reste de cette section sera consacré aux rotations du système de coordonnées. Notons par ρ_0^α la rotation d'angle α autour de l'origine dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Proposition 6.6.5. $\rho_0^\alpha(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Soit P le point (x, y) du plan et soit Q son image $\rho_0^\alpha(x, y)$. Ecrivons les coordonnées cartésiennes du point Q comme x' et y' . Soient r et θ les coordonnées



polaires de P , c'est-à-dire, soient $r, \theta \in \mathbb{R}$ tels que $r \geq 0$ et les équations

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

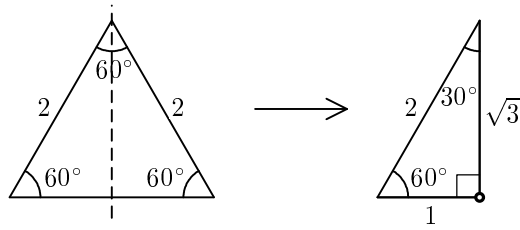
sont satisfaites (voir l'appendice 10). Par définition, les coordonnées polaires du point Q sont r et $\theta + \alpha$; les coordonnées cartésiennes de Q sont donc donnés par les équations

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\theta + \alpha) = r(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= r \sin(\theta + \alpha) = r(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Exemple 6.6.6. Considérons la courbe d'équation

$$\frac{\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{3^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2}{1^2} = 1. \quad (6.6.6a)$$

On reconnaît aux numérateurs les valeurs de $\sin 60^\circ$ et $\cos 60^\circ$: rappelons que ces valeurs se trouvent en coupant en deux un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est (par



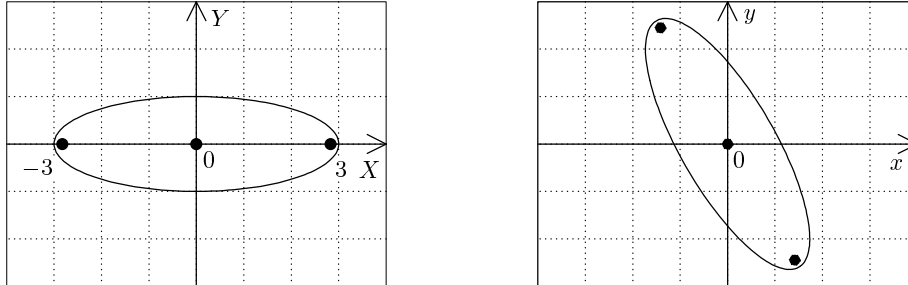
exemple) égale à 2. On voit que $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Définissons les nouvelles variables X et Y par $(X, Y) = \rho_0^{60^\circ}(x, y)$. Par la proposition 6.6.5,

$$\begin{aligned} X &= x \cos 60^\circ - y \sin 60^\circ = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ Y &= x \sin 60^\circ + y \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y. \end{aligned}$$

L'équation de la courbe s'écrit alors

$$\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1, \quad (6.6.6b)$$

qui est l'équation d'une ellipse centrée en $(0, 0)$ dont les longueurs du grand demi-axe et du petit demi-axe sont 3 et 1, respectivement. Notons que $(x, y) = \rho_0^{-60^\circ}(X, Y)$. La courbe représentée par l'équation originale est donc l'image d'une rotation d'angle -60° de cette ellipse.



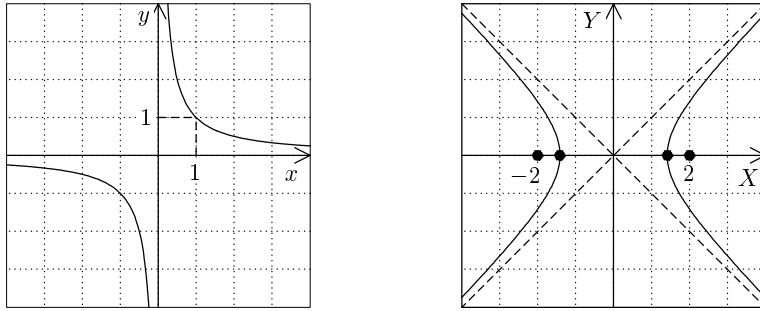
Les ellipses d'équations (6.6.6b) et (6.6.6a)

Exemple 6.6.7. La courbe d'équation $xy = 1$ est souvent appelée une "hyperbole". Est-ce que cette terminologie est cohérente avec la nôtre? Autrement dit, est-ce que l'on peut trouver une transformation du système de coordonnées telle que cette courbe puisse être décrite par une équation de la forme

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 ?$$

Les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ sont les axes de symétrie pour la courbe, pendant que les axes de symétries d'une hyperbole dans la forme de la section 6.5 sont les axes cartésiens. Essayons une rotation d'angle -45° autour de l'origine. Soient X et Y les nouvelles variables définies par $(X, Y) = \rho_0^{-45^\circ}(x, y)$, ou, de manière équivalente, par

$$(x, y) = \rho_0^{45^\circ}(X, Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y, \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right).$$



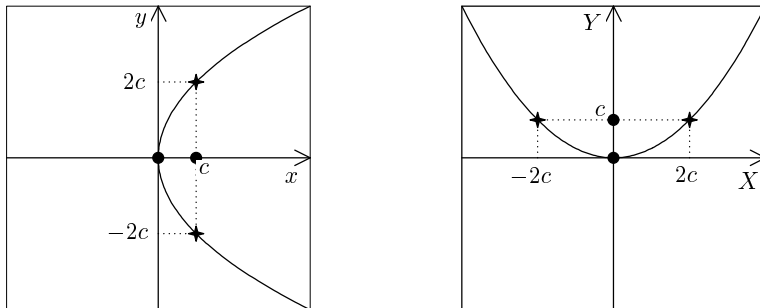
Les hyperboles d'équations $xy = 1$ et $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1$

L'équation de la courbe devient

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) = 1 \implies \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1,$$

ce que l'on reconnaît comme l'équation d'une hyperbole (dans le sens de la section 6.5) dont les asymptotes sont les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$. Les sommets se trouvent aux points $(-\sqrt{2}, 0)$ et $(\sqrt{2}, 0)$, les foyers aux points $(-2, 0)$ et $(2, 0)$.

Exemple 6.6.8. Effectuons une rotation d'angle 90° à la parabole d'équation $y^2 = 4cx$, où c est un nombre réel strictement positif. Soient X et Y les nouvelles variables données par $(X, Y) = \rho_0^{90^\circ}(x, y)$, ou, de manière équivalente, par $(x, y) = \rho_0^{-90^\circ}(X, Y) = (Y, -X)$. L'équation $y^2 = 4cx$ devient $(-X)^2 = 4cY$, ou, autrement écrit, $Y = \frac{X^2}{4c}$.



Les paraboles d'équations $y^2 = 4cx$ et $Y = \frac{X^2}{4c}$

Exemple 6.6.9. Considérons l'équation de l'ellipse établie dans la section 6.3 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

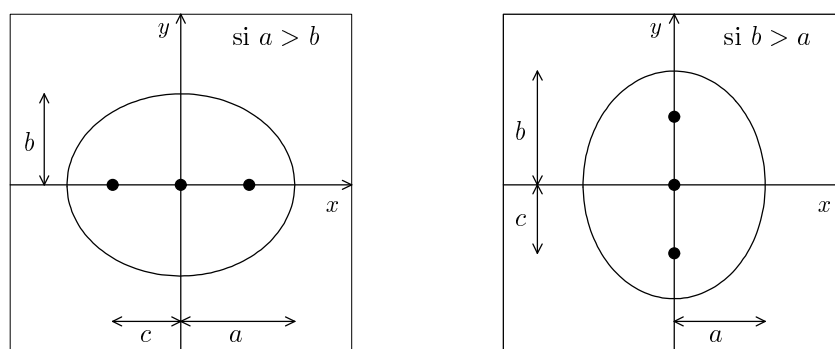
où a et b sont des nombres réels strictement positifs tels que $a > b$. Qu'est-ce qui se passe si on fait une rotation de 90° de l'ellipse ? Soient X et Y les nouvelles variables définies par $(X, Y) = \rho_0^{90^\circ}(x, y)$, ou, de manière équivalente, par $(x, y) = \rho_0^{-90^\circ}(X, Y) = (Y, -X)$. L'équation de l'ellipse devient

$$\frac{(-Y)^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} = 1 \implies \frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1,$$

ce qui est une équation d'une ellipse dans la forme usuelle, avec la différence que a se trouve au-dessous du terme en Y au lieu de celui en X . On conclut qu'en général, la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

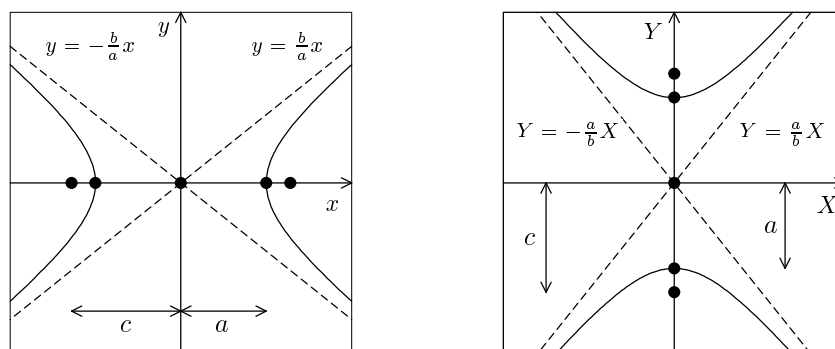
où a et b sont maintenant deux nombres réels non-nuls, est une ellipse : si $a > b$, le grand demi-axe de l'ellipse est horizontal et les foyers se trouvent aux points $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ et $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$; si $b > a$, le grand demi-axe est vertical et les foyers se trouvent aux points $(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ et $(0, \sqrt{b^2 - a^2})$; si $a = b$, l'ellipse est un cercle de rayon a .



Exemple 6.6.10. On répète l'expérience de l'exemple 6.6.9 avec l'hyperbole. L'équation de l'hyperbole établie dans la section 6.5 est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6.6.10a}$$

où a et b sont des nombres réels non-nuls. Faisons une rotation de l'hyperbole de 90° : soient



Les hyperboles d'équations (6.6.10a) et (6.6.10b)

X et Y les nouvelles variables définies par $(x, y) = \rho_0^{-90^\circ}(X, Y) = (Y, -X)$. L'équation de l'hyperbole devient

$$\frac{(-Y)^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1 \implies -\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1, \tag{6.6.10b}$$

ce qui est semblable à l'équation usuelle de l'hyperbole, sauf que c'est le terme en X qui est négatif au lieu de celui en Y . Les équations des asymptotes $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ de l'hyperbole deviennent $Y = -\frac{a}{b}X$ et $Y = \frac{a}{b}X$.

6.7 L'équation générale du second degré en deux variables

Toutes les équations de coniques que l'on a vues dans les sections précédentes étaient des équations du second degré en deux variables. On peut se demander si, inversement, toute équation du second degré en deux variables décrit une conique.

Considérons l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (*)$$

où a, b, c, d, e et f sont des nombres réels. La première étape sera d'essayer d'éliminer le terme en xy . Si $b = 0$, ceci ne demande pas beaucoup de travail (!) et on peut sauter à l'équation (**) ci-dessous. Supposons que $b \neq 0$. Rappelons que dans l'exemple 6.6.7, on a pu éliminer le terme en xy en effectuant une rotation bien choisie. Soient alors X et Y les nouvelles variables définies par $(X, Y) = \rho_0^\alpha(x, y)$ pour un certain angle α . Par la proposition 6.6.5,

$$(x, y) = \rho_0^{-\alpha}(X, Y) = (X \cos \alpha + Y \sin \alpha, -X \sin \alpha + Y \cos \alpha).$$

L'équation (*) devient

$$a(X \cos \alpha + Y \sin \alpha)^2 + b(X \cos \alpha + Y \sin \alpha)(-X \sin \alpha + Y \cos \alpha) + c(-X \sin \alpha + Y \cos \alpha)^2 + d(X \cos \alpha + Y \sin \alpha) + e(-X \sin \alpha + Y \cos \alpha) + f = 0.$$

Soient A, B, C, D et E les coefficients des termes en X^2, XY, Y^2, X et Y , respectivement, et soit $F = f$. Autrement dit, soient

$$\begin{aligned} A &= a \cos^2 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha & D &= d \cos \alpha - e \sin \alpha \\ B &= 2a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha - 2c \sin \alpha \cos \alpha & E &= d \sin \alpha + e \cos \alpha \\ C &= a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha & F &= f. \end{aligned}$$

C'est dans le nouveau système de coordonnées que l'on essaie maintenant d'éliminer le terme "mixte" XY . Il faut choisir l'angle α tel que le coefficient B devient nul, c'est-à-dire tel que

$$\begin{aligned} 2a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha - 2c \sin \alpha \cos \alpha &= 0 \\ \iff 2(a - c) \sin \alpha \cos \alpha + b(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0 \\ \iff (a - c) \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Si $a = c$, l'équation ci-dessus devient $\cos 2\alpha = 0$; on peut donc prendre $\alpha = 45^\circ$, par exemple. Si $a \neq c$, elle est satisfaite si on choisit α tel que $\cos 2\alpha \neq 0$ et

$$\frac{(a - c) \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -b \iff \tan 2\alpha = \frac{b}{c - a}.$$

Ce choix de α transformé l'équation (*) en

$$AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0. \quad (**)$$

Quelle est la courbe représentée par cette équation ?

- Si $A = C = 0$, l'équation devient $DX + EY + F = 0$, ce qui représente soit une droite (si $D \neq 0$ ou $E \neq 0$), soit le plan entier (si $D = E = F = 0$), soit l'ensemble vide (si $D = E = 0$ mais $F \neq 0$).

- Si $A = 0$ mais $C \neq 0$, on peut diviser par C et compléter le carré en Y :

$$\left(Y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}X - \frac{F}{C} + \left(\frac{E}{2C}\right)^2.$$

Si $D = 0$, cette équation représente soit deux droites horizontales (si le terme à droite est strictement positif), soit une droite horizontale (si le terme à droite est zéro), soit l'ensemble vide (si le terme à droite est strictement négatif). Si $D \neq 0$, on peut réécrire l'équation comme

$$\left(Y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(X + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4CD}\right),$$

ce qui représente la translation d'une parabole dont la directrice est verticale (comme dans l'exemple 6.6.3).

- De même, si $A \neq 0$ mais $C = 0$, on trouve l'équation

$$\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}Y - \frac{F}{A} + \left(\frac{D}{2A}\right)^2,$$

ce qui représente soit deux droites verticales, soit une droite verticale, soit l'ensemble vide, soit la translation d'une parabole dont la directrice est horizontale (comme dans l'exemple 6.6.8).

- Si $A \neq 0$ et $C \neq 0$, on peut compléter les carrés en X et en Y et puis diviser par AC :

$$\frac{1}{C}\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(Y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4C^2A}. \quad (\dagger)$$

Soit G la valeur du côté droit de cette équation. Si $G = 0$, l'équation (\dagger) s'écrit

$$\left(Y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{A}{C}\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2,$$

ce qui représente soit deux droites non-parallèles (si $-\frac{A}{C} > 0$), soit un seul point (si $-\frac{A}{C} < 0$). Si $G \neq 0$, on peut diviser les deux côtés de l'équation (\dagger) par G :

$$\frac{1}{CG}\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{1}{AG}\left(Y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 1.$$

Ceci représente soit un cercle (si CG et AG sont positifs et égaux), soit une ellipse (si CG et AG sont positifs mais distincts), soit une hyperbole (si CG et AG sont de signes différents), soit l'ensemble vide (si CG et AG sont négatifs).

La réponse à la question “est-ce que toute équation du second degré en deux variables décrit une conique ?” est donc oui (sauf dans les cas où l'on trouve l'ensemble vide ou deux droites parallèles⁵).

⁵Si on permet dans la définition du cône que le sommet O est à l'infini, alors le cône devient un cylindre. Les génératrices sont parallèles à l'axe du cône et l'angle d'ouverture du cône est donc 0° . Si π est un plan coupant le cône, il n'y a que deux possibilités : soit l'angle entre π et l'axe du cône est aussi 0° , soit il est plus grand que 0° . Dans le premier cas, l'intersection de π avec le cône est soit deux droites parallèles, soit une droite, soit l'ensemble vide ; dans le deuxième cas, l'intersection est une ellipse. Ainsi, vraiment *toute* équation du second degré en deux variables décrit une conique.

Exemple 6.7.1. Quel type de conique est représenté par l'équation

$$21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 + 8(9 - 2\sqrt{3})x - 8(2 + 9\sqrt{3})y + 16 = 0 ? \quad (6.7.1a)$$

Comparons cette équation à l'équation (*) : on trouve que $a = 21$, $b = -10\sqrt{3}$ et $c = 31$. En particulier, $a \neq c$; il faut donc tourner la conique d'un angle α , où

$$\tan 2\alpha = \frac{b}{c - a} = \frac{-10\sqrt{3}}{31 - 21} = -\sqrt{3}.$$

Il y a quatre possibilités pour α : -120° , -30° , 60° ou 150° ; prenons par exemple $\alpha = -30^\circ$. Soient X et Y les variables définies par $(X, Y) = \rho_0^{-30^\circ}(x, y)$. Alors

$$\begin{aligned} x &= X \cos(30^\circ) - Y \sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ y &= X \sin(30^\circ) + Y \cos(30^\circ) = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y, \end{aligned}$$

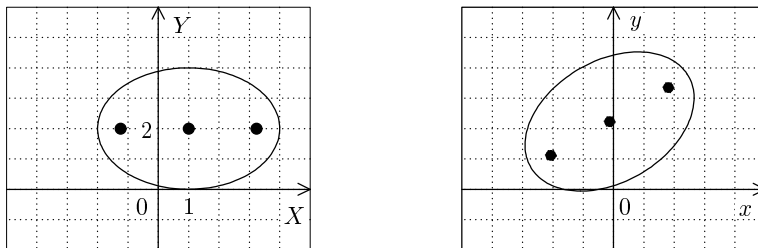
et l'équation (6.7.1a) devient

$$\begin{aligned} &21\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)^2 - 10\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) + 31\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2 \\ &+ 8(9 - 2\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right) - 8(2 + 9\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) + 16 = 0 \\ \Rightarrow &16X^2 + 36Y^2 - 32X - 144Y + 16 = 0 \\ \Rightarrow &4X^2 + 9Y^2 - 8X - 36Y + 4 = 0. \end{aligned}$$

En complétant les carrés en X et en Y , on obtient

$$\begin{aligned} &4(X^2 - 2X + 1) - 4 + 9(Y^2 - 4Y + 4) - 36 + 4 = 0 \\ \Rightarrow &4(X - 1)^2 + 9(Y - 2)^2 = 36 \\ \Rightarrow &\frac{(X - 1)^2}{3^2} + \frac{(Y - 2)^2}{2^2} = 1, \end{aligned} \quad (6.7.1b)$$

ce que l'on reconnaît comme l'équation d'une ellipse centrée en $(1, 2)$ dont les longueurs du grand demi-axe et du petit demi-axe sont 3 et 2, respectivement. Les foyers se trouvent à une distance de $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ unités à gauche et à droite du centre, aux points $(1 - \sqrt{5}, 2)$ et $(1 + \sqrt{5}, 2)$. La conique représentée par l'équation (6.7.1a) est l'image d'une rotation de 30° de cette ellipse.



Les ellipses d'équations (6.7.1b) et (6.7.1a)

Exemple 6.7.2. Quel type de conique est représenté par l'équation⁶

$$(y - x - 13)^2 = 52x \quad (6.7.2a)$$

Ecrivons d'abord l'équation sous la forme canonique d'une équation du second degré en deux variables :

$$\begin{aligned} (y - x - 13)^2 = 52x &\implies y^2 + x^2 - 2xy + 26x - 26y + 169 = 52x \\ &\implies x^2 - 2xy + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0. \end{aligned}$$

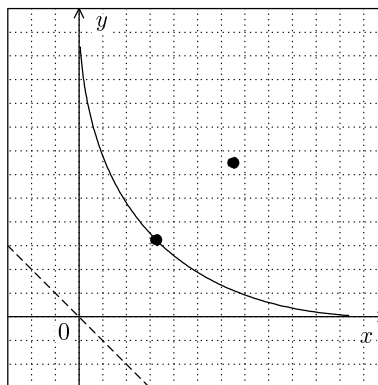
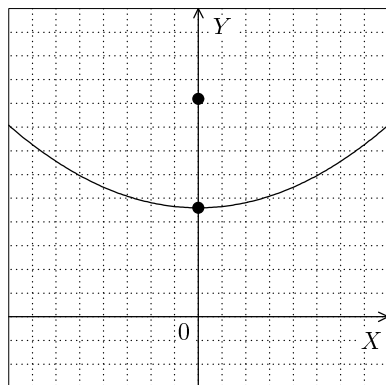
En comparant cette dernière équation avec l'équation (*), on trouve que $a = c = 1$; il faut donc prendre α tel que $\cos(2\alpha) = 0$. Choisissons $\alpha = 45^\circ$, par exemple. En effectuant le changement de variables $(X, Y) = \rho_0^{45}(x, y)$, on trouve que

$$\begin{aligned} x &= X \cos(-45^\circ) - Y \sin(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y &= X \sin(-45^\circ) + Y \cos(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{aligned}$$

et l'équation originale devient

$$\begin{aligned} \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right) - 13 \right)^2 &= 52 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right) \\ \implies (-\sqrt{2}X - 13)^2 &= 26\sqrt{2}X + 26\sqrt{2}Y \\ \implies 2X^2 + 26\sqrt{2}X + 169 &= 26\sqrt{2}X + 26\sqrt{2}Y \\ \implies 2X^2 &= 26\sqrt{2} \left(Y - \frac{13}{2\sqrt{2}} \right) \\ \implies \frac{X^2}{13\sqrt{2}} &= \left(Y - \frac{13}{2\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (6.7.2b)$$

ce qui est l'équation d'une parabole dont la directrice est horizontale (voir l'exemple 6.6.8). Son sommet est au point $(0, \frac{13}{2\sqrt{2}})$, son foyer est $\frac{13\sqrt{2}}{4} = \frac{13}{2\sqrt{2}}$ unités plus haut, au point $(0, \frac{13}{\sqrt{2}})$



Les paraboles d'équations (6.7.2b) et (6.7.2a)

donc, et sa directrice est $\frac{13}{2\sqrt{2}}$ unités plus bas, c'est-à-dire elle se confond avec l'axe des x . Son graphe est dessiné sur la page suivante.

Exercice 6.7.3. Décrire les coniques représentées par les équations $13x^2 - 18xy + 37y^2 = 160$ et $9x^2 - 54x - 4y^2 + 32y - 19 = 0$.

⁶Cette équation apparaît dans la section II.3 de "*L'analyse au fil de l'histoire*" par E. Hairer et G. Wanner. Elle représente l'enveloppe de la familles de droites $\{y = \frac{a-13}{a}(x-a) : 0 \leq a \leq 13\}$.

7 Les isométries du plan

7.1 Premières définitions et notations

Dans cette section, on considère les espaces métriques d'une manière générale ; dans les sections suivantes, on se bornera à l'exemple du plan.

Soit X un ensemble. On note $X \times X$ l'ensemble des paires d'éléments de X , c'est-à-dire

$$X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}.$$

Soit d une application de $X \times X$ aux nombres réels positifs telle que

(i) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, pour tous $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

On dit alors que d est une **distance** ou une **métrique** sur l'ensemble X , et que la paire (X, d) est un **espace métrique**. La propriété (iii) s'appelle **l'inégalité du triangle**.

Une **isométrie** de (X, d) est une application bijective $f : X \rightarrow X$ telle que

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X \quad (*)$$

(voir l'appendice 9 pour les définitions de bijectivité, injectivité, surjectivité etc.). On dit qu'une telle application "préserve les distances" entre les éléments de X .

Remarque 7.1.1. En fait, une application *surjective* $f : X \rightarrow X$ satisfaisant la propriété (*) est automatiquement injective (et donc bijective) : si $x, y \in X$ sont tels que $f(x) = f(y)$, alors $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ et il suit de la propriété (i) ci-dessus que $x = y$.

Lemme 7.1.2. *L'inverse d'une isométrie est aussi une isométrie.*

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow X$ une isométrie. Son inverse f^{-1} est une application bijective de X à X ; il faut vérifier que $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Soient $x, y \in X$. Posons $u = f^{-1}(x)$ et $v = f^{-1}(y)$. Alors

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(u, v) = d(f(u), f(v)) = d(x, y),$$

la deuxième égalité suivant du fait que f est une isométrie, et la troisième de la définition de u et v . □

Soit $\text{Isom}(X)$ l'ensemble de toutes les isométries de l'espace métrique (X, d) . Pour tous $f, g \in \text{Isom}(X)$, on note par $f \circ g$ l'application de X à X définie par la formule suivante :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in X.$$

Lemme 7.1.3. *Si $f, g \in \text{Isom}(X)$, alors $f \circ g \in \text{Isom}(X)$.*

Démonstration. Cette démonstration est laissée en exercice.

Lemme 7.1.4. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ pour tous $f, g, h \in \text{Isom}(X)$.

Démonstration. Soit $x \in X$. Pour calculer $[f \circ (g \circ h)](x)$, il faut d'abord appliquer la fonction $g \circ h$ à x et ensuite la fonction f , ce qui donne $f(g \circ h(x)) = f(g(h(x)))$. D'autre part, pour calculer $[(f \circ g) \circ h](x)$, on doit d'abord appliquer la fonction h et ensuite la fonction $f \circ g$, ce qui donne aussi $(f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$. \square

Soit Id l'élément de $\text{Isom}(X)$ qui envoie chaque élément de X sur lui-même, c'est-à-dire $\text{Id}(x) = x$ pour tout $x \in X$. Notons que⁷ $f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f$ pour tout $f \in \text{Isom}(X)$. Autrement écrit, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$ pour tout $f \in \text{Isom}(X)$.

Lemme 7.1.5. Si $f, g \in \text{Isom}(X)$, alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

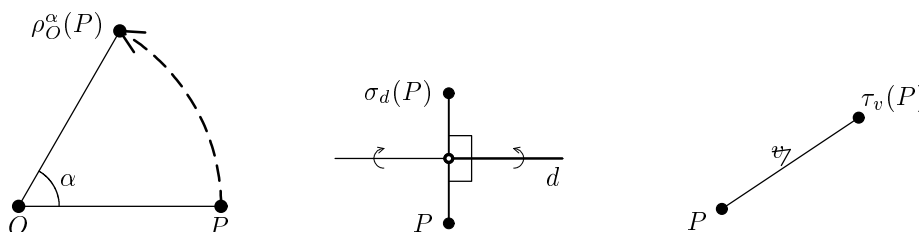
Démonstration. L'inverse de la composition $f \circ g$ est l'unique isométrie h de X telle que $(f \circ g) \circ h = \text{Id}$. Comme $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ \text{Id} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \text{Id}$, on a $h = g^{-1} \circ f^{-1}$. \square

7.2 Les isométries de base

Soit π le plan euclidien et soit d la distance usuelle sur π , c'est-à-dire pour tous points $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$ dans π , la distance $d(P, Q)$ est définie par la formule suivante :

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Le but de ce chapitre est de classer toutes les isométries du plan. Voyons tout d'abord quelques exemples d'isométries.



Exemple 7.2.1. Soit O un point du plan et α un nombre réel. La **rotation** d'angle α au tour du point O (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) est une isométrie du plan que l'on note ρ_O^α .

Exemple 7.2.2. Soit d une droite du plan. La **symétrie axiale** d'axe d est une isométrie du plan que l'on note σ_d .

Exemple 7.2.3. Soit v un vecteur. La **translation** par le vecteur v est une isométrie du plan que l'on note τ_v .

⁷Cette propriété et les trois lemmes 7.1.2, 7.1.3 et 7.1.4 montrent que $\text{Isom}(X)$ est un **groupe**. En général, un groupe est un ensemble G muni d'une multiplication \star telle que

- (i) $g_1 \star g_2 \in G$ pour tous $g_1, g_2 \in G$,
- (ii) $g_1 \star (g_2 \star g_3) = (g_1 \star g_2) \star g_3$ pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$,
- (iii) il existe un élément e de G tel que $g \star e = e \star g = g$ pour tous $g \in G$, et
- (iv) pour tout $g_1 \in G$ il existe un élément $g_2 \in G$ tel que $g_1 \star g_2 = g_2 \star g_1 = e$.

7.3 Quelques propriétés des isométries du plan

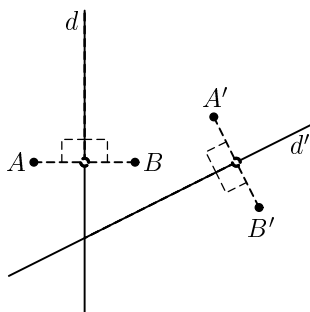
La définition d'une isométrie peut sembler abstraite. Pour se familiariser avec les isométries du plan, on peut se demander comment une telle application transforme des objets géométriques simples.

Lemme 7.3.1. *Soit f une isométrie du plan π . Alors l'image par f d'un cercle de rayon r est aussi un cercle de rayon r .*

La preuve de cette affirmation est directe.

Lemme 7.3.2. *Soit f une isométrie du plan π . Alors l'image par f d'une droite est aussi une droite.*

Démonstration. Soit d une droite. Choisissons deux points distincts A et B du plan tels que d est la médiatrice du segment $[AB]$. Soient A' et B' les images par f des points A et



B , respectivement, et soit d' la médiatrice⁸ du segment $[A'B']$. On se rappelle du premier semestre que les droites d et d' peuvent se décrire de la manière suivante :

$$d = \{P \in \pi : d(P, A) = d(P, B)\}$$

$$d' = \{Q \in \pi : d(Q, A') = d(Q, B')\}.$$

On va montrer que l'image $f(d)$ de d est d' . Supposons que P est un point de la droite d . Alors

$$d(P, A) = d(P, B) \implies d(f(P), f(A)) = d(f(P), f(B)) \quad \text{car } f \text{ préserve les distances}$$

$$\implies d(f(P), A') = d(f(P), B') \quad \text{par définition de } A' \text{ et } B',$$

donc $f(P)$ appartient à la droite d' . Ceci montre que l'image $f(d)$ est incluse dans la droite d' . Il faut encore montrer que l'image est *toute* la droite. Supposons donc que Q est un point de la droite d' . Alors

$$d(Q, A') = d(Q, B') \implies d(Q, f(A)) = d(Q, f(B)) \quad \text{par définition de } A' \text{ et } B'$$

$$\implies d(f^{-1}(Q), A) = d(f^{-1}(Q), B) \quad \text{car } f^{-1} \text{ préserve les distances,}$$

donc le point $f^{-1}(Q)$ appartient à la droite d ; ce point est envoyé par f sur le point Q , ce qui montre que chaque point de la droite d' est l'image par f d'un point de d . \square

Ceci nous permet de déduire que l'image d'une demi-droite (resp. d'un segment de longueur l) par une isométrie est aussi une demi-droite (resp. un segment de longueur l).

Nous pouvons donc aussi démontrer que les angles sont aussi préservés.

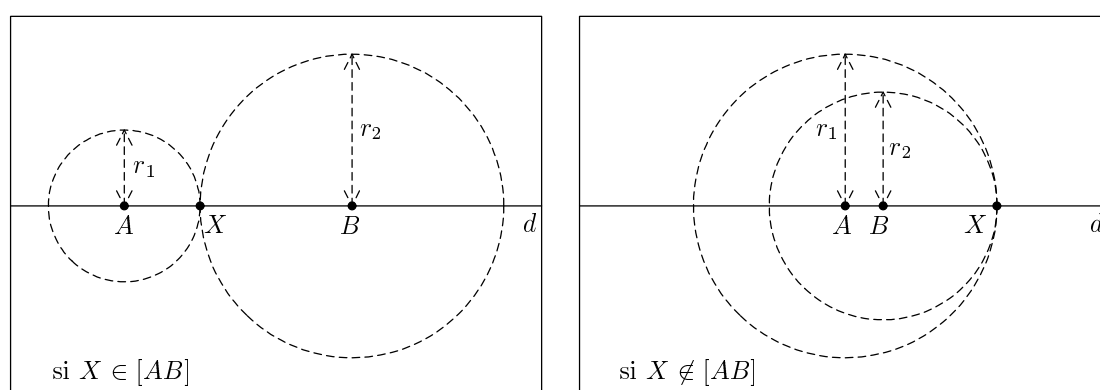
⁸Puisque $d(A', B') = d(f(A), f(B)) = d(A, B) \neq 0$, les points A' et B' sont distincts et la médiatrice d' est donc bien définie !

Lemme 7.3.3. Soit α un angle et f une isométrie du plan, alors $f(\alpha)$ est un angle isométrique à α .

Démonstration. Selon Euclide, un angle est la donnée de deux demi-droites issues d'un même point. Comme les isométries préservent les demi-droites, l'image d'un angle est un angle. Tout angle plus petit que $\frac{\pi}{2}$ peut être vu comme l'angle d'un triangle Δ . De plus, par (CCC), $f(\Delta)$ est isométrique à Δ , donc α est isométrique à $f(\alpha)$. \square

Lemme 7.3.4. Soit f une isométrie du plan π . Si f fixe deux points distincts A et B de π , alors f fixe tous les points sur la droite AB .

Démonstration. Supposons que A et B sont deux points distincts de π tels que $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Soit X un point de la droite AB . Soient r_1 et r_2 les distances de X aux points A



et B , respectivement. Alors

$$d(f(X), A) = d(f(X), f(A)) = d(X, A) = r_1,$$

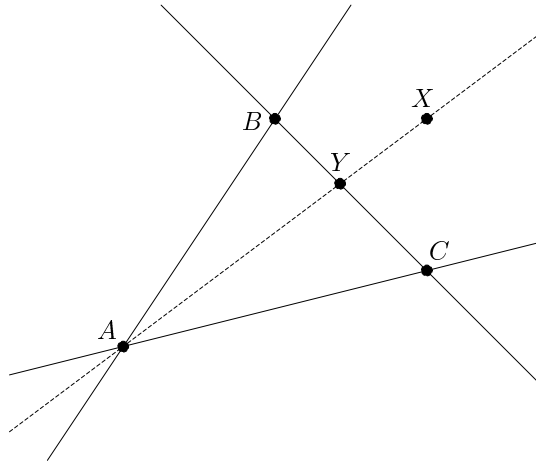
c'est-à-dire $f(X)$ se trouve sur le cercle centré en A de rayon r_1 . Le même argument appliqué au point B montre que $f(X)$ se trouve aussi sur le cercle centré en B de rayon r_2 . Le seul point du plan π se trouvant simultanément sur ces deux cercles est le point X lui-même (voir les dessins ci-dessus). Ceci montre que $f(X) = X$. \square

7.4 La classification des isométries du plan – première partie

On va classer les isométries du plan par leur nombre de points fixes. La première étape est de considérer les isométries fixant trois points non-alignés du plan.

Proposition 7.4.1. Soit f une isométrie fixant trois points non-alignés du plan π . Alors f est l'identité, c'est-à-dire f fixe tous les points du plan.

Démonstration. Supposons que A , B et C sont trois points non-alignés du plan tels que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$. Il suit du lemme 7.3.4 que f fixe tous les points sur les droites AB , AC et BC . Soit X un point du plan, on veut montrer que $f(X) = X$. Par la remarque précédente, on peut supposer que X se trouve en dehors de ces trois droites. Considérons maintenant les droites AX , BX et CX . Au moins une⁹ de ces trois droites doit passer par l'intérieur du triangle ΔABC ; quitte à changer les noms des trois points A , B



et C , on peut supposer que c'est la droite AX . Soit Y l'intersection des droites AX et BC . Puisque Y se trouve sur la droite BC , il est fixé par f . Il suit du lemme 7.3.4 que tous les points sur la droite AY sont fixés par f . En particulier, $f(X) = X$. \square

La proposition 7.4.1 peut se récrire sous la forme suivante.

Corollaire 7.4.2. *Soient f et g deux isométries du plan π . Supposons que A , B et C sont trois points non-alignés du plan tels que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$. Alors les isométries f et g sont égales, c'est-à-dire $f(P) = g(P)$ pour tout point P du plan.*

Démonstration. La composition $g^{-1} \circ f$ fixe les trois points non-alignés A , B et C , donc par la proposition 7.4.1, $g^{-1} \circ f = \text{Id}$. En composant par g à gauche les deux membres de l'équation, on trouve $f = g$. \square

Avant que l'on continue la classification des isométries du plan, on va appliquer le corollaire 7.4.2 pour voir ce qui se passe quand on compose deux symétries.

7.5 La composition de deux symétries

Par le lemme 7.1.3, on sait que la composition de deux isométries est de nouveau une isométrie. Dans cette section, on répond à la question suivante : quel genre d'isométrie obtient-on quand on compose deux symétries ?

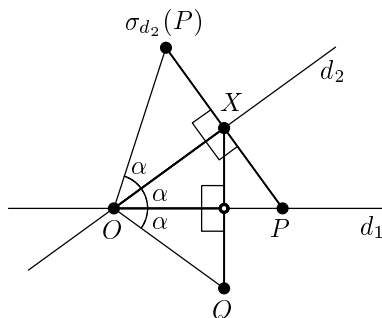
Proposition 7.5.1. *Soient d_1 et d_2 deux droites s'intersectant en un point O . Soit α l'angle entre d_1 et d_2 , mesuré à partir de d_1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Alors $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1} = \rho_O^{2\alpha}$.*

Démonstration. Supposons¹⁰ d'abord que $\alpha \leq 90^\circ$. Afin d'appliquer le corollaire 7.4.2, il faut trouver trois points non-alignés du plan dont l'image par la composition $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1}$ est égal à l'image par la rotation $\rho_O^{2\alpha}$. Prenons comme premier candidat le point O : comme O se trouve sur les deux droites d_1 et d_2 , les symétries σ_{d_1} et σ_{d_2} le fixent ; d'autre part, une rotation au

⁹Si X est à l'intérieur du triangle ΔABC , toutes les trois droites AX , BX et CX passent à l'intérieur de ce triangle. Si X est à l'extérieur du triangle, il n'y a qu'une des trois droites qui passe à l'intérieur du triangle.

¹⁰Sans cette hypothèse, le dessin ci-dessus et les affirmations concernant le point Q ne sont pas vrais.

tour du point O le fixe aussi, donc $(\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1})(O) = O = \rho_O^{2\alpha}$. Pour le prochain candidat, soit P un point de la droite d_1 distinct de O . Alors $(\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1})(P) = \sigma_{d_2}(P) = \rho_O^{2\alpha}(P)$. Il reste à trouver un point Q n'appartenant pas à la droite OP tel que $(\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1})(Q) = \rho_O^{2\alpha}(Q)$. Soit



X l'intersection de d_2 avec la perpendiculaire à d_1 passant par P , et soit $Q = \sigma_{d_1}(X)$. Alors

$$(\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1})(Q) = \sigma_{d_2}(\sigma_{d_1}(\sigma_{d_1}(X))) = \sigma_{d_2}(X) = X = \rho_O^{2\alpha}(Q).$$

Maintenant, supposons que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Soit $\beta = 180^\circ - \alpha$. Alors, par la première partie de la démonstration (avec les rôles des droites d_1 et d_2 échangés), on a $\sigma_{d_1} \circ \sigma_{d_2} = \rho_O^{2\beta}$. En prenant l'inverse de chaque côté de cette équation, on trouve

$$\begin{aligned} (\sigma_{d_1} \circ \sigma_{d_2})^{-1} &= (\rho_O^{2\beta})^{-1} \Rightarrow \sigma_{d_2}^{-1} \circ \sigma_{d_1}^{-1} = \rho_O^{360^\circ - 2\beta} && \text{par le lemme 7.1.5} \\ &\Rightarrow \sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1} = \rho_O^{2\alpha} && \text{car } \alpha + \beta = 180^\circ. \quad \square \end{aligned}$$

La proposition 7.5.1 montre que la composition de deux symétries d'axes non-parallèles est une rotation. Dans la proposition suivante, on voit que la réciproque est aussi vraie : toute rotation peut s'écrire comme la composition de deux symétries d'axes non-parallèles.

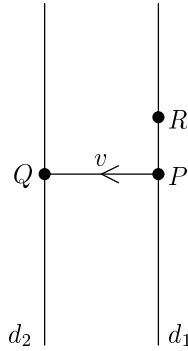
Proposition 7.5.2. *Soient O un point du plan et α un nombre réel. Alors il existe deux droites non-parallèles d_1 et d_2 telles que $\rho_O^\alpha = \sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1}$.*

Démonstration. Soient d_1 et d_2 deux droites passant par O telles que l'angle entre d_1 et d_2 (mesuré à partir de d_1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) est $\frac{1}{2}\alpha$. Alors par la proposition 7.5.1, $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1} = \rho_O^\alpha$. \square

Dans les propositions 7.5.1 et 7.5.2, on a traité la composition de deux symétries d'axes non-parallèles. Ci-dessous, on considère la composition de deux symétries d'axes parallèles.

Proposition 7.5.3. *Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles distinctes. Soit P un point de la droite d_1 , soit Q l'intersection de d_2 avec la perpendiculaire à d_1 passant par P , et soit v le vecteur (P, Q) . Alors $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1} = \tau_{2v}$.*

Démonstration. Soit R un point de la droite d_1 distinct de P . Remarquons que $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1}(X) = \sigma_{d_2}(X) = \tau_{2v}(X)$ pour tout point X de la droite d_1 ; en particulier $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1}(P) = \tau_{2v}(P)$ et $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1}(R) = \tau_{2v}(R)$. Considérons maintenant le point Q . L'image de Q par la symétrie σ_{d_1} est le point $\tau_{-2v}(Q)$; l'image du point $\tau_{-2v}(Q)$ par la symétrie σ_{d_2} est $\tau_{2v}(Q)$. Autrement



dit, $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1}(Q) = \tau_{2v}(Q)$. Par le corollaire 7.4.2, il en résulte que $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1} = \tau_{2v}$. \square

Cette proposition a aussi une réciproque : toute translation peut s'écrire comme la composition de deux symétries d'axes parallèles.

Proposition 7.5.4. *Soit v un vecteur du plan π . Alors il existe deux droites parallèles d_1 et d_2 telles que $\tau_v = \sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1}$.*

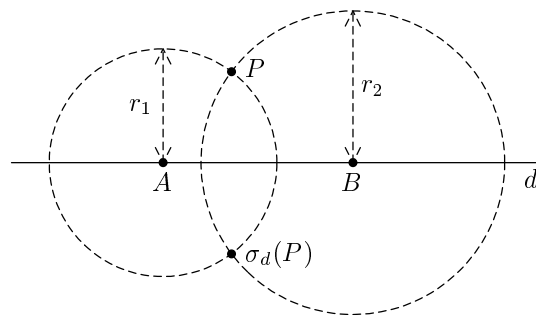
Démonstration. Soient d_1 et d_2 deux droites perpendiculaires à v telles que la distance entre d_1 et d_2 est la moitié de la longueur de v . Par la proposition 7.5.3, $\sigma_{d_2} \circ \sigma_{d_1} = \tau_v$. \square

7.6 La classification des isométries du plan – seconde partie

On revient à la classification des isométries par leur nombre de points fixes ; dans la prochaine étape, on considère les isométries ayant deux points fixes.

Proposition 7.6.1. *Soit f une isométrie du plan π fixant deux points distincts A et B mais aucun autre point en dehors de la droite AB . Alors f est la symétrie axiale d'axe AB .*

Démonstration. Notons d la droite AB . Soit P un point du plan π n'appartenant pas à d . On veut montrer que $f(P) = \sigma_d(P)$. Soient r_1 et r_2 les distances de P aux points A et B ,

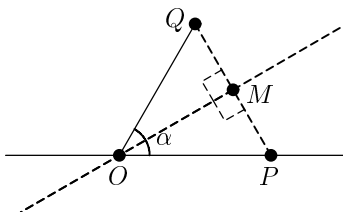


respectivement. Comme dans la preuve du lemme 7.3.4, $d(f(P), A) = r_1$ et $d(f(P), B) = r_2$, c'est-à-dire $f(P)$ se trouve simultanément sur le cercle centré en A de rayon r_1 et sur le cercle centré en B de rayon r_2 . Il n'y a que deux possibilités pour $f(P)$: soit P , soit $\sigma_d(P)$. La première est exclue par l'hypothèse sur f . Il résulte que $f(P) = \sigma_d(P)$. \square

La prochaine étape est de considérer les isométries n'ayant qu'un point fixe.

Proposition 7.6.2. *Soit f une isométrie du plan π ne fixant qu'un seul point O . Alors f est une rotation autour du point O .*

Démonstration. Soit P un point du plan distinct de O , et soit Q l'image de P par l'isométrie f . Notons que $d(Q, O) = d(f(P), f(O)) = d(P, O)$. Soit α l'angle entre les segments $[OP]$ et $[OQ]$, et soit M le point au milieu du segment $[PQ]$. La droite OM est alors la médiatrice du segment $[PQ]$. Remarquons que $Q = \sigma_{OM}(P)$ et $P = \sigma_{OM}(Q)$. Considérons la composition



$\sigma_{OM} \circ f$. Comme elle fixe les deux points (distincts) O et P , on peut conclure des propositions 7.4.1 et 7.6.1 qu'elle est soit l'identité soit la symétrie σ_{OP} . La première possibilité impliquerait que f était la symétrie σ_{OM} , ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse sur le nombre de points fixes de f . Il résulte donc que $\sigma_{OM} \circ f = \sigma_{OP}$, c'est-à-dire $f = \sigma_{OM} \circ \sigma_{OP}$. Par la proposition 7.5.1, f est donc une rotation d'angle α au tour du point O . \square

Dans la dernière étape de la classification des isométries du plan, on considère les isométries n'ayant aucun point fixe. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 7.6.3. *Soit f une isométrie du plan π ne fixant aucun point. Alors pour tout point P du plan, les points P , $f(P)$, $f^2(P)$ et $f^3(P)$ sont distincts.*

Démonstration. Puisque f n'a pas de point fixe, $f(P) \neq P$ et donc $d(f(P), P) > 0$. Comme f préserve les distances, on a $d(f^3(P), f^2(P)) = d(f^2(P), f(P)) = d(f(P), P) > 0$, c'est-à-dire $f^3(P) \neq f^2(P)$ et $f^2(P) \neq f(P)$. Le point $f^2(P)$ est donc distinct des points $f^3(P)$ et $f(P)$; on doit montrer qu'il est aussi distinct du point P .

Supposons par l'absurde que $f^2(P) = P$. Soit d la droite contenant P et $f(P)$. Considérons l'image de d par f . D'une part, il contient les points $f(P)$ et $f^2(P) = P$; d'autre part, le lemme 7.3.2 dit que l'image d'une droite est une droite. Il en résulte que l'image de d par f est d elle-même, c'est-à-dire f laisse la droite d invariante. Soit M le point au milieu du segment $[P, f(P)]$. On sait que l'image $f(M)$ du point M se trouve sur la droite d , mais en plus,

$$\begin{aligned} d(f(M), f(P)) &= d(M, P) && \text{car } f \text{ préserve les distances} \\ &= d(M, f(P)) && \text{par définition de } M \\ &= d(f(M), f^2(P)) && \text{car } f \text{ préserve les distances} \\ &= d(f(M), P) && \text{par hypothèse,} \end{aligned}$$

donc $f(M)$ est le point au milieu du segment $[P, f(P)]$, c'est-à-dire $f(M) = M$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du lemme. On conclut que $f^2(P) \neq P$.

Il suit directement que $d(f^3(P), f(P)) = d(f^2(P), P) > 0$, donc $f^3(P) \neq f(P)$. Il reste à démontrer que $f^3(P)$ est distinct de P . Supposons par l'absurde que $f^3(P) = P$. Soit C

le centre du cercle circonscrit du triangle non-dégénéré $\Delta(P, f(P), f^2(P))$, c'est-à-dire C est l'unique point du plan telle que $d(C, P) = d(C, f(P)) = d(C, f^2(P))$. Comme f préserve les distances, $d(f(C), f(P)) = d(f(C), f^2(P)) = d(f(C), P)$. Le cercle circonscrit étant unique, ceci implique que $f(C) = C$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du lemme. On conclut que $f^3(P) \neq P$. \square

La classification des isométries n'ayant pas de point fixe se divise en deux parties : celles pour lesquelles $P, f(P)$ et $f^2(P)$ sont alignés pour tout point P du plan, et celles pour lesquelles il existe un point P du plan tel que $P, f(P)$ et $f^2(P)$ ne sont pas alignés.

Proposition 7.6.4. *Soit f une isométrie du plan π ne fixant aucun point. Supposons en plus que pour chaque point P du plan, les points $P, f(P)$ et $f^2(P)$ sont alignés. Alors f est une translation.*

Démonstration. Soit P un point du plan et soit d_1 la droite passant par les trois points $P, f(P)$ et $f^2(P)$. Soit Q un point du plan ne se trouvant pas sur la droite d_1 , et soit d_2 la droite passant par les trois points $Q, f(Q)$ et $f^2(Q)$. On va montrer que les couples de points $(P, f(P))$ et $(Q, f(Q))$ représentent le même vecteur.

La première étape est de montrer que les vecteurs $(P, f(P))$ et $(Q, f(Q))$ sont parallèles. Supposons par l'absurde qu'ils ne le sont pas, c'est-à-dire les droites d_1 et d_2 s'intersectent en un point O . Notons que $f(d_1) = d_1$ et $f(d_2) = d_2$ par le lemme 7.3.2. Alors $f(O)$ doit se trouver simultanément sur les droites d_1 et d_2 , c'est-à-dire $f(O) = O$, ce qui contredit l'hypothèse que f n'a pas de point fixe. Les droites $Pf(P)$ et $Qf(Q)$ sont donc parallèles. Remarquons aussi que si P et $f(P)$ sont donnés et que, par hypothèse, $P, f(P)$ et $f^2(P)$ sont distincts deux à deux et alignés, alors $f^2(P)$ est uniquement déterminé comme le point diamétralement opposé à P dans le cercle de centre $f(P)$ et de rayon $d(P, f(P))$.

Il reste à montrer que les vecteurs représentés par $(P, f(P))$ et par $(Q, f(Q))$ ont la même orientation et la même longueur.

Par le lemme 7.3.3, les angles $\widehat{QPf(P)}$ et $\widehat{f(Q)f(P)f^2(P)}$ sont isométriques et comme $P, f(P)$ et $f^2(P)$ sont alignés, par le théorème des angles alternes-internes, les droites PQ et $f(P)f(Q)$ sont parallèles. Le quadrilatère $PQf(Q)f(P)$ a donc deux paires de côtés parallèles. C'est donc un parallélogramme. Ceci permet de conclure premièrement que $d(P, f(P)) = d(Q, f(Q))$ et deuxièmement que les vecteurs $(P, f(P))$ et $(Q, f(Q))$ ont même orientation, par définition de l'orientation.

On a donc montré que $(P, f(P))$ et $(Q, f(Q))$ représentent le même vecteur v pour P et Q quelconques, pour autant que les droites $Pf(P)$ et $Qf(Q)$ soient distinctes (et donc parallèles).

Soit un point R différent de P mais appartenant à la droite $Pf(P)$; comme f préserve les droites $f(R)$ appartient aussi à $Pf(P)$. En faisant le même raisonnement qu'auparavant avec les points R et Q , on obtient que $(R, f(R))$ représente aussi v .

On a donc trois points non alignés P, Q et R dont les images par f et par τ_v coïncident, ceci implique que $f = \tau_v$. \square

Proposition 7.6.5. *Soit f une isométrie du plan π ne fixant aucun point. Supposons en plus qu'il existe un point P du plan tel que les points $P, f(P)$ et $f^2(P)$ ne sont pas alignés. Alors f est la composition d'une translation et d'une symétrie dont l'axe est parallèle à la translation.*

Démonstration. La première étape est de montrer que les trois points P , $f^2(P)$ et $f^4(P)$ sont alignés. Pour ce faire, il faut déterminer la position de $f^3(P)$. Comme f est une isométrie $d(P, f(P)) = d(f(P), f^2(P)) = d(f^2(P), f^3(P))$. De même $d(P, f^2(P)) = d(f(P), f^3(P))$. $f^3(P)$ appartient donc à l'intersection du cercle centré en $f(P)$ et de rayon $d(P, f^2(P))$ et du cercle centré en $f^2(P)$ de rayon $d(P, f(P))$. On a donc deux possibilités pour $f^3(P)$. Comme l'intersection de deux cercles distincts est symétrique par rapport à la droite passant par les deux centres $f(P)$ et $f^2(P)$, il y a donc deux cas à considérer : soit $f^3(P)$ appartient au même demi-plan défini par la droite $d = f(P)f^2(P)$ et contenant P , soit il appartient à l'autre demi-plan.

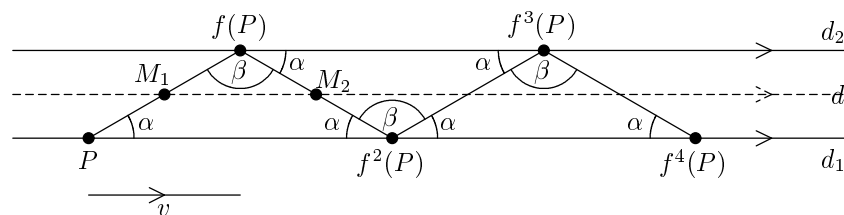
Pour exclure le premier cas nous démontrerons le lemme suivant:

Lemme 7.6.6. *Soit f une isométrie du plan et P un point du plan tels que P , $f(P)$ et $f^2(P)$ ne sont pas alignés et tels que P et $f^3(P)$ sont dans le même demi-plan défini par la droite passant par $f(P)$ $f^2(P)$, alors f admet un point fixe.*

On suppose maintenant que $f^3(P)$ n'appartient pas au même demi-plan défini par la droite $d = f(P)f^2(P)$ et contenant P .

Considérons le triangle non-dégénéré $\Delta(P, f(P), f^2(P))$.

Comme f est une isométrie, par (CCC), les trois triangles suivants $\Delta(P, f(P), f^2(P))$, $\Delta(f(P), f^2(P), f^3(P))$ et $\Delta(f^2(P), f^3(P), f^4(P))$ sont isocèles et isométriques. Notons α l'angle à la base du triangle isocèle et β au sommet du triangle isocèle. On sait que $2\alpha + \beta = 2\pi$. Comme $f^3(P)$ n'appartient pas au même demi-plan défini par la droite $d = f(P)f^2(P)$ et



contenant P , il suit que

$$\begin{aligned} \angle(P, f^2(P), f^4(P)) &= \angle(P, f^2(P), f(P)) + \angle(f(P), f^2(P), f^3(P)) + \angle(f^3(P), f^2(P), f^4(P)) \\ &= \angle(P, f^2(P), f(P)) + \angle(P, f(P), f^2(P)) + \angle(f(P), P, f^2(P)) \\ &= \alpha + \beta + \alpha = 2\pi, \end{aligned}$$

L'angle $\widehat{P f^2(P) f^4(P)}$ est donc plat. Autrement dit, les points P , $f^2(P)$ et $f^4(P)$ sont alignés.

Soit d_1 la droite passant par ces trois points et soit d_2 la droite passant par les points $f(P)$ et $f^3(P)$. Par le théorème des angles alternes-internes, les droites d_1 et d_2 sont parallèles. car $\angle(P, f^2(P), f(P)) = \alpha = \angle(f(P), P, f^2(P)) = \angle(f^2(P), f(P), f^3(P))$.

Soit v le vecteur $\frac{1}{2}(P, f^2(P))$. Soient M_1 et M_2 les points au milieu des segments $[P, f(P)]$ et $[f(P), f^2(P)]$, respectivement, par le théorème du segment moyen la droite M_1M_2 est parallèle aux droites d_1 et d_2 . De plus, par le théorème de Thalès, le segment $[M_1, M_2]$ et le vecteur v ont la même longueur. Autrement dit, la droite M_1M_2 est la médiatrice du segment $[\tau_v(P), f(P)]$.

Il en résulte que $(\sigma_d \circ \tau_v)(P) = f(P)$. De même, $(\sigma_d \circ \tau_v)(f(P)) = f^2(P) = f(f(P))$ et $(\sigma_d \circ \tau_v)(f^2(P)) = f^3(P) = f(f^2(P))$. Par le corollaire 7.4.2, les deux isométries $\sigma_d \circ \tau_v$ et f sont donc égales. \square

Reste à démontrer le lemme 7.6.6.

Démonstration Notons d_1 la médiatrice du segment $[P, f(P)]$ et d_2 celle du segment $[f(P), f^2(P)]$. Comme les trois points $P, f(P)$ et $f^2(P)$ ne sont pas alignés, d_1 et d_2 ne sont pas parallèles. Notons O leur point d'intersection.

Comme l'image par une isométrie de la médiatrice d'un segment est la médiatrice du segment image, $d_2 = f(d_1)$. Notons aussi d_3 la médiatrice du segment $[f^2(P), f^3(P)]$, pour la même raison qu'auparavant, $d_3 = f(d_2)$. Ainsi $f(O)$ est l'intersection de d_2 et de d_3 . $f(O)$ appartient donc à d_2 et comme $d(P, O) = d(f(P), f(O))$, $f(O)$ est soit égal à O , soit au l'image de O par la symétrie axiale d'axe $f(P)f^2(P)$. Comme par hypothèse P et $f^3(p)$ sont dans le même demi-plan défini par la droite $f(P)f^2(P)$, on a nécessairement que $f(O) = O$. O est fixe par f \square

Remarque 7.6.7. La composition d'une translation avec une symétrie dont l'axe de symétrie est parallèle à la translation s'appelle une **transsymétrie**.

On résume les résultats de cette section dans le théorème suivant.

Théorème 7.6.8. *Les seules isométries du plan sont l'identité, les symétries, les rotations, les translations et les transsymétries.*

Corollaire 7.6.9. *Toute isométrie du plan peut s'écrire comme la composition d'au plus 3 symétries.*

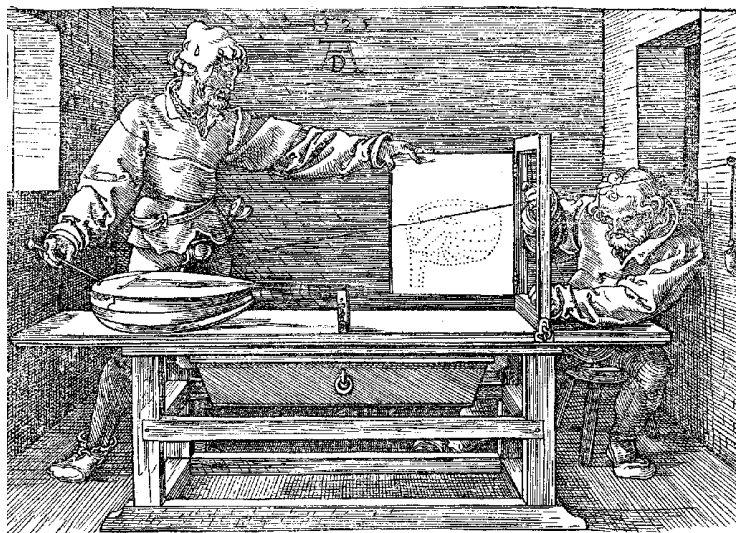
Démonstration. L'identité est le produit de zéro symétrie (ou, si on n'aime pas cette idée, on peut écrire $\text{Id} = \sigma_d \circ \sigma_d$ pour n'importe quelle droite d du plan). Par la proposition 7.5.2, une rotation est la composition de deux symétries d'axes non-parallèles. Par la proposition 7.5.4, une translation est la composition de deux symétries d'axes parallèles ; une transsymétrie s'écrit alors comme la composition de trois symétries. \square

Remarque 7.6.10. Une remarque culturelle. L'approche qui consiste à utiliser le nombre de points fixes pour classer les isométries est aussi valable dans l'espace avec la distance classique. Bien sûr le nombre de types d'isométries est plus grand, mais l'approche reste la même. Par exemple une isométrie de l'espace qui fixe quatre points non coplanaires est l'identité.

Plus généralement cette approche fonctionne pour tout espace euclidien (i.e. espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire). Ceci permet aussi de remarquer les isométries d'un espace euclidien sont nécessairement des applications affines.

8 La perspective

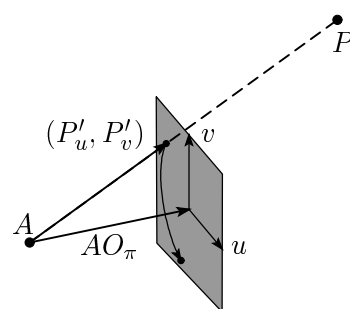
Depuis les temps les plus reculés, l'homme a essayé de représenter son environnement, en particulier par la peinture. Il lui fallait donc représenter l'espace sur un plan. Il a fallu longtemps pour comprendre comment effectuer cela de manière réaliste; cette manière s'appelle la perspective.



D'après le petit Larousse, le mot "perspective" découle de "perspicere" qui en latin veut dire "voir à travers". Dans le tableau de Dürer ci-dessus, on voit comment deux personnes essaient de représenter une mandoline sur un plan. Ils déterminent physiquement, à l'aide d'un fil fixé en un point du mur d'un côté et touchant un point de la mandoline de l'autre, le point d'intersection du plan avec le fil. Le point fixe représente l'oeil de l'observateur ou le plan focal de l'appareil de photo et le fil, le rayon de lumière allant de l'objet à l'oeil. On comprend mieux l'origine étymologique du mot perspective.

Mathématiquement, la **perspective** est une projection centrale de centre A sur un plan de projection π . Le point A représente l'oeil de l'observateur, le plan π le dessin.

Les données sont les suivantes : les coordonnées du point A , et le vecteur $\overrightarrow{AO_\pi}$ où O_π est le pied de la perpendiculaire au plan π passant par A . Ainsi la norme du vecteur $\overrightarrow{AO_\pi}$ détermine la distance entre A et π et sa direction la position de π dans l'espace. Soit P un point de l'espace tel que AP ne soit pas parallèle au plan π . Notons P' le point d'intersection de AP avec π . Si on se donne un repère orthonormé $\{u, v\}$ sur le plan π centré au point O_π , on cherche à déterminer dans ce repère les coordonnées de P' . Il faut tout d'abord construire le repère orthonormal. Il faut pour cela faire le choix de l'axe horizontal dans le plan π . Par exemple en prenant pour \vec{u} le produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{AO_\pi}$ avec le troisième vecteur de la base canonique (vertical) et en le normalisant. Puis comme deuxième vecteur \vec{v} , le produit vectoriel normalisé de $\overrightarrow{AO_\pi}$ avec \vec{u} .



On peut maintenant exprimer P' en fonction de P . Plus précisément, les vecteurs \overrightarrow{AP} et $\overrightarrow{AP'}$

sont parallèles et donc

$$\overrightarrow{AP'} = \lambda \overrightarrow{AP}.$$

Donc λ peut être déterminé par $0 = \langle \overrightarrow{AO_\pi} - \overrightarrow{AP'} | \overrightarrow{AO_\pi} \rangle$ et on déduit, par la bilinéarité du produit scalaire,

$$\lambda = \frac{\langle \overrightarrow{AO_\pi} | \overrightarrow{AO_\pi} \rangle}{\langle \overrightarrow{AO_\pi} | \overrightarrow{AP} \rangle}.$$

Les coordonnées (P'_u, P'_v) sont données par le produit scalaire de $\overrightarrow{AP'}$ avec \vec{u} et \vec{v} .

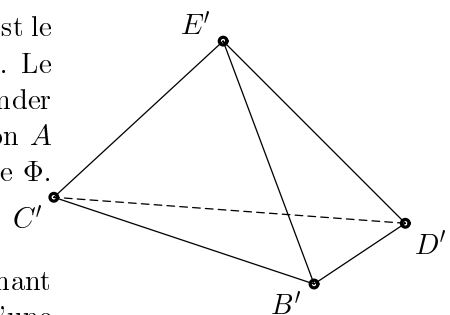
$$P'_u = \frac{\langle \overrightarrow{AO_\pi} | \overrightarrow{AO_\pi} \rangle}{\langle \overrightarrow{AO_\pi} | \overrightarrow{AP} \rangle} \langle \overrightarrow{AP} | \vec{u} \rangle \quad P'_v = \frac{\langle \overrightarrow{AO_\pi} | \overrightarrow{AO_\pi} \rangle}{\langle \overrightarrow{AO_\pi} | \overrightarrow{AP} \rangle} \langle \overrightarrow{AP} | \vec{v} \rangle.$$

Ces formules sont très utiles pour une implantation informatique de dessin en perspective d'objets en trois dimensions, mais elles sont fastidieuses à utiliser à la main. Faisons tout de même un exemple, puis nous nous intéresserons à des techniques de dessin.

Exemple :

Soit un tétraèdre donné par les sommets $B = (2, 3, 0)$, $C = (6, 3, 0)$, $D = (4, 6, 0)$ et $E = (4, 4, 2)$. Le plan de projection π d'équation $x = 0$ et un point de vue $A = (-1, 0, 1)$. Dans le plan π , on peut choisir comme base $\vec{u} = (0, 1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Pour chaque sommet du tétraèdre, il faut calculer les coordonnées de la projection centrale de A sur π . Comme $A = (-1, 0, 1)$, le pied de la perpendiculaire à π passant par A est $O_\pi = (0, 0, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AO_\pi}$ a comme composantes $(1, 0, 0)^t$ et est de norme 1. Pour A , on obtient donc $\overrightarrow{AB} = (3, 3, -1)^t$ et donc $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}(3, 3, -1)^t = (1, 1, -1/3)^t$. Ainsi dans la base $\vec{u} = (0, 1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 0, 1)$, B' a les coordonnées $(1, -1/3)$. De la même manière on calcule $C' = (3/7, -1/7)$, $D' = (6/5, -1/5)$ et $E' = (4/5, 1/5)$. On obtient donc l'image suivante. Pour obtenir cette image, on a relié les points images par des droites. Mais est-on sûr que l'image d'un segment de droite par une projection centrale est bien un segment de droite?

Pour démontrer cela nous allons formaliser un peu la projection centrale. Il s'agit d'une application de $\mathbb{R}^3 - \pi_A$ dans π où π_A est le plan parallèle à π passant par A ; notons Φ , cette application. Le fait que le domaine de Φ ne contienne pas π_A revient à demander que la droite reliant le point P à projeter au point de vision A ne soit pas parallèle à π . Démontrons quelques propriétés de Φ .



Définitions et propriétés

1. Φ conserve les droites (exception faite des droites contenant A qui se projettent sur un point). Ainsi l'image d'une droite est une droite.

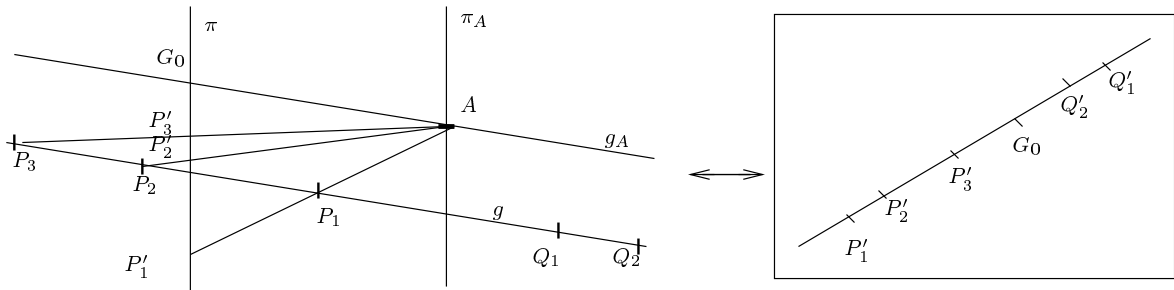
Néanmoins, pour une droite g non parallèle à π , le point d'intersection entre g et π n'a pas d'image par Φ , il est envoyé à l'infini. L'image de la droite g est une droite moins un point. Ce point manquant à l'image $\Phi(g)$, noté G_0 et appelé **point de fuite** de g , est l'intersection de π avec la droite g_A parallèle à g passant par A . G_0 est la limite de $\Phi(P)$ quand le point P dans g tend vers l'infini. G_0 coupe l'image en deux demi-droites, l'une étant l'image

des points de g qui sont du même côté de π_A que π , l'autre, l'image des points séparés de π par π_A . Dans la pratique néanmoins, on ne dessine qu'une des deux demi-droites.

Une droite g parallèle à π a pour image une droite, mais cette image n'a pas de point de fuite.

2. Si deux droites g et h sont parallèles entre elles, mais non parallèles à π , alors leurs images par Φ ont le même point de fuite.
3. Si deux droites g et h sont parallèles entre elles et parallèles à π , alors leurs images par Φ restent parallèles dans π ou sont confondues.
4. Un plan α non parallèle à π l'intersecte en une droite a . On appelle **ligne de fuite** du plan α , l'intersection de π avec le plan α_A parallèle à α et contenant A . La droite a et la ligne de fuite de α sont parallèles.
5. Si une droite g est parallèle à un plan α , alors le point de fuite de g est contenu dans la ligne de fuite du plan α .

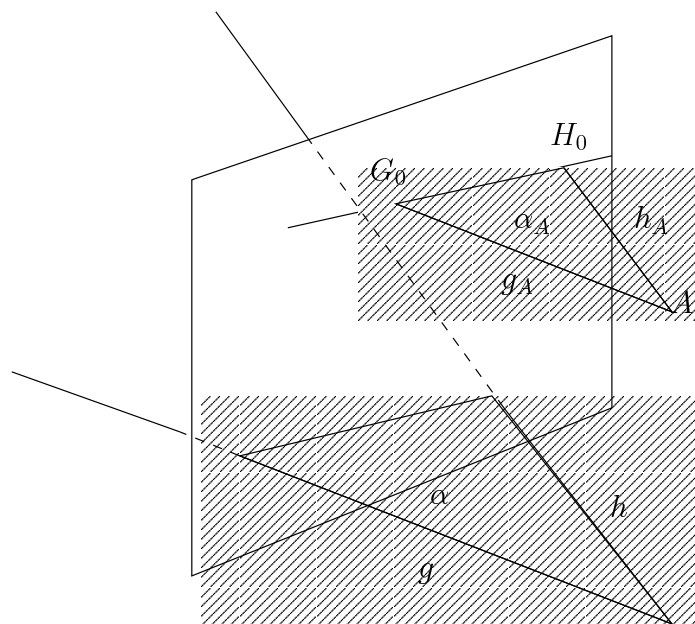
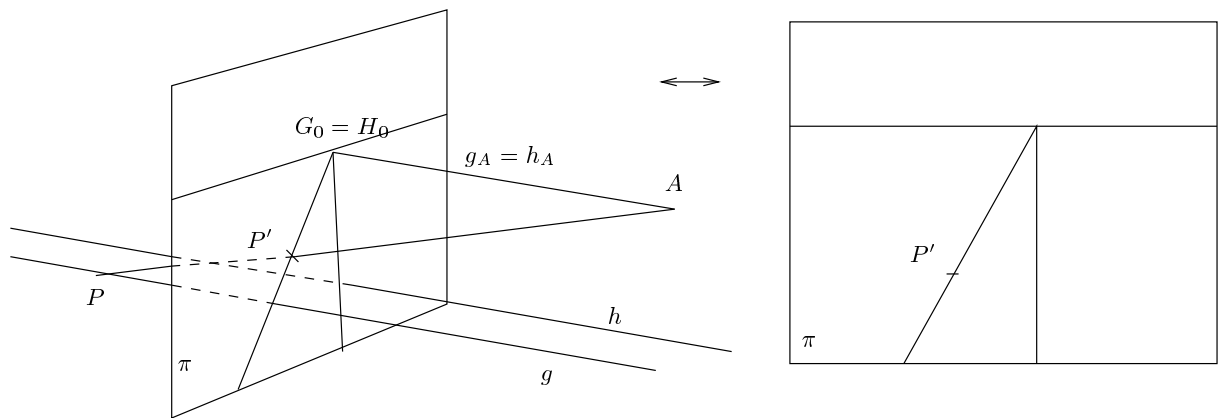
Démonstration : La preuve de 1) vient du fait suivant : Si le point A n'est pas contenu dans la droite g , alors g et A déterminent un plan dont l'intersection avec π est l'image de g par Φ . Cette intersection existe car P n'est pas contenu dans π_A . Si par contre A est contenu dans g , l'image de g par Φ est le point d'intersection de g et Φ uniquement. La définition du point de fuite d'une droite est justifiée par le dessin suivant.



Le point 2) est clair, puisque pour deux droites g et h parallèles entre elles, les droites g_A et h_A sont confondues, leurs intersections G_0 et H_0 avec π aussi. Le point 3) est clair. Le point 4) est une définition et le point 5) découle du point 2) et du fait que toute droite du plan α a son point de fuite contenu dans la ligne de fuite de α . Cqfd

Remarque Faisons encore quelques remarques plus liées à l'emploi de la perspective en peinture. Souvent les peintres considèrent le plan de projection comme étant un plan vertical et ils ont un plan de référence horizontal ε , le sol. La ligne de fuite du sol est appelée l'horizon et notée e_0 . Ceci a comme conséquence, le fait que les droites verticales ont des images verticales et restent donc parallèles. De manière similaire, la ligne de fuite d'un plan vertical est aussi une droite verticale. Pour justifier cette dernière assertion, il suffit de remarquer que la droite d'intersection entre π et le plan vertical est une droite verticale (au sens qu'elle est perpendiculaire au sol et donc à l'horizon). Comme la ligne de fuite est parallèle à cette intersection, elle est aussi verticale.

D'un point de vue théorique, le choix du sol ε fournit aussi certains avantages. En particulier, la restriction de Φ à $\varepsilon - \varepsilon \cap \pi_A$ est en bijection avec $\pi - e_0$. Ceci a comme conséquence que



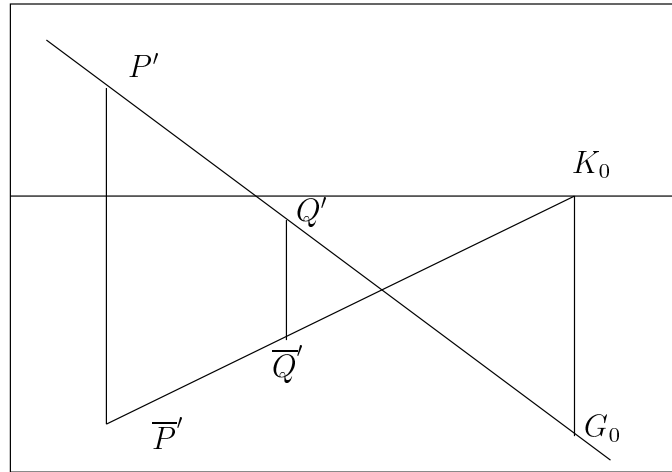
l'image P' par Φ d'un point P du sol détermine le point P . **Quelques constructions en perspective.**

- **Point de fuite :** Etant donné deux points P et Q , et le sol ε , construire le point de fuite de la droite passant par P et Q .

Etant donné le sol et donc l'horizon, il est facile de trouver le point de fuite d'une droite contenue dans le sol ou parallèle à celui-ci. En effet il suffit de prendre l'image de deux points de cette droite. L'image de la droite sur π est donc la droite définie par ces deux images et le point de fuite de cette droite est l'intersection avec l'horizon. La même construction est valable pour les droites parallèles au sol.

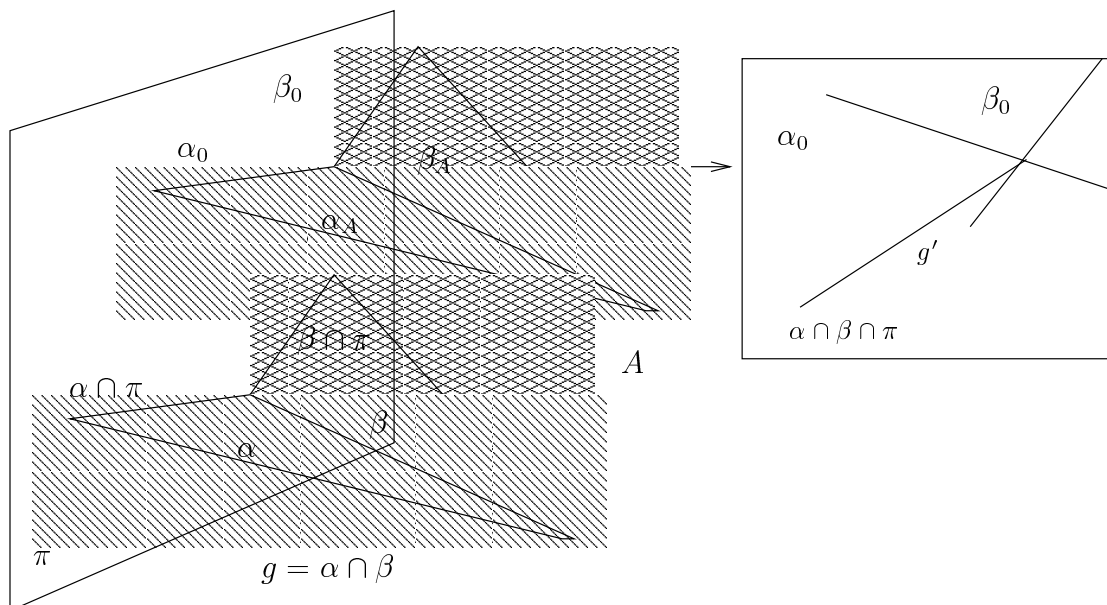
Il est plus délicat de trouver le point de fuite d'une droite en général. Remarquons que les images de deux points de la droite ne suffisent pas. En effet, il y a sur chacune de ces images une infinité de points qui se projettent et la droite reliant les deux images est donc l'image d'une infinité de droites. Mais en utilisant le fait de connaître le sol

et donc l'horizon e_0 il est possible de décrire le point de fuite voulu, si on connaît non seulement les images P' et Q' de deux points P et Q , mais aussi les images \overline{P}' et \overline{Q}' des projections \overline{P} et \overline{Q} sur le sol de ces deux points. On suppose donc connu sur le plan de



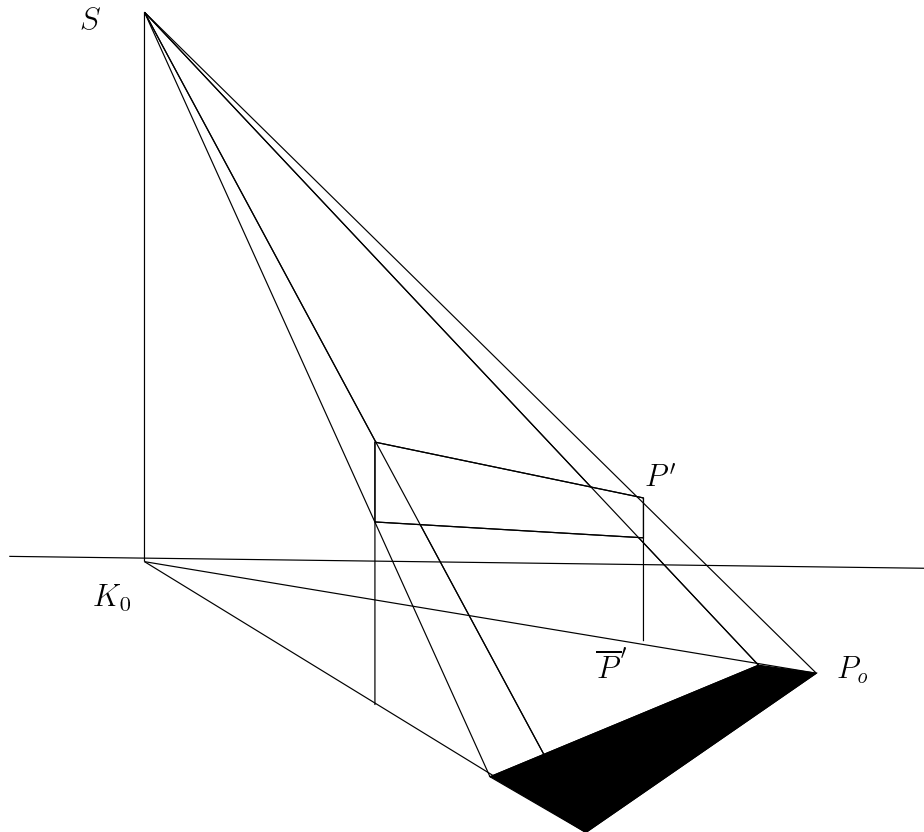
projection π , les éléments suivants : P' , Q' , \overline{P}' , \overline{Q}' et e_0 . Pour construire le point de fuite de la ligne PQ , il faut trouver tout d'abord le point de fuite K_0 de la ligne $\overline{P}\overline{Q}$, c'est à dire l'intersection de la droite $\overline{P}'\overline{Q}'$ avec e_0 . La droite verticale passant par K_0 est la ligne de fuite du plan vertical contenant P , Q , \overline{P} et \overline{Q} , le point de fuite de la droite PQ est donc l'intersection de cette droite verticale avec la droite $P'Q'$.

- **Ligne de fuite :** Pour trouver la ligne de fuite d'un plan α , il suffit de prendre deux droites quelconques dans α et de relier leurs points de fuite.
- **Intersection de deux plans :** Le principe est de construire deux points d'intersection

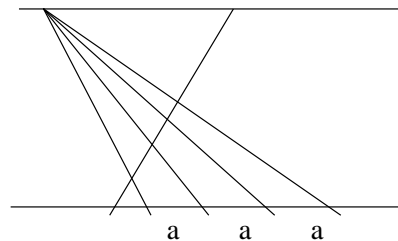


de α et β . Soit comme point d'intersection de deux droites concourantes et chacune contenue dans un des plans, soit comme le point de fuite de la droite d'intersection de α et β (point qui est obtenu comme intersection des lignes de fuites de α et β).

- **Ombre :** Etant donné le soleil S (une source lumineuse à l'infini), le sol, un point P



et sa projection verticale \bar{P} sur le sol, le but est de trouver l'ombre P_o de P sur le sol (ou sur un autre objet). On suppose connu dans π , P' , \bar{P}' , S . Notons K_0 le pied de la perpendiculaire à S sur e_0 . L'ombre du point P est obtenu sur π comme l'intersection des droites SP' et $K_0\bar{P}'$.



- **Découpe équidistante :** Comment découper l'image d'une droite du sol en segments visiblement de même longueur. Tracer une parallèle à e_0 coupant la droite g en un point. Disposer sur cette parallèle des points équidistants et relier chacun d'eux à un point

fixé de l'horizon distinct de G_0 (cela revient à prendre toutes ces droites parallèles entre elles). L'intersection de chacune de ces droites avec g donne la découpe voulue. Ceci se justifie par Thalès.

Les éléments d'Euclide : Livre 1, les énoncés.

Définitions.

1. Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les limites d'une ligne sont des points.
4. Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les limites d'une surface sont des lignes.
7. Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
8. Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
9. Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé rectiligne.
10. Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.
11. Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. Un angle aigu celui qui est plus petit qu'un droit.
13. Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).
15. Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.
16. Et le point est appelé centre du cercle.
17. Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.
19. Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites; trilatères (triangles) : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre; multilatères par plus de quatre.

20. Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.
21. De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit; obtusangle, celle qui a un angle obtus; acutangle, celle qui a les trois angles aigus.
22. Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale; un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle; un rhomboïde (parallélogramme), celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.
23. Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

Demandes (postulats)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

Notions communes (axiomes)

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont inégaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Le tout est plus grand que la partie.

Propositions

1. Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.
2. Placer en un point une droite égale à une droite donnée.
3. De deux droites inégales données, retrancher de la plus grande la plus petite.

4. Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'il ont un angle égal à un angle, celui-ci contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale et les angles seront égaux à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.
5. Les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux.
6. Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous-tendent les angles seront aussi égaux entre eux.
7. Sur la même droite, ne seront pas construites, égales chacune à chacune aux deux mêmes droites, deux autres droites, en un point quelconque, différent mais du même côté, et ayant les mêmes limites que les premières.
8. Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, s'ils ont, de plus, la base égale à la base, ils auront aussi un angle égal, à savoir celui qui est contenu par les droites égales.
9. Couper un angle rectiligne donné en deux parties égales.
10. Couper en deux parties égales une droite limitée donnée.
11. Mener une ligne droite à angle droit avec une droite donnée, à partir d'un point donné sur celle-ci.
12. Mener une ligne droite perpendiculaire à une droite indéfinie donnée à partir d'un point donné qui n'est pas sur celle-ci.
13. Si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produira deux angles soit droits, soit égaux à deux droits.
14. Si, relativement à une certaine droite, et en un point situé sur elle, deux droites non placées du même côté, font des angles adjacents égaux à deux droits, les droites seront en alignement l'une avec l'autre.
15. Si deux droites se coupent l'une l'autre, elles font des angles au sommet égaux entre eux.
16. Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.
17. Dans tout triangle, deux angles, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus petits que deux droits.
18. Dans tout triangle, le côté le plus grand sous-tend l'angle le plus grand.
19. Dans tout triangle, le plus grand angle est sous-tendu par le plus grand côté.
20. Dans tout triangle, deux côtés, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus grands que le côté restant.
21. Si, sur un des côtés d'un triangle, à partir de ses extrémités, deux droites sont construites à l'intérieur, d'une part les droites construites seront plus petites que les deux côtés restants du triangle, d'autre part, elles contiendront un angle plus grand.

22. Construire un triangle avec trois droites égales à trois droites données. Il faut alors que deux de ces droites, prises ensemble de quelque façon que ce soit, soient plus grandes que la droite restante parce que dans tout triangle, deux côtés, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus grands que le côté restant.
23. Sur une droite donnée, et en un point sur elle, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.
24. Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si l'angle de l'un - celui qui est contenu par les droites égales - est plus grand que l'angle de l'autre, sa base sera aussi plus grande que la base de l'autre.
25. Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si la base de l'un est plus grande que la base de l'autre, l'angle de l'un sera aussi plus grand que l'angle de l'autre, celui qui est contenu par les droites égales.
26. Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, soit celui des angles égaux, soit celui sous-tendant l'un des angles égaux, ils auront aussi les côtés restants égaux aux côtés restants, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.
27. Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles alternes égaux entre eux, ces droites seront parallèles l'une à l'autre.
28. Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre.
29. Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits.
30. Les parallèles à une même droite sont aussi parallèles l'une à l'autre.
31. Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.
32. Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.
33. Les droites, qui joignent, du même côté, des droites égales et parallèles, sont elles aussi égales et parallèles.
34. Les côtés et les angles opposés des aires parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties égales.
35. Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.
36. Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

37. Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.
38. Les triangles qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux.
39. Les triangles égaux qui sont sur la même base et du même côté, sont aussi dans les mêmes parallèles.
40. Les triangles égaux, qui sont sur des bases égales et du même côté, sont aussi dans les mêmes parallèles.
41. Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle et est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle.
42. Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné.
43. Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux.
44. Sur une droite donnée et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.
45. Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.
46. Décrire un carré sur une droite donnée.
47. Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.
48. Si, dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restant du triangle, l'angle contenu par les deux côtés restants du triangle est droit.

9 Appendice : Applications, composition d'applications, bijectivité et inversibilité.

Définition

1. Soient X et Y deux ensembles, une **application** f de X dans Y est une relation $R \subset X \times Y$ telle que pour tout x dans X , il existe un **unique** y_x dans Y avec $(x, y_x) \in R$. On appelle souvent $y_x = f(x)$ et on note l'application

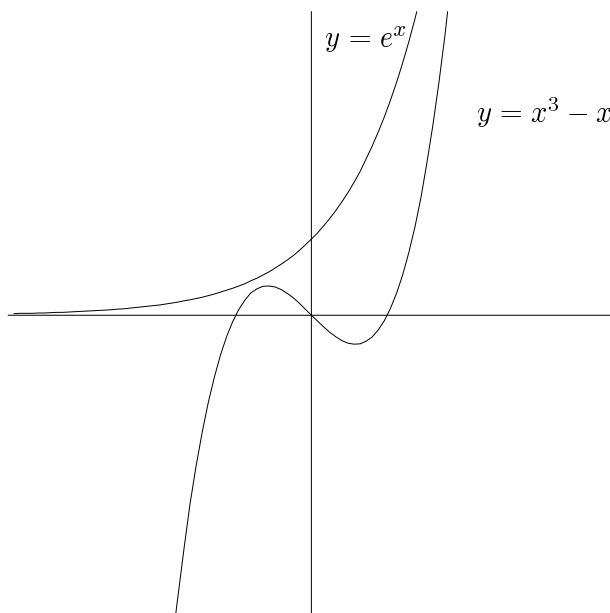
$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow Y \\ x &\mapsto y_x = f(x). \end{aligned}$$

2. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications, on définit la **composition de f et g** comme l'application $g \circ f : X \rightarrow Z$ définie par $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
3. Une application f de X dans Y est **injective** si deux points distincts de X ont des images distinctes par f (i.e. si $x_1 \neq x_2$ alors $f(x_1) \neq f(x_2)$).
4. Une application f de X dans Y est **surjective** sur Y si pour tout y dans Y , il existe x dans X tel que $f(x) = y$.
5. Une application f de domaine X dans Y est **bijective** sur Y si elle est injective et surjective sur Y .
6. Une application f de X dans Y est **inversible**, s'il existe une application $g : Y \rightarrow X$ telle que

$$f \circ g(y) = y, \forall y \in Y \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = x, \forall x \in X.$$

On appelle g l'inverse de f et on la note f^{-1} .

Exemples



La fonction $x^3 - x$ est surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , mais non injective car 1, -1 et 0 ont tous la même image. La fonction e^x de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est injective, mais non surjective, car -1 n'est pas l'image d'un nombre réel par l'exponentielle.

Proposition Une application $f : X \rightarrow Y$ est inversible si et seulement si elle est bijective.

Preuve

“ \Leftarrow ” Supposons f bijective. Définissons $g : Y \rightarrow X$ de la manière suivante. Comme f est surjective, pour tout y dans Y , il existe x_y dans X avec $f(x_y) = y$, posons $g(y) = x_y$. g est bien une application de Y dans X , car par injectivité de f , il n’y a qu’un seul x_y dans X avec $f(x_y) = y$. On a aussi :

$$f \circ g(y) = f(x_y) = y \text{ par définition de } x_y,$$

$$g \circ f(x) = g(y) = x \text{ car } f \text{ est injective.}$$

f est bien inversible.

“ \Rightarrow ” Supposons f inversible. f est injective car si $f(x_1) = f(x_2)$ on a

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2.$$

f est surjective, car $f^{-1}(y)$ est dans X et $f(f^{-1}(y)) = y$.

Définition

Soit $f : X \rightarrow X$, une application de X dans lui-même. Soit A un sous-ensemble de X . On dit que

1. A est invariant par f si $f(A)$ est contenue dans A .
2. A est fixe par f si $f(a) = a$, pour tout a dans A .

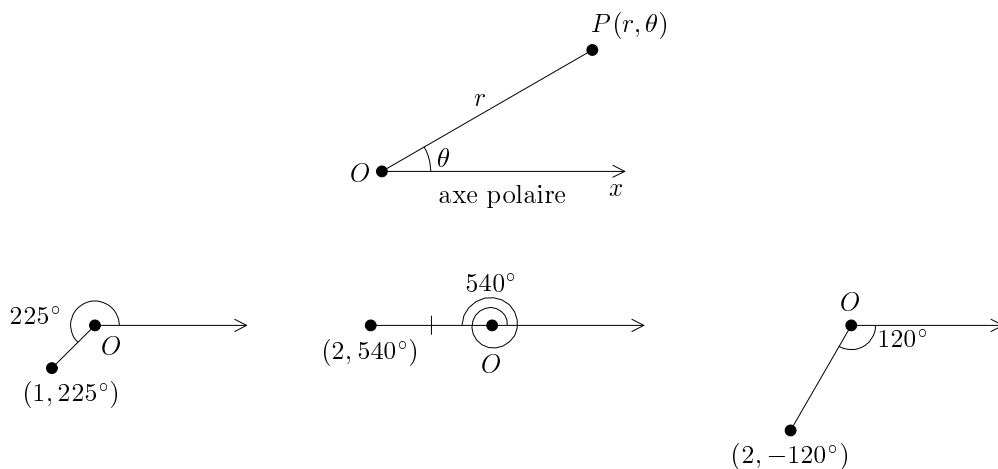
Remarque Si un ensemble A est fixe par une application f , alors il est aussi invariant, mais la réciproque n’est pas vraie. en effet soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$. Le sous-ensemble $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ est invariant, mais pas fixe, alors que le sous-ensemble $B = \{0, 1\}$ est fixe par f .

10 Appendice : les coordonnées polaires

Un système de coordonnées permet de représenter un point du plan par une paire ordonnée de nombres réels, que l’on appelle des coordonnées. Jusqu’à présent, on a utilisé des coordonnées cartésiennes ; dans cet appendice, on décrit un système de coordonnées introduit par Newton qui est plus utile dans certains cas.

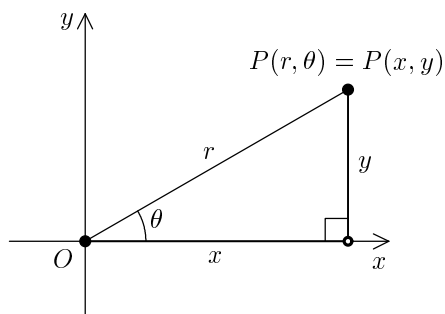
On choisit un point O du plan, que l’on appelle le **pôle** (ou l’origine), et on dessine une demi-droite dans le plan commençant à O , que l’on appelle **l’axe polaire**. Cette axe est d’habitude dessiné horizontalement à droite du pôle et correspond donc à l’axe positif des x dans le système de coordonnées cartésiennes.

Soit P un autre point du plan. Soit r la distance de O à P et soit θ l’angle entre l’axe polaire et le segment OP (avec la convention que l’on mesure les angles à partir de l’axe polaire dans le sens inverse des aiguilles d’un montre). On peut alors représenter le point P par la paire ordonnée (r, θ) . On appelle r et θ les **coordonnées polaires** de P . Si $P = O$, alors $r = 0$ et la paire $(0, \theta)$ représente le pôle pour tout angle θ .



Exemple 10.0.11. Les points de coordonnées $(1, 225^\circ)$, $(2, 540^\circ)$ et $(2, -120^\circ)$ sont dessinés ci-dessous.

Le lien entre les coordonnées polaires et cartésiennes se voit dans la figure ci-dessous, où le pôle correspond à l'origine et l'axe polaire correspond à l'axe positif des x . Si le point P a



les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées polaires (r, θ) , alors, par définition des fonctions trigonométriques, on a

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta.$$

Ces équations nous permettent de trouver les coordonnées cartésiennes d'un point du plan à partir des coordonnées polaires ; pour trouver les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes, on applique les équations suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

(Si $x = 0$, la pente du segment OP est infinie et θ est donc soit 90° soit -90° .)