Topologie générale

David Cimasoni

automne 2017

Table des matières

Introduction : qu'est-ce que la topologie ?

Tout ce cours sera consacré à la branche des mathématiques que l'on appelle la *topologie*, et il est naturel de commencer par se poser cette question : *qu'est-ce que la topologie ?* Pour y répondre, il n'est pas inutile dans un premier temps de se poser la question plus générale : *qu'est-ce que les mathématiques ?* Bien entendu, nous ne prétendons pas ici donner une réponse exhaustive à cette question très profonde, mais simplement orienter notre réflexion avant de revenir à notre question de départ. Voici donc un élément de réponse.

> En mathématiques, on étudie les propriétés abstraites d'"objets" sans se soucier de leur provenance. Cela donne une théorie, qui est utile si de nombreux objets ont ces propriétés, et si cette théorie aide à mieux comprendre ces objets, et à formaliser et étudier certains concepts.

Comme première illustration de cette réponse, considérons les objets suivants.

1. La température en Suisse.
2. Le prix du baril de brut.
3. Votre pression sanguine.
4. L'énergie cinétique d'un corps en fonction de sa vitesse.

Ces objets ont des provenances diverses (météorologie, économie, médecine, physique), mais chacun d'eux peut être décrit par une *fonction (différentiable) à valeurs réelles*. Tant d'objets de la vie courante peuvent être formalisés par ce concept mathématique qu'il est utile d'étudier les fonctions différentiables en tant que telles, sans plus se soucier de leurs diverses incarnations : c'est le sujet d'une partie du cours d'Analyse I.

Comme seconde illustration, considérons les objets suivants.

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers.
2. L'ensemble S_n des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non-nuls.
4. L'ensemble $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients réels.
5. L'ensemble des symétries d'un polyèdre.

Ces ensembles (ou objets) proviennent de contextes mathématiques variés (algèbre, analyse, géométrie), mais ils partagent les propriétés suivantes : tout ensemble de cette famille admet une loi de composition associative, avec un élément neutre, et telle que tout élément a un inverse. Tant d'objets ont ces propriétés que cela vaut la peine de les étudier de manière abstraite : c'est la *théorie des groupes*, dont vous avez vus les bases en ALGÈBRE I et en GÉOMÉTRIE I. Cette théorie permet, entre autres, de formaliser et d'étudier les notions de symétrie et d'action.

Comme dernière illustration, considérons les objets suivants.

1. La droite réelle $\mathbb{R}$.
2. Le plan $\mathbb{R}^2$.
3. L'espace $\mathbb{R}^3$.
4. L'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes.

Tous ces ensembles ont une structure commune : ce sont des *espaces vectoriels réels*. La théorie correspondante est ce qu'on appelle *l'algèbre linéaire*, dont vous avez vu les bases en ALGÈBRE I, et qui permet de formaliser les notions d'indépendance linéaire, de dimension, etc...

Supposons à présent que l'on souhaite formaliser les notions de convergence, de limite, de voisinage, dans un ensemble X, ainsi que la notion de continuité d'une application $f: X \to Y$. De quelle structure a-t-on besoin sur X ?

Comme vous l'avez vu en ANALYSE I, ces notions peuvent être définies sur $X = \mathbb{R}^n$ au moyen de la métrique euclidienne sur cet ensemble, i.e. la distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$ pour $x, y \in \mathbb{R}^n$. Par exemple, on dit qu'une suite (x_n) converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Similairement, une application $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue en $x \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x,y) < \delta$, alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ces définitions font uniquement appel à la métrique d sur $X = \mathbb{R}^n$. Ainsi, sitôt qu'un ensemble X est muni d'une métrique d (comme vous l'avez vu en GÉOMÉTRIE I, on parle alors d'*espace métrique*), il est possible de définir les concepts de convergence et de continuité dans X.

Mais a-t-on véritablement besoin d'une métrique sur un ensemble pour cela, ou existe-t-il une structure plus fondamentale qui permette de définir ces concepts ? La réponse est la suivante : *tous ces concepts peuvent être définis à l'aide de la seule notion de "sous-ensemble ouvert".* Dans le cas d'un espace métrique X, on dit qu'un sous-ensemble $U \subset X$ est *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ centrée en x de rayon ε est inclue dans U. On vérifie alors facilement (comme on le verra en section I.3) qu'une suite (x_n) converge vers $x \in X$ si et seulement si pour tout ouvert $U \subset X$ contenant x, il existe N tel que x_n est élément de U pour tout $n \geq N$. De même, une application $f: X \to Y$ est continue en tout $x \in X$ si et seulement si pour tout ouvert $U \subset Y$, $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert. Ainsi, les notions de convergence et de continuité peuvent être définies à partir de la notion d'ouvert.

Notons que la famille $\mathscr{T}$ de tous les sous-ensembles ouverts d'un espace métrique X satisfait les propriétés suivantes.

(i) L'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble X sont des éléments de $\mathscr{T}$.

(ii) L'union d'une famille quelconque d'éléments de $\mathscr{T}$ est dans $\mathscr{T}$.

(iii) L'intersection de deux éléments de $\mathscr{T}$ est dans $\mathscr{T}$.

Dans l'esprit de formalisation décrit plus haut comme une des caractéristiques de l'activité mathématique, on peut maintenant prendre ces trois propriétés comme axiomes de la théorie. En conclusion :

Sitôt qu'un ensemble X est muni d'une famille $\mathscr{T}$ de sous-ensembles qui satisfont les trois propriétés ci-dessus, il est possible de parler de convergence d'une suite dans X et de continuité d'une application définie sur X.

Comme on le verra, cela permet aussi de définir les notions de fermé, de voisinage, d'intérieur, d'adhérence, de connexité, de compacité, et bien d'autres encore. Une telle structure $\mathscr{T}$ sur X est appelée une *topologie*, X est alors un *espace topologique*, et l'étude axiomatique des espaces topologiques est appelée la *topologie générale*. C'est ce qui va nous occuper pendant ce cours.

C'est une théorie splendide, mais assez aride dans un premier temps. La motivation première de son introduction dans un cours de deuxième année est qu'elle permet de mieux comprendre et de généraliser considérablement certains résultats classique vus en ANALYSE I, tels les théorèmes des valeurs intermédiaires et des bornes atteintes. Cette théorie est également d'une grande importance pour la compréhension des cours TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE, GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE et ANALYSE FONCTIONNELLE. De nombreux cours avancés donnés régulièrement dans notre département, tels THÉORIE DES NOEUDS, THÉORIE DE L'HOMOLOGIE, TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE et SURFACES DE RIEMANN, sont également impossibles à suivre sans une bonne compréhension de la topologie générale.

Mais pourquoi considère-t-on habituellement la topologie comme faisant partie de la géométrie ? Rappelons que d'après FÉLIX KLEIN, une géométrie n'est rien d'autre que l'étude des propriétés invariantes par l'action d'un groupe G sur un ensemble X. Une classe importante de géométries est donnée par les espaces métriques X, avec $G = Isom(X)$ le groupe des isométries de X. Par exemple, si X est le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne, on obtient la *géométrie euclidienne* (plane) ; si X est le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ muni de la métrique hyperbolique, alors on obtient la *géométrie hyperbolique* ; et le choix de la sphère $\mathbb{S}^2$ munie de la distance sphérique mène à la *géométrie sphérique*. Les notions invariantes correspondantes sont celles de distance, de droite, d'angle, de cercles, etc...

En topologie, on étudie les propriétés d'un espace topologique X invariantes par l'action du groupe $G = Homeo(X)$ des applications $f: X \to X$ continues, bijectives, et d'inverse continue. Ce groupe est immense : dans le cas d'un espace métrique, il est bien plus grand que celui des isométries de X. Du coup, la quantité de notions invariantes par l'action de ce groupe est bien moindre. Par exemple, la notion de cercle n'est pas une notion topologique : un élément de $Homeo(\mathbb{R}^2)$ ne préserve pas les cercles en général. Ainsi, on peut comprendre la topologie comme une sorte de "géométrie molle", où l'on s'intéresse aux *propriétés qualitatives* d'un espace topologique, invariantes par déformations continues, comme par exemple la connexité, la compacité, etc...

Voici une dernière remarque, qui bien qu'évidente, mérite d'être énoncée : *la topologie générale s'écrit et se communique dans le language de la théorie des ensembles, et se construit à l'aide des principes de base de la logique élémentaire.* Pour cette raison, nous terminerons cette introduction avec un conseil, qui se veut ferme mais bienveillant :

> Pour étudier la topologie générale, il est absolument impératif de maîtriser parfaitement les principes de base de la théorie des ensembles et de la logique élémentaire.

A contrario, étudier la topologie générale sans maitriser la théorie des ensembles et la logique s'apparente à étudier le violon sans savoir lire une partition, ou à étudier Shakespeare dans le texte sans parler l'anglais : c'est une activité absurde et vouée à l'échec.

Chapitre I: Espaces topologiques et applications continues

Le but de ce premier chapitre est de donner les bases de la théorie. On y traitera successivement, dans six sections distinctes, des espaces topologiques (les objets de la théorie), des applications continues (les flèches, ou morphismes, de la théorie), des espaces métriques (une classe importante d'exemples), des bases et sous-bases (une façon très pratique de se donner un espace topologique), de diverses opérations sur les espaces topologiques, et de la notion de convergence d'une suite.

I.1 Espaces topologiques

Soit X un ensemble.

Définition. Une **topologie** sur X est une famille $\mathscr{T}$ de sous-ensembles de X telle que :

(i) L'ensemble vide $\varnothing$ et X sont éléments de $\mathscr{T}$;

(ii) Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est un ensemble d'éléments de $\mathscr{T}$, alors l'union $\bigcup_{i\in I} U_i$ est aussi élément de $\mathscr{T}$;

(iii) Si U_1 et U_2 sont des éléments de $\mathscr{T}$, alors leur intersection $U_1 \cap U_2$ est aussi élément de $\mathscr{T}$.

Un ensemble X muni d'une topologie $\mathscr{T}$ est appelé un **espace topologique**, et les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelés les **ouverts de X**.

Formellement, un espace topologique est donc la donnée d'une paire $(X, \mathscr{T})$ avec X un ensemble et $\mathscr{T}$ une topologie sur X. La plupart du temps, on s'autorisera un léger abus de notation en notant simplement l'espace topologique par X.

Tentons d'illustrer cette définition abstraite par une première série d'exemples.

Exemples d'espaces topologiques.

1. Sur X un ensemble quelconque, la famille $\mathscr{T}_{\text{disc}} = \mathscr{P}(X) = \{U \subset X\}$ des parties de X est clairement une topologie, appelée la **topologie discrète** sur X. Relativement à cette topologie, tous les sous-ensembles de X sont ouverts. On dit que $(X, \mathscr{T}_{\text{disc}})$ est un **espace discret**.

2. Sur X un ensemble quelconque, $\mathscr{T}_{\text{triv}} = \{\varnothing, X\}$ est une topologie, appelée la **topologie grossière** ou **topologie triviale** sur X.
3. Sur X un ensemble quelconque, on vérifie facilement que la famille
$$\mathscr{T}_f = \{U \subset X \mid X \smallsetminus U \text{ est fini}\} \cup \{\varnothing\}$$
est une topologie, appelée la **topologie cofinie** sur X.
4. Considérons l'ensemble $X = \mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne $d(x,y) = \|x-y\|$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, notons $B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ la boule centrée en x de rayon ε. Finalement, posons
$$\mathscr{T}_{\text{std}} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \text{pour tout } x \in U, \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } B(x,\varepsilon) \subset U\}.$$
C'est un exercice élémentaire de vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie ; elle est appelée la **topologie standard**, ou **usuelle**, ou **naturelle** sur $\mathbb{R}^n$. On y reviendra plus longuement en section I.3.

Remarque. La condition (iii) est équivalente à la condition (iii′) suivante : si $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des éléments de $\mathscr{T}$, alors leur intersection $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est aussi élément de $\mathscr{T}$. (La preuve se fait par induction sur n.) Mais attention : il s'agit de l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{T}$! En général, l'intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas un ouvert. Par exemple, dans $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie standard, l'intervalle $U_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$ est un sous-ensemble ouverts de $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$, mais l'intersection $\bigcap_{i=1}^\infty U_i = \{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Soient $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X fixé ; on dit que $\mathscr{T}_2$ est **plus fine** que $\mathscr{T}_1$, et que $\mathscr{T}_1$ est **moins fine** que $\mathscr{T}_2$, si $\mathscr{T}_1$ est inclue dans $\mathscr{T}_2$ (en d'autres termes, si $\mathscr{T}_2$ a plus d'ouverts que $\mathscr{T}_1$). Cette relation, notée $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$, est une relation d'ordre sur les topologies sur X. Voici quelques exemples.

Exemples de comparaison de topologies.

1. Sur un ensemble X quelconque, on a $\mathscr{T}_{\text{triv}} \subset \mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\text{disc}}$ pour toute topologie $\mathscr{T}$ sur X ; en d'autres termes, la topologie trivial (resp. discrète) est le plus petit (resp. le plus grand) élément de l'ensemble ordonné des topologies sur X.
2. Sur $X = \mathbb{R}^n$, on a $\mathscr{T}_{\text{triv}} \subset \mathscr{T}_f \subset \mathscr{T}_{\text{std}} \subset \mathscr{T}_{\text{disc}}$. La seule inclusion non-triviale est la seconde, qui se vérifie en montrant que $\mathbb{R}^n$ privé d'un nombre fini de points est un ouvert pour la topologie standard.
3. Sur l'ensemble à deux éléments $X = \{1,2\}$, il existe exactement 4 topologies : la triviale, la discrète, ainsi que $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{1\}, X\}$ et $\mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{2\}, X\}$. Notons que ces deux dernières topologies ne sont pas comparables, ce qui montre que cet ordre n'est pas total. [1]

1. Un exercice classique à ce stade, mais particulièrement rébarbatif, est d'énumérer le nombre de topologies sur $\{1,2,3\}$. La réponse est : 29. Pour ceux que cette question purement combinatoire intéresse, les premières valeurs de la suite t_n du nombre de topologies sur l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ sont données par $t_1 = 1$, $t_2 = 4$, $t_3 = 29$, $t_4 = 355$, $t_5 = 6942$, $t_6 = 209527$, $t_7 = 9535241$, $t_8 = 642779354$, $t_9 = 63260289423$, et $t_{10} = 8977053873043$.

4. Si $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sont deux topologies sur un ensemble X quelconque, alors leur intersection $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une topologie sur X, moins fine que $\mathscr{T}_1$ et que $\mathscr{T}_2$.

Comme on va le voir à présent, cette seule notion d'ouvert permet de définir immédiatement une foule de notions associées. Pour avoir une certaine intuition de ces nombreuses définitions, il est recommandé de garder en tête l'exemple du plan $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie standard, qui suffit à justifier la terminologie associée.

Soit donc $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique.

- Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit **fermé dans X** si $X \setminus F$ est un ouvert de X.
- Un sous-ensemble $N \subset X$ est un **voisinage de $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$** s'il existe $U \in \mathscr{T}$ tel que $x \in U \subset N$.

Soit à présent A un sous-ensemble quelconque de X.

- L'**intérieur de A dans X** est le sous-ensemble $A^\circ \subset X$ défini par

$$A^\circ = \{x \in X \,|\, A \text{ est un voisinage de } x \in X\}.$$

- L'**adhérence de A dans X** est le sous-ensemble $\overline{A} \subset X$ défini par

$$\overline{A} = \{x \in X \,|\, X \setminus A \text{ n'est pas un voisinage de } x \in X\}.$$

- On dit que A est **dense dans X** si $\overline{A} = X$.
- Finalement, la **frontière de $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$** est définie par $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Avant de passer aux exemples, un certain nombre de remarques s'imposent.

Remarques.

1. Par les axiomes d'une topologie, $\varnothing$ et X sont fermés, l'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée, et l'union de deux fermés est fermée. Cela fournit une définition axiomatique d'un espace topologique à partir des sous-ensembles fermés. [2]
2. En déroulant la définition, on obtient facilement que pour tout $A \subset X$, A° est l'union de tous les ouverts de X contenus dans A :

$$A^\circ = \bigcup_{U \text{ ouvert}, U \subset A} U.$$

Par conséquent, A° *est le plus grand ouvert de X inclu dans A*. En particulier, A° est un ouvert, il est inclu dans A, et A est ouvert dans X si et seulement si $A^\circ = A$. Ainsi, A est ouvert si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses éléments.

2. Il est également possible de donner une définition axiomatique d'un espace topologique uniquement à partir de la notion de voisinage, et de manière plus étonnante, à partir de la notion d'adhérence.

3. De même, pour tout $A \subset X$, $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de X contenant A :
$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, F \supset A} F\,.$$
Par conséquent, $\overline{A}$ *est le plus petit fermé de* X *contenant* A. En particulier, $\overline{A}$ est un fermé, il contient A, et A est fermé dans X si et seulement si $\overline{A} = A$.
4. Pour tout $A \subset X$, on a les égalités $(X \smallsetminus A)^\circ = X \smallsetminus \overline{A}$ et $\overline{X \smallsetminus A} = X \smallsetminus A^\circ$.
5. Pour tout $A \subset X$, le point 4 ci-dessus implique
$$\partial A = \overline{A} \smallsetminus A^\circ = \overline{A} \cap (X \smallsetminus A^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A}\,.$$
En particulier, les points 1 et 3 ci-dessus montrent que la frontière de $A \subset X$ est toujours fermée dans X.

Donnons maintenant quelques exemples.

Exemples d'intérieur et d'adhérence.

1. Dans un espace topologique discret X, tout sous-ensemble $A \subset X$ est ouvert et fermé. Ainsi, pour tout $A \subset X$, on a $A^\circ = A = \overline{A}$ et $\partial A = \varnothing$.
2. Dans un espace topologique X muni de la topologie grossière, les seuls ouverts et les seuls fermés sont $\varnothing$ et X. Par les remarques 2 et 3 ci-dessus, on a donc $A^\circ = X$ si $A = X$ et $A^\circ = \varnothing$ sinon, tandis que $\overline{A} = \varnothing$ si $A = \varnothing$ et $\overline{A} = X$ sinon (tout sous-ensemble non-vide est dense dans X). Ainsi, $\partial A = \varnothing$ si $A = \varnothing, X$ et $\partial A = X$ sinon.
3. Voici un exemple plus naturel : considérons la droite réelle $X = \mathbb{R}$ munie de la topologie standard, et l'intervalle semi-ouvert $A = [0,1) \subset \mathbb{R} = X$. Clairement, A est voisinage de tout point $x \in (0,1)$, mais pas du point 0 ; ainsi, l'intérieur de A est $A^\circ = (0,1)$. Pour la même raison, $X \smallsetminus A = (-\infty,0) \cup [1,\infty)$ est d'intérieur $(X \smallsetminus A)^\circ = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, d'où, en utilisant la remarque 4 ci-dessus :
$$\overline{A} = X \smallsetminus (X \smallsetminus \overline{A}) = X \smallsetminus (X \smallsetminus A)^\circ = [0,1]\,.$$
Par conséquent, la frontière de A est égale à $\partial A = \{0,1\}$.
4. Plus généralement, soit $X = \mathbb{R}^n$ muni de la topologie standard, et prenons comme sous-ensemble A de X la boule centrée en $x \in \mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$:
$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x,y) < r\}\,.$$
On démontrera bientôt les faits suivants : $B(x,r)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et donc égal à son intérieur, tandis que l'adhérence de $B(x,r)$ n'est autre que $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(x,y) \le r\}$, la boule fermée centrée en x de rayon r. Ainsi, la frontière de $B(x,r)$ est égale à $\partial B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(x,y) = r\}$, la sphère (de dimension $n-1$) centrée en x de rayon r.

5. Soit $A = \mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels dans $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie standard. Nous allons maintenant traduire certains résultats vus en Analyse I en les énoncés suivants : $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Q}$ est néanmoins dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

   Pour démontrer le premier point, considérons un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ non-vide. L'ensemble U contient donc un élément x et par définition de la topologie standard, il existe $\varepsilon > 0$ tel que U contient la boule $B(x, \varepsilon)$ qui n'est autre que l'intervalle ouvert $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Par dénombrabilité (voir Analyse I), *tout intervalle ouvert non-vide contient un irrationnel*, et ainsi U n'est pas inclu dans $\mathbb{Q}$. En conclusion, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathbb{Q}$, alors U est vide. Comme $\mathbb{Q}^\circ$ est l'union de tous ces ouverts (par la Remarque 2 ci-dessus), on a donc $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$.

   Pour démontrer le second point, notons que l'égalité $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ à vérifier est équivalente à $\varnothing = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ$: il s'agit donc de démontrer que l'ensemble des irrationnels est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de suivre la preuve du premier point ci-dessus en utilisant le fait suivant vu en Analyse I : *tout intervalle ouvert non-vide contient un rationnel*.

I.2 Applications continues

Maintenant que nous avons défini les objets de la théorie, les espaces topologiques, il s'agit d'en introduire les morphismes : les applications continues.

Définition. Soient X, Y deux espaces topologiques. Une application $f \colon X \to Y$ est dite **continue** si pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Remarques.

1. Pour tout espace topologique X, l'application identité $id_X \colon X \to X$ est trivialement continue. De plus, si $f \colon X \to Y$ et $g \colon Y \to Z$ sont deux applications continues (avec X, Y, Z des espaces topologiques), alors leur composition $g \circ f \colon X \to Z$ est aussi une application continue. [3]
2. La continuité d'une application $f \colon X \to Y$ dépend bien évidemment des topologies sur X et sur Y.

Proposition I.1. *Étant donnée une application $f \colon X \to Y$ entre deux espaces topologiques, les trois énoncés suivants sont équivalents.*

(i) L'application f est continue.

(ii) Pour tout fermé $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ est fermé dans X.

(iii) Pour tout $x \in X$, on a la propriété suivante : pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X.

Si une application $f \colon X \to Y$ satisfait la propriété (iii) pour un $x \in X$ donné, on dit que f est **continue en x**. Ainsi, l'équivalence des points (i) et (iii) dit que f est continue si et seulement si f est continue en x pour tout $x \in X$.

3. Cette remarque montre que les espaces topologiques et les applications continues forment ce que l'on appelle une *catégorie*.

Démonstration. L'équivalence des deux premiers points est laissée en exercices ; nous allons vérifier l'équivalence des points (i) et (iii). Supposons donc $f: X \to Y$ continue et fixons un élément $x \in X$ ainsi qu'un voisinage V de $f(x)$ dans Y. Par définition d'un voisinage, il existe un ouvert U de Y avec $f(x) \in U \subset V$. Il suit que $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$, avec $f^{-1}(U)$ ouvert de X puisque U est un ouvert de Y et f est continue. Ainsi, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X, et donc, f est continue en x. Vérifions finalement que le troisième point implique le premier. Soit donc $f: X \to Y$ continue en tout $x \in X$, et fixons un ouvert $U \subset Y$. Comme U est ouvert, il est voisinage de chacun de ses éléments ; en particulier, pour tout $x \in X$ avec $f(x) \in U$, U est un voisinage de $f(x)$. Comme f est continue en x, on a que pour tout $x \in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$ est voisinage de x. Ainsi, $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses éléments, et donc un ouvert. Cela démontre que f est continue. □

Exemples d'applications continues.

1. Toute application constante est continue. En effet, si $f: X \to Y$ est constante, il existe $y_0 \in Y$ tel que $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$. Par conséquent, pour tout sous-ensemble $U \subset Y$, on a $f^{-1}(U) = X$ si $y_0 \in U$ et $f^{-1}(U) = \varnothing$ sinon. Dans les deux cas, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X, et f est donc continue. (Notez que cet argument est valide quelles que soient les topologies sur X et Y.)
2. Soient $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ deux topologies sur un même ensemble X. Alors, l'application identité $id_X: (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ est continue si et seulement si $\mathscr{T}_1$ est plus fine que $\mathscr{T}_2$.
3. Si X est un espace discret, alors toute application $f: X \to Y$ est continue.
4. Si Y est munie de la topologie grossière, alors toute application $f: X \to Y$ est continue.
5. Soient $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}^n$, munis de la topologie standard. On verra en section I.3 que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue en $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x, y) < \delta$, alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ainsi, cette définition de continuité est bien une généralisation de celle vue en ANALYSE I.

Nous pouvons à présent introduire un concept fondamental de la théorie, celui d'*homéomorphisme*. Les homéomorphismes jouent en topologie le rôle que jouent les isomorphismes de groupes en théorie des groupes, les isomorphismes linéaires en algèbre linéaire, les applications bijectives en théorie des ensembles, etc... [4] La définition est très naturelle.

Définition. Une application $f: X \to Y$ entre deux espaces topologiques est un **homéomorphisme** si f est continue, bijective, et $f^{-1}: Y \to X$ est continue. S'il existe une telle application, les espaces X et Y sont dit **homéomorphes**, noté $X \cong Y$.

4. Ce sont les isomorphismes de la catégorie.

Remarques.

1. La relation *être homéomorphe* est une relation d'équivalence sur la classe des espaces topologiques. On aura tendance à identifier deux espaces topologiques homéomorphes, dans le même sens qu'on a tendance à identifier deux groupes isomorphes ou deux ensembles en bijection.
2. On vérifie facilement qu'une application $f\colon (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est un homéomorphisme si et seulement si f est bijective et f définit une bijection entre $\mathscr{T}_X$ et $\mathscr{T}_Y$.
3. L'ensemble $Homeo(X)$ des homéomorphismes $f\colon X \to X$ forme un groupe pour la composition, qui agit sur X. Comme cela a été mentionné en introduction, on peut voir la topologie comme l'étude des propriétés invariantes par cette action.
4. On pourrait penser que toute application continue bijective est un homéomorphisme : c'est faux. Par exemple, pour tout ensemble X, l'application $f = id_X\colon (X, \mathscr{T}_{\text{disc}}) \to (X, \mathscr{T}_{\text{triv}})$ est continue et bijective, mais l'application inverse $f^{-1} = id_X\colon (X, \mathscr{T}_{\text{triv}}) \to (X, \mathscr{T}_{\text{disc}})$ n'est pas continue si X compte plus d'un élément. (Un exemple plus géométrique suivra sous peu.)

Le moment est bien choisi pour faire un petit détour. Soient $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique, et $Y \subset X$ un sous-ensemble quelconque. On vérifie facilement que l'ensemble $\mathscr{T}_Y$ de sous-ensembles de Y défini par

$$U \in \mathscr{T}_Y \Leftrightarrow \text{ il existe } V \in \mathscr{T}_X \text{ tel que } U = Y \cap V$$

est une topologie. On parle de la **topologie induite** sur Y par la topologie $\mathscr{T}_X$ donnée sur X, et l'on dit que Y est un **sous-espace (topologique)** de X. Ainsi, tout sous-ensemble d'un espace topologique est automatiquement lui-même un espace topologique.

Exemples de topologie induite.

Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie standard, et considérons les sous-espaces $Y_1 = [0, \infty)$, $Y_2 = (-\infty, 1)$ et $Y_3 = [0, 1)$ munis de la topologie induite. Nous allons voir que suivant dans lequel de ces espaces topologiques on le considère, le sous-ensemble $A = [0, 1)$ peut être ouvert ou non, et fermé ou non.

- Le sous-ensemble $A = [0, 1)$ n'est pas ouvert dans $X = \mathbb{R}$, puisque A n'est pas voisinage de $0 \in A$; et A n'est pas non plus fermé dans $X = \mathbb{R}$, puisque son complémentaire $X \smallsetminus A = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ n'est pas voisinage de $1 \in X \smallsetminus A$.
- D'autre part $A = [0, 1)$ est ouvert dans $Y_1 = [0, \infty)$, puisque $[0, 1) = (-1, 1) \cap Y_1$ avec $(-1, 1)$ ouvert dans $\mathbb{R}$; mais A n'est pas fermé dans Y_1, puisque son complémentaire $Y_1 \smallsetminus A = [1, \infty)$ n'est pas de la forme $V \cap Y_1$ avec V ouvert de $\mathbb{R}$.
- Pour les mêmes raisons, A est fermé mais pas ouvert dans $Y_2 = (-\infty, 1)$.
- Finalement, A est ouvert et fermé dans $Y_3 = [0, 1)$, par définition d'une topologie.

Cela nous mène à la remarque suivante, d'une importance primordiale :

La notion d'ouvert est une *notion relative*. L'énoncé "A est ouvert" n'a pas de sens ; il faut toujours préciser dans quel espace topologique on se place, et dire "A est ouvert dans X".

Il en va de même pour toutes les notions dérivées de celle d'ouvert, comme les notions de fermé, de voisinage, d'intérieur, d'adhérence, de densité, et de frontière.

La proposition suivante illustre de plusieurs façons comment cette notion de topologie induite est naturelle relativement à la notion de continuité.

Proposition I.2. *Soient X, Y and Z des espaces topologiques.*

(i) Si A est un sous-espace de X, alors l'inclusion $j\colon A \to X$ est continue.

(ii) Si $f\colon X \to Y$ est continue et A est un sous-espace de X, alors la restriction $f|_A\colon A \to Y$ de f à A est continue.

(iii) Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Si Z est un sous-espace de Y qui contient l'image de f, alors la fonction $g\colon X \to Z$ obtenue à partir de f en restreignant l'espace d'arrivée est continue. D'autre part, dans le cas où Z a Y comme sous-espace, alors la fonction $h\colon X \to Z$ obtenue à partir de f en étendant l'espace d'arrivée est aussi continue.

(iv) Soit $f\colon X \to Y$ avec $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, les sous-ensembles $U_i \subset X$ ouverts pour tout $i \in I$, et $f|_{U_i}$ continue pour tout $i \in I$. Alors, f est continue.

Démonstration. Si $U \subset X$ est un ouvert, alors $j^{-1}(U) = A \cap U$ est un ouvert de A par la définition de topologie induite ; cela démontre le premier point. Le second en découle, puique la restriction de f à A n'est autre que la composition $f|_A = f \circ j$ de deux applications continues, et donc elle-même continue.

Pour démontrer le troisième point, supposons d'abord que $f\colon X \to Y$ est continue avec $f(X) \subset Z \subset Y$, et tâchons de montrer que $g\colon X \to Z$ est continue. Soit donc $U \subset Z$ ouvert, i.e. de la forme $U = Z \cap V$ avec $V \subset Y$ ouvert. En utilisant ces hypothèses, on obtient

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(Z \cap V) = g^{-1}(Z) \cap g^{-1}(V) = X \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(V)\,,$$

qui est ouvert dans X par continuité de f. Ainsi, g est bien continue. Si l'on suppose maintenant que Z contient Y comme sous-espace, alors la fonction $h\colon X \to Z$ n'est autre que la composition de $f\colon X \to Y$, continue par hypothèse, et de l'inclusion du sous-espace Y dans Z, continue par le premier point. Ainsi, h est continue.

Pour démontrer le dernier point, considérons $V \subset Y$ ouvert, et vérifions que $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X. En utilisant l'égalité $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, on obtient

$$f^{-1}(V) = X \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap f^{-1}(V)) = \bigcup_{i\in I}(f|_{U_i})^{-1}(V)\,.$$

Comme chaque restriction $f|_{U_i}\colon U_i \to Y$ est continue, $(f|_{U_i})^{-1}(V)$ est ouvert dans U_i. Par définition de la topologie induite, cela signifie qu'il existe V_i ouvert dans X avec $(f|_{U_i})^{-1}(V) = U_i \cap V_i$. Comme U_i et V_i sont des ouverts de X, leur intersection est aussi un ouvert de X. Par l'équation ci-dessus, $f^{-1}(V)$ est aussi un ouvert de X, et f est donc bien continue. □

Remarques.

1. Comme le troisième point de la proposition I.1, le quatrième point de la proposition ci-dessus peut-être compris comme une formulation locale de la continuité.
2. L'énoncé de ce dernier point est aussi valide si l'on remplace "ouvert" par "fermé", mais uniquement si l'ensemble I est fini !

Ce petit détour par la *topologie induite* était important pour la théorie générale, mais il nous permet aussi de donner des exemples non-triviaux d'homéomorphismes. Dans tous ces exemples, on considère les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ munis de la topologie standard, et l'on utilise le fait (non-encore démontré) que la notion de continuité sur ces espaces est bien celle étudiée en Analyse I.

Exemples d'homéomorphismes.

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $f(x)=4x+3$. C'est une application bijective, d'inverse $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $g(y)=(y-3)/4$. Comme vous l'avez vu en Analyse I, de telles fonctions sont continues, et f est donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il en va bien-sûr de même pour toute application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ affine, i.e. de la forme $f(x)=ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ et $b\in\mathbb{R}$.
2. Soit $Y=(-1,1)$ muni de la topologie induite par celle sur $X=\mathbb{R}$, et soit $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ l'application donnée par $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$. Cette application est bijective d'inverse $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ donnée par $g(y)=\frac{y}{1-|y|}$; ces deux applications sont continues, et f est donc un homéomorphisme. Ainsi, la droite réelle $\mathbb{R}$ et l'intervalle ouvert $(-1,1)$ sont homéomorphes. En se basant sur cette construction, on montre facilement que tous les intervalles ouverts non-vides de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.
3. On vérifie que le carré et le disque, vus comme sous-espaces du plan $\mathbb{R}^2$, sont homéomorphes.
4. Considérons finalement les sous-espaces $X=[0,1)$ de la droite et $Y=S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid\|z\|=1\}$ du plan, et l'application $f:[0,1)\to S^1$ donnée par l'exponentielle $f(t)=e^{2\pi it}$. (Géométriquement, f enroule l'intervalle $[0,1)$ autour du cercle.) Cette application est la restriction de l'application $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ décrite en coordonnées réelles par $\tilde{f}(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$; par les résultats d'Analyse I, $\tilde{f}$ est continue et par les points (ii) et (iii) de la proposition I.2, f est aussi continue. D'autre part, f est clairement bijective. Néanmoins, f n'est pas un homémorphisme, car l'application inverse $g=f^{-1}:S^1\to[0,1)$ n'est pas continue. En effet, $U=[0,1/4)$ est un voisinage de $g(1)=f^{-1}(1)=0$ dans $[0,1)$, mais $g^{-1}(U)=f(U)$ n'est pas un voisinage de $1\in S^1$. Par la proposition I.1, g n'est pas continue (en $1\in S^1$). Intuitivement, g "casse" le cercle pour l'envoyer sur l'intervalle, et cette opération n'est pas continue.

   Cela donne donc un nouvel exemple, plus géométrique, du fait qu'une application continue bijective n'est pas forcément un homéomorphisme.

I.3 Espaces métriques

Comme promis, nous allons maintenant étudier une classe fondamentale d'espaces topologiques, les espaces métriques, dont nous rappelons ici la définition.

Définition. Soit X un ensemble. Une application $d: X \times X \to [0, \infty)$ est appelée une **distance** (ou une **métrique**) sur X si elle satisfait les trois propriétés suivantes pour tous x, y, z dans X :

(i) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un ensemble X muni d'une distance est appelé un **espace métrique**.

Remarques et terminologie.

1. Formellement, un espace métrique est donc la donnée d'une paire (X, d), mais on le note souvent X lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.
2. Si Y est un sous-ensemble de X, une métrique d sur X définit automatiquement une métrique sur Y : on parle de la **métrique induite**.
3. Étant donnés un élément x d'un espace métrique (X, d) et un nombre réel $r > 0$, on appelle la **boule (ouverte) de rayon** r **centrée en** x l'ensemble
$$B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$
Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on dénotera simplement cette boule par $B(x, r)$.

Les trois axiomes d'une métrique formalisent les propriétés évidentes de la distance euclidienne dans le plan ou l'espace. Il est important de se rendre compte que cette définition recouvre néanmoins des objets extrêmements variés, qui apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques. En voici quelques premiers exemples ; nous en verrons d'autres plus tard.

Exemples d'espaces métriques.

1. L'ensemble $X = \mathbb{R}$ admet la métrique d donnée par $d(x, y) = |x - y|$. Les boules correspondantes sont les intervalles : $B(x, r) = (x - r, x + r)$.
2. Plus généralement, l'ensemble $X = \mathbb{R}^n$ admet la famille continue de métriques que voici. Fixons un réel $p \geq 1$, et définissons $d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ par
$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p},$$
pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit bien d'une métrique : si les deux premières propriétés sont – comme c'est souvent le cas – évidentes, la preuve de la troisième repose sur *l'inégalité de Minkowski* que vous avez vue en ANALYSE I.

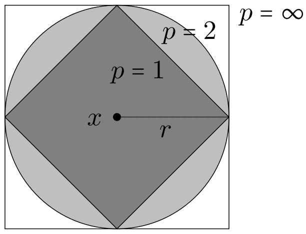


FIGURE I.1 – Les boules $B_{d_p}(x,r)$ pour $p = 1$, $p = 2$, et $p = \infty$.

Observez que le cas $p = 1$ correspond à ce qu'on appelle la *métrique new-yorkaise* (pour des raisons évidentes à quiconque s'est déjà déplacé à Manhattan), tandis que le cas $p = 2$ n'est autre que la *métrique euclidienne* ou *métrique standard*. À la limite, lorsque $p = \infty$, on obtient la distance

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n}\{|x_i - y_i|\}\,.$$

Notons enfin que toutes ces métriques coïncident (avec celle de l'exemple 1 ci-dessus) lorsque $n = 1$.

Les boules correspondantes sont illustrées en figure I.1 dans le cas de dimension $n = 2$.

3. On peut munir un ensemble non-vide X quelconque de la **métrique discrète** définie par

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La boule correspondante $B(x,r)$ est réduite à $\{x\}$ si $r \le 1$, et couvre X tout entier si $r > 1$.

La raison pour laquelle les espaces métriques sont abordés dans un cours de topologie générale a déjà été évoquée en introduction : une métrique d sur un ensemble X induit une topologie $\mathscr{T}_d$ sur X via

$$U \in \mathscr{T}_d \Leftrightarrow \text{ pour tout } x \in U, \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } B_d(x,\varepsilon) \subset U\,.$$

Le fait que $\mathscr{T}_d$ est une topologie se démontre exactement comme l'exemple 4 de la section I.1. Cette topologie est appelée la **topologie induite par la métrique** d.

Remarques.

1. Vérifions pour commencer que les boules ouvertes portent bien leur nom, c'est-à-dire qu'elles sont des éléments de la topologie $\mathscr{T}_d$. Fixons donc $x \in X$ et $r > 0$; pour montrer que la boule $B(x,r)$ est ouverte, il s'agit de trouver pour tout $y \in B(x,r)$ un $\varepsilon > 0$ avec $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$. Posons $\varepsilon = r - d(x,y)$, qui est positif puisque y est un élément de $B(x,r)$. Par l'inégalité du triangle, tout $z \in B(y,\varepsilon)$ satisfait

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon = r\,,$$

et est donc élément de $B(x,r)$. Cela démontre l'inclusion voulue. On voit donc que le fait que les boules sont des ouverts est une conséquence de l'inégalité du triangle.

2. Puisque les boules sont ouvertes, on vérifie immédiatement le fait suivant : un sous-ensemble $V \subset X$ est un voisinage de $x \in X$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V$.

Exemples de topologies induites par une métrique.

1. Par définition, la métrique $d(x,y) = |x - y|$ induit la topologie standard sur $X = \mathbb{R}$. Les ouverts sont les unions d'intervalles ouverts.
2. Plus généralement, et toujours par définition, la métrique euclidienne d_2 induit la topologie standard sur $X = \mathbb{R}^n$.

   On peut se poser la question de savoir quelles sont les topologies sur $\mathbb{R}^n$ induites par les métriques d_p pour d'autres valeurs de $p \in [1,\infty]$. On y reviendra.
3. Sur X un ensemble quelconque, la métrique discrète induit la topologie discrète. En effet, pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ coïncide avec la boule $B(x,1)$. Il suit que $U = \{x\}$ est ouvert, et par la seconde propriété d'une topologie, que tout sous-ensemble de X est ouvert.

On dit que deux métriques d et d' sur un même ensemble X sont **équivalentes** s'il existe deux constantes positives c, c' telles que

$$c\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq c'\, d(x,y)$$

pour tous $x, y \in X$. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Proposition I.3. *Deux métriques équivalentes induisent la même topologie.*

Démonstration. Soient donc d et d' deux métriques équivalentes sur un ensemble X. Par définition, on obtient les inclusions suivantes entre les boules correspondantes, inclusions valides pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$:

$$B_{d'}(x, cr) \subset B_d(x,r) \subset B_{d'}(x, c'r)\,.$$

Vérifions à présent que $\mathscr{T}_{d'}$ est plus fine que $\mathscr{T}_d$. Soit U un élément quelconque de $\mathscr{T}_d$. Cela signifie que tout $x \in U$ admet un $r > 0$ tel que $B_d(x,r) \subset U$. Par la première inclusion ci-dessus, on obtient $B_{d'}(x,cr) \subset B_d(x,r) \subset U$. Ainsi, $x \in U$ admet le réel positif $r' = cr$ tel que $B_{d'}(x,r') \subset U$, et U est donc élément de $\mathscr{T}_{d'}$. Cela démontre l'inclusion $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_{d'}$. De la même manière, la seconde inclusion ci-dessus permet de montrer que $\mathscr{T}_d$ est plus fine que $\mathscr{T}_{d'}$. Ces deux topologies sont donc égales. □

Voyons quelques exemples.

Exemples de métriques équivalentes.

1. Sur $X = \mathbb{R}^n$, et pour tout $p \in [1, \infty)$, on montre facilement les inégalités

$$d_\infty(x,y) \leq d_p(x,y) \leq n^{1/p}\, d_\infty(x,y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, les métriques d_p sont toutes équivalentes entre elles. Par la proposition ci-dessus, elles induisent donc la même topologie que d_2, i.e. la topologie standard.

2. Sur la droite réelle $X = \mathbb{R}$, la métrique standard et la métrique discrète ne sont évidemment *pas* équivalentes. Cela peut se démontrer directement, ou en utilisant la contraposée de la proposition ci-dessus : comme les topologies induites sont distinctes, les métriques ne sont pas équivalentes.

Remarques.

1. Attention, il n'y a pas de réciproque à la proposition ci-dessus : des métriques non-équivalentes peuvent induire la même topologie. Par exemple, considérons un espace métrique quelconque (X, d), et soit $\overline{d}\colon X \times X \to [0, 1)$ définie par

$$\overline{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

pour $x, y \in X$. On démontre que $\overline{d}$ est bien une métrique, qui induit la même topologie que d. En revanche, ces métriques ne sont en général par équivalentes. En effet, si tel était le cas, on aurait une constante $c > 0$ telle que

$$d(x,y) \leq c\,\overline{d}(x,y) < c \text{ pour tous } x, y \in X\,,$$

puisque $\overline{d}(x,y) < 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. En d'autres termes, (X, d) serait alors un espace métrique *borné*, ce qui n'est évidemment pas toujours le cas. L'exemple le plus naturel est la droite réelle $X = \mathbb{R}$ munie de la métrique standard $d(x,y) = |x - y|$. Nous venons donc de démontrer que la formule $\overline{d}(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ définit une métrique sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas équivalente à la métrique standard, mais qui induit néanmoins la même topologie (standard).

2. En présence d'un espace métrique, il est important de bien distinguer les notions de nature métrique (i.e. dépendant de la métrique choisie) des notions de nature topologique (i.e. ne dépendant que de la topologie induite). Par exemple, comme on l'a vu ci-dessus, un espace métrique (X, d) est dit **borné** s'il existe une constante $c > 0$ telle que $d(x,y) < c$ pour tous $x, y \in X$. Il s'agit d'une notion métrique : en reprenant les notations de l'exemple ci-dessus, l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas borné, tandis que $(\mathbb{R}, \overline{d})$ est borné, alors même que $\mathscr{T}_d$ et $\mathscr{T}_{\overline{d}}$ coïncident. En revanche, les notions d'ouvert, de fermé, de voisinage, d'intérieur, d'adhérence, de continuité, sont des notions topologiques. Nous en verrons d'autres.

Il est temps de démontrer le résultat annoncé plusieurs fois déjà : dans le cas d'un espace métrique, la notion de continuité vue dans ce cours coïncide avec celle vue en ANALYSE I.

Proposition I.4. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques. Une application* $f: X \to Y$ *est continue en* $x \in X$ *(respectivement aux topologies* $\mathscr{T}_{d_X}$ *et* $\mathscr{T}_{d_Y}$*) si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x' \in X$ *avec* $d_X(x, x') < \delta$*, on a* $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$*.*

Démonstration. Soient donc $f: X \to Y$, et $x \in X$ fixé. Par définition, f est continue en $x \in X$ si et seulement si pour tout voisinage $V \subset Y$ de $f(x)$, $f^{-1}(V) \subset X$ est un voisinage de x. Comme on l'a vu, la notion de voisinage dans un espace métrique peut être formulé en termes de boules, ce qui donne l'énoncé suivant : pour tout $V \subset Y$ tel que $B_{d_Y}(f(x), \varepsilon) \subset V$ pour un certain $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(V)$. *Le cas particulier* $V = B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ *donne* : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \varepsilon))$. Ce dernier énoncé est équivalent à l'énoncé souhaité : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x' \in X$ avec $d_X(x, x') < \delta$, on a $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Cela démontre une direction.

Pour vérifier l'autre direction, notons que dans la chaîne d'implications ci-dessus, il n'y a que des équivalences à une exception près : celle marquée en italiques. Supposons donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \varepsilon))$, et fixons $V \subset Y$ tel que $B_{d_Y}(f(x), \varepsilon) \subset V$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $B_{d_X}(x, \delta)$ est inclu dans $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \varepsilon))$, qui est lui-même inclu dans $f^{-1}(V)$. Cela montre l'autre direction et conclut la preuve. □

Les propositions I.1 et I.4 donnent immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire I.5. *Une application* $f: X \to Y$ *entre deux espaces métriques est continue si et seulement si pour tout* $x \in X$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $x' \in X$ *satisfait* $d_X(x, x') < \delta$*, alors on a* $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$*.* □

Terminons ce chapitre sur les espaces métriques par une rapide discussion de la notion de *métrisabilité*.

Définition. Un espace topologique $(X, \mathscr{T})$ est dit **métrisable** s'il existe une métrique d sur X telle que $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$.

Comme vous le verrez (dans ce cours et dans plusieurs autres), beaucoup d'espaces topologiques importants en mathématiques sont métrisables, mais certains ne le sont pas. La métrisabilité est une propriété souhaitable, puisque l'existence d'une métrique fournit un outil puissant pour démontrer des résultats sur l'espace en question. Si on avait eu le temps, on aurait vu au chapitre III un théorème qui donne des conditions suffisantes sur un espace topologique pour qu'il soit métrisable. Dans le cadre du présent chapitre, on se limitera à quelques exemples élémentaires.

Exemples d'espaces métrisables.

1. Un espace discret est toujours métrisable, puisque la métrique discrète induit la topologie discrète.
2. L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie standard est métrisable, puisque la métrique euclidienne d_2 induit la topologie standard (de même que toutes les métriques d_p pour $p \in [1, \infty]$, comme on l'a vu).
3. Nous allons maintenant vérifier qu'un ensemble quelconque X muni de la topologie triviale est métrisable si et seulement s'il compte au plus un élément.

   Si $\#X \leq 1$, alors la topologie triviale sur X coïncide avec la topologie discrète sur X, qui est métrisable par le premier exemple ci-dessus. Soit à présent X avec au moins 2 éléments (disons $x \neq y$), et supposons par l'absurde qu'il existe une métrique d sur X telle que la métrique induite $\mathscr{T}_d$ soit égale à $\mathscr{T}_{\text{triv}} = \{\varnothing, X\}$. Comme x et y sont distincts, le premier axiome d'une métrique implique que $r := d(x, y)$ est non-nul ; ainsi, on peut considérer la boule $B(x, r)$ qui par définition contient x mais pas y, et qui n'est donc ni vide, ni égale à X. Comme on le sait, $B(x, r)$ est un élément de $\mathscr{T}_d$, qui n'est donc pas la topologie triviale.
4. On vérifie qu'un espace topologique fini est métrisable si et seulement s'il est discret.

I.4 Bases et sous-bases

La question que nous allons aborder dans ce nouveau chapitre est la suivante : *comment décrire une topologie sans avoir à en expliciter tous les ouverts ?* Une réponse possible et souvent pratique est d'utiliser les notions de *base* et de *sous-base*, qu'il s'agit maintenant de définir.

Définition. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique.

- Un sous-ensemble $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ est une **base** de la topologie $\mathscr{T}$ si tout élément de $\mathscr{T}$ est une union d'éléments de $\mathscr{B}$.
- Un sous-ensemble $S \subset \mathscr{T}$ est une **sous-base** de $\mathscr{T}$ si l'ensemble des intersections finies d'éléments de S forme une base de $\mathscr{T}$.[5]

Remarques et terminologie.

1. Trivialement, toute base est une sous-base.
2. Si $\mathscr{B}$ est une base pour une topologie, alors cette topologie est entièrement déterminée $\mathscr{B}$, puisque les éléments de $\mathscr{T}$ sont donnés par les unions d'éléments de $\mathscr{B}$. De même, une topologie est entièrement déterminée par une sous-base S, puisque ses éléments sont les unions (quelconques) d'intersections finies d'éléments de S. On parle habituellement de la **topologie engendrée par** $\mathscr{B}$ (ou par S), et on la note $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ (ou $\mathscr{T}_S$).

5. À la demande générale, nous n'utiliserons pas la notation $\mathscr{S}$ pour une base, notation gracieuse à souhait mais trop proche du majesteux $\mathscr{T}$.

Exemples de bases et de sous-bases.

1. Pour X un ensemble quelconque, l'ensemble $\mathscr{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ des singletons de X est une base pour la topologie discrète sur X.
2. Pour X un ensemble quelconque, l'ensemble $\mathscr{B} = \{X\}$ est une base pour la topologie triviale sur X.
3. Pour X un ensemble quelconque, l'ensemble $S = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ est une sous-base pour la topologie cofinie sur X.
4. Sur $X = \mathbb{R}^n$, l'ensemble des boules est une base pour la topologie standard. Plus généralement, sur (X, d) un espace métrique arbitraire, l'ensemble
$$\mathscr{B} = \{B(x,r) \mid x \in X,\ r > 0\}$$
de toutes les boules ouvertes est une base pour la topologie $\mathscr{T}_d$ sur X. En effet, si U est un élément de $\mathscr{T}_d$ cela signifie que pour tout $x \in U$, il existe $r(x) > 0$ avec $B(x, r(x)) \subset U$. Cela implique l'égalité
$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, r(x)),$$
qui montre que $\mathscr{B}$ est bien une base de $\mathscr{T}_d$.

Attention : étant donné un ensemble X, un ensemble $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ de parties de X n'est pas toujours une base d'une topologie ! Il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour que cela soit le cas ; nous allons les étudier maintenant.

Proposition I.6. *Soit X un ensemble. Un sous-ensemble $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ est une base d'une topologie sur X si et seulement si :*

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$, et

(2) pour tous $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ et tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B \in \mathscr{B}$ avec $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ est une base d'une topologie sur X, c'est-à-dire, que l'ensemble $\mathscr{T}$ des unions d'éléments de $\mathscr{B}$ est une topologie. Dans ce cas, on a en particulier que X est élément de $\mathscr{T}$, et donc union d'éléments de $\mathscr{B}$, ce qui implique le premier point. Pour voir le second, fixons $B_1, B_2 \in \mathscr{B} \subset \mathscr{T}$; puisque $\mathscr{T}$ est une topologie, on a $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{T}$, d'où le fait que $B_1 \cap B_2$ est union d'éléments de $\mathscr{B}$. Cela implique le second point.

Pour montrer la réciproque, fixons $B \subset \mathscr{P}(X)$ qui satisfait aux points (*1*) et (*2*) ; nous devons vérifier que le sous-ensemble $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ formé par les unions d'éléments de $\mathscr{B}$ satisfait les trois axiomes d'une topologie. Par convention, l'ensemble vide est égal à l'union vide, est appartient donc bien à $\mathscr{T}$, tandis que X est élément de $\mathscr{T}$ par le point (*1*). Le second axiome est immédiat, puisqu'une union d'unions d'éléments de $\mathscr{B}$ est une union d'éléments de $\mathscr{B}$. Soient finalement $U, U' \in \mathscr{T}$; il s'agit de vérifier que $U \cap U' \in \mathscr{T}$. Par définition, il existe des familles $\{B_i\}_i$ et $\{B'_j\}_j$ d'éléments de $\mathscr{B}$ tels que $U = \bigcup_i B_i$ et $U' = \bigcup_j B'_j$, d'où $U \cap U' = \bigcup_{i,j} B_i \cap B'_j$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que pour tous $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, l'intersection $B_1 \cap B_2$ est une union d'éléments de $\mathscr{B}$, ce qui découle du second point. En effet, pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B(x) \in \mathscr{B}$ avec $x \in B \subset B_1 \cap B_2$; cela implique l'égalité $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B(x)$, qu'il fallait démontrer. $\square$

Ce résultat implique l'énoncé suivant pour les sous-bases.

Corollaire I.7. *Un sous-ensemble $S \subset \mathscr{P}(X)$ est une sous-base d'une topologie sur X si et seulement si $X = \bigcup_{U \in S} U$.*

Démonstration. Si S est une sous-base d'une topologie $\mathscr{T}$, cela signifie que tout élément de $\mathscr{T}$ est union d'intersections finies d'éléments de S. C'est en particulier le cas de $X \in \mathscr{T}$, ce qui implique l'égalité $X = \bigcup_{U \in S} U$. Réciproquement, soit $S \subset \mathscr{P}(X)$ avec $X = \bigcup_{U \in S} U$, et soit $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ défini comme l'ensemble des intersections finies déléments de S. Par définition d'une sous-base, il s'agit de montrer que $\mathscr{B}$ est une base. Par la proposition I.6, il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ vérifie les conditions (*1*) et (*2*). La première découle de l'hypothèse via la chaîne d'inclusions

$$X = \bigcup_{U \in S} U \subset \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B \subset X\,.$$

Pour voir la seconde, notons que par définition de $\mathscr{B}$, l'intersection de deux éléments B_1, B_2 de $\mathscr{B}$ est à nouveau élément de $\mathscr{B}$. Ainsi, pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, on peut choisir $B = B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$. Cela termine la démonstration. □

Remarques.

1. Soit $S \subset \mathscr{P}(X)$ avec $X = \bigcup_{U \in S} U$. Alors, la topologie $\mathscr{T}_S$ engendrée par S est l'intersection de toutes les topologies sur X qui contiennent S. En d'autres termes, $\mathscr{T}_S$ est la topologie la moins fine qui contient S.
2. Les sous-bases peuvent également s'avérer utiles pour montrer qu'une application est continue. En effet, on vérifie facilement que $f\colon X \to Y$ est continue pour une topologie $\mathscr{T} = \mathscr{T}_S$ sur Y si et seulement si $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert pour tout $U \in S$.
3. De même, les bases sont utiles pour montrer qu'une application $f\colon X \to Y$ est *ouverte*, c'est-à-dire, que f envoie tout ouvert de X sur un ouvert de Y. En effet, c'est le cas si et seulement si $f(B) \subset Y$ est ouvert pour tout élément B d'une base $\mathscr{B}$ pour la topologie sur X.
4. Finalement, les bases sont utiles pour comparer les topologies : si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases sur un ensemble X, alors $\mathscr{T}_{\mathscr{B}'}$ est plus fine que $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $B \in \mathscr{B}$ qui contient x, il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.[6]

Terminons ce petit chapitre par la notion de *base de voisinage* dont l'importance apparaitra dans la suite du cours.

Définition. Soit X un espace topologique, et x un élément de X. Un ensemble $\mathscr{B}_x$ de voisinages de $x \in X$ est une **base de voisinages de $\mathbf{x \in X}$** si pour tout voisinage V de $x \in X$, il existe $B \in \mathscr{B}_x$ avec $B \subset V$.

Exemples de bases de voisinages.

1. Pour X un ensemble quelconque muni de la topologie discrète, et pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathscr{B}_x = \{\{x\}\}$ est une base de voisinages de $x \in X$.

6. Une certaine ressemblance avec la preuve de la proposition I.3 n'est pas du tout fortuite.

2. Pour X un ensemble quelconque muni de la topologie triviale, l'ensemble $\mathscr{B}_x = \{X\}$ est une base de voisinages de $x \in X$ pour tout $x \in X$.
3. Soit X un espace métrique, et soit $x \in X$ un élément. Alors, par définition de la topologie $\mathscr{T}_d$, l'ensemble

$$\mathscr{B}_x = \{B_d(x,r) \,|\, r > 0\}$$

des boules ouvertes centrées en $x \in X$ est une base de voisinages de $x \in X$.

I.5 Topologies produit et quotient

Il est temps de faire un tout petit résumé de ce qui a été vu jusqu'à présent : nous avons commencé par présenter les objets de la théorie en section I.1, puis les flèches en section I.2, une classe importante d'exemples en I.3, et comment se donner un objet de manière économe en I.4. À présent, nous allons voir deux manières de construire de nouveaux objets à partir d'anciens : le produit, et le quotient.

I.5.1 La topologie produit

Commençons par rappeler la définition du produit (cartésien) de deux ensembles. Cette définition sera ensuite généralisée à une famille quelconque d'ensembles, avant de revenir à des considérations topologiques.

Étant donnés deux ensembles X_1 et X_2, leur produit est l'ensemble

$$X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}\,.$$

De manière plus précise, on peut voir ce produit comme l'ensemble des applications $x\colon \{1,2\} \to X_1 \cup X_2$ avec $x(i) =: x_i \in X_i$ pour tout $i \in \{1,2\}$. Notons que pour tout $i \in \{1,2\}$, ce produit admet une projection naturelle $\pi_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ qui envoie l'élément x sur sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée x_i.

Plus généralement, le **produit** d'une famille d'ensembles $\{X_i\}_{i\in I}$ indexée par un ensemble I quelconque est l'ensemble

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid x(i) \in X_i \text{ pour tout } i \in I\}\,.$$

Pour tout $j \in I$, on a la projection naturelle $\pi_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ définie par $\pi_j(x) = x(j) =: x_j$, et l'on note habituellement un élément $x \in \prod_{i\in I} X_i$ par $x = (x_i)_{i\in I}$.

Exemples de produits d'ensembles.

1. Si l'ensemble d'indices est donné par $I = \{1\}$, alors il n'y a qu'un seul ensemble X_1 dans la famille et le produit correspondant est simplement donné par $\prod_{i\in I} X_i = X_1$.
2. Pour $I = \{1,2\}$, on rerouve exactement la définition du produit de deux ensembles rappelée plus haut : $\prod_{i\in I} X_i = X_1 \times X_2$.
3. Plus généralement, pour $I = \{1,\ldots,n\}$, le produit (fini) correspondant est habituellement noté $\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \cdots \times X_n$.

4. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ est un famille d'ensembles identiques, c'est-à-dire si $X_i = X$ pour tout $i \in I$, alors leur produit est simplement donné par l'ensemble des applications $\{x: I \to X\}$, habituellement noté X^I.

Maintenant que nous avons procédé aux nécessaires préliminaires de théorie des ensembles, nous pouvons revenir à la topologie. Supposons donc que chacun des ensembles X_i est muni d'une topologie. *Comment définir une topologie naturelle sur le produit* $\prod_{i\in I} X_i$ *?*

Voici une première réponse. Considérons le sous-ensemble $\mathscr{B}' \subset \mathscr{P}(\prod_{i\in I} X_i)$ défini par

$$\mathscr{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \subset \prod_{i\in I} X_i \;\middle|\; U_i \text{ ouvert de } X_i \text{ pour tout } i \in I \right\} .$$

Cette famille de sous-ensembles de $\prod_{i\in I} X_i$ satisfait les deux conditions de la proposition I.6 : la première est triviale puisque $\prod_{i\in I} X_i$ lui-même est élément de $\mathscr{B}'$, et la seconde découle de l'égalité ensembliste $(\prod_{i\in I} U_i) \cap (\prod_{i\in I} V_i) = \prod_{i\in I}(U_i \cap V_i)$ et du fait que l'intersection de deux ouverts est un ouvert.

Ainsi, la famille $\mathscr{B}'$ est une base d'une topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$, appelée la **topologie des boîtes**. Par définition, les ouverts de cette topologie sont les unions d'éléments de $\mathscr{B}'$.

Exemples de topologies des boîtes.

1. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ est une famille d'espaces discrets, alors on vérifie facilement que la topologie des boîtes sur $\prod_{i\in I} X_i$ est la topologie discrète.
2. Considérons le cas d'une famille dénombrable de droites réelles munies de la topologie standard, $X_i = \mathbb{R}$ pour tout $i \in I = \mathbb{N}$, ce qui donne l'ensemble produit $\prod_{i\in I} X_i = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Comme $U_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) \subset \mathbb{R}$ est ouvert pour tout $i \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble $U = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i = (-1,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour la topologie des boîtes. Mais cela implique directement que l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donnée par $f(t) = (t, t, \dots)$ n'est *pas* continue pour cette topologie, puisque

$$f^{-1}(U) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in U_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \{0\} \subset \mathbb{R}$$

n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

C'est une conséquence fâcheuse car cette application f est très naturelle : en certaines circonstances, la topologie des boîtes a trop d'ouverts ! Ce phénomène est une des raisons qui pousse à préférer une seconde topologie, que nous allons maintenant présenter. (Nous verrons d'autres raisons au chapitre suivant.)

Soit donc $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Considérons le sous-ensemble $S \subset \mathscr{P}(\prod_{i\in I} X_i)$ défini par

$$S = \left\{ \pi_j^{-1}(U_j) \subset \prod_{i\in I} X_i \;\middle|\; j \in I, U_j \text{ ouvert de } X_j \right\} ,$$

où $\pi_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ est la projection naturelle. Par définition, les éléments de S sont donc de la forme

$$\pi_j^{-1}(U_j) = U_j \times \prod_{i\in I\smallsetminus\{j\}} X_i$$

avec $j \in I$ et $U_j \subset X_j$ ouvert. Cette famille de sous-ensembles de $\prod_{i\in I} X_i$ satisfait clairement la condition du corollaire I.7 ; c'est donc une sous-base d'une topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$ appelée la **topologie produit**. La base correspondante est donnée par les intersections finies d'éléments de S :

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I\smallsetminus J} X_i \;\middle|\; J \subset I \text{ fini}, U_j \subset X_j \text{ ouvert pour tout } j \in J \right\}.$$

Par définition, les ouverts de la topologie produit sont donc les unions d'éléments de la base $\mathscr{B}$ ci-dessus.

Remarques.

1. Si l'ensemble I d'indices est fini, alors $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont égales ; dans ce cas, la topologie des boîtes et la topologie produit coïncident. Mais en général, la topologie produit est moins fine que la topologie des boîtes.
2. La sous-base S est exactement formée des sous-ensembles de $\prod_{i\in I} X_i$ qui doivent être ouverts pour que les projections π_j soient continues. Ainsi, par la remarque 1 de la section précédente, la topologie produit est la topologie la moins fine telle que toutes les projections soient continues.
3. Comme on le voit facilement, pour tout ensemble X et toute famille d'applications $\{f_i\colon X \to X_i\}_{i\in I}$, il existe une unique application $f\colon X \to \prod_{i\in I} X_i$ telle que $\pi_i \circ f = f_i$ pour tout $i \in I$. [7] En fait, si X est un espace topologique, alors l'application f est continue pour la topologie produit si et seulement si toutes les applications f_i sont continues. [8]

   En effet, si f est continue, alors $f_i = \pi_i \circ f$ est continue puisque la projection π_i est continue pour tout $i \in I$. Réciproquement, si l'on suppose que chaque f_i est continue, alors pour un élément quelconque $U = \pi_i^{-1}(U_i)$ de S, alors
   $$f^{-1}(U) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1} = f_i^{-1}(U_i) \subset X$$
   est un ouvert de X puisque $U_i \subset X_i$ est ouvert et f_i continue. Par la remarque 2 de la section précédente, cela suffit à montrer que f est continue pour la topologie produit $\mathscr{T}_S$.

Exemples de topologies produits.

1. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ est une famille d'espaces discrets, alors la topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$ n'est en général *pas* la topologie discrète.

---

7. C'est la définition du produit dans la catégorie des ensembles.
8. Ainsi, la topologie produit correspond bien au produit dans la catégorie des espaces topologiques. C'est une autre raison de la préférer à la topologie des boîtes.

2. Considérons à nouveau l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donnée par $f(t) = (t, t, \dots)$, et utilisons la remarque 3 ci-dessus. Chaque application $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $f_i(t) = t$; elle est donc continue, ce qui implique que l'application f elle-même est continue pour la topologie produit. Ainsi, le problème soulevé ci-dessus pour la topologie des boîtes n'en est plus un pour la topologie produit.
3. Considérons enfin le cas d'une famille finie de droites réelles munies de la topologie standard, $X_i = \mathbb{R}$ pour tout $i \in I = \{1, \dots, n\}$. Alors, l'ensemble produit correspondant n'est autre que $\mathbb{R}^n$, sur lequel les topologies des boîtes et produit coïncident. Cette topologie est simplement donnée par $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ avec
$$\mathscr{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \subset \mathbb{R} \text{ ouvert pour tout } i = 1, \dots, n\}\,.$$
En fait, cette topologie n'est autre que la topologie standard sur $\mathbb{R}^n$.
Pour le voir, nous allons comparer la base $\mathscr{B}$ ci-dessus avec la base $\mathscr{B}'$ formée par les boules pour la distance d_∞, qui rappelons-le induit la topologie standard sur $\mathbb{R}^n$. Notons que ces boules sont de la forme suivante, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$:
$$B_{d_\infty}(x, r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r)\,.$$
Ainsi, ce sont des éléments de $\mathscr{B}$, d'où les inclusions $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ et $\mathscr{T}_{\mathscr{B}'} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$. Par la remarque 4 de la section précédente, il suffit de montrer l'énoncé suivant pour avoir l'autre inclusion : pour tout $B \in \mathscr{B}$ et tout $x \in B$, il existe $B' \in \mathscr{B}'$ avec $x \in B' \subset B$. Cela se vérifie comme suit : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est élément de $B = U_1 \times \dots \times U_n \in B$, alors x_i appartient à l'ouvert $U_i \subset \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où $r_i > 0$ tel que $(x_i - r_i, x_i + r_i) \subset U_i$. Le choix $B' = B_{d_\infty}(x, r) \in \mathscr{B}'$ avec $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ satisfait $x \in B' \subset B$ et conclut la preuve.

I.5.2 La topologie quotient

Passons à présent à la seconde construction, en commençant à nouveau par de rapides rappels de théorie des ensembles.

Une *relation* sur un ensemble X est un sous-ensemble $\mathscr{R} \subset X \times X$. On note habituellement l'assertion $(x, x') \in \mathscr{R}$ par $x\mathscr{R}x'$. Comme vous le savez, une relation $\mathscr{R}$ sur un ensemble X est une *relation d'équivalence* si :

(i) $\mathscr{R}$ est *réflexive* : pour tout $x \in X$, $x\mathscr{R}x$.

(ii) $\mathscr{R}$ est *symétrique* : pour tous $x, x' \in X$, si $x\mathscr{R}x'$ alors $x'\mathscr{R}x$.

(iii) $\mathscr{R}$ est *transitive* : pour tous $x, x', x'' \in X$, si $x\mathscr{R}x'$ et $x'\mathscr{R}x''$, alors $x\mathscr{R}x''$.

Pour alléger la notation, une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ est souvent notée par le symbole $\sim$. Étant donné $x \in X$, on note habituellement $[x]$ le sous-ensemble de X défini par
$$[x] := \{x' \in X \mid x \sim x'\}\,,$$
appelé la *classe d'équivalence de x*. Notons que par réflexivité, x appartient à sa classe d'équivalence. De plus, par symétrie et transitivité, deux classes d'équivalence $[x]$ et $[x']$ sont soit identiques (si $x \sim x'$), soit disjointes (sinon). Ainsi, les

classes d'équivalence forment une partition de X, c'est-à-dire que X est l'union disjointe de ces classes. Finalement, on note $X/\sim$ l'ensemble de ces classes d'équivalence, appelé *ensemble quotient*, et

$$\pi: X \to X/\sim$$

la projection de $x \in X$ sur sa classe $[x]$.

Rappelons encore que si une application $f: X \to Y$ vérifie $f(x) = f(x')$ pour tout $x \sim x' \in X$, alors il existe une unique application $g: X/\sim \to Y$ telle que $f = g \circ \pi$: on dit que f *passe au quotient*. Cette application g a même image que f, et est injective si et seulement si $f(x) = f(x') \Rightarrow x \sim x'$. En particulier, toute application $f: X \to Y$ induit une bijection $g: X/\sim \to f(X)$, où la relation d'équivalence sur X est donnée par $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

Exemples de relations d'équivalence.

1. Considérons l'ensemble $X = \mathbb{R}^2$ muni de la relation d'équivalence suivante : $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Les classes d'équivalence correspondantes sont les cercles centrés en l'origine, ainsi que l'origine elle-même. La projection π envoie un élément $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sur le cercle de rayon $\|x\|$. Ainsi, l'application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|$ passe au quotient et induit une bijection $g: \mathbb{R}^2/\sim \to [0, \infty)$.
2. Tout sous-ensemble $A \subset X$ d'un ensemble X induit une relation d'équivalence sur X via $x \sim_A y \Leftrightarrow x = y$ ou $x, y \in A$. L'ensemble quotient $X/\sim_A$ est habituellement noté X/A. La projection $\pi: X \to X/A$ identifie tous les éléments de A en un seul point.

   Par exemple, considérons le cas de $A = \{0, 1\} \subset [0, 1] = X$. Pour mieux comprendre l'ensemble quotient, étudions l'application $f: [0, 1] \to S^1$ donnée par l'exponentielle $f(t) = e^{2\pi i t}$. (Comme nous l'avons déjà noté en section I.2, f enroule l'intervalle $[0, 1]$ autour du cercle.) Cette application est surjective, et $f(t) = f(t') \Leftrightarrow t \sim_A t'$. Ainsi, elle passe au quotient et induit une bijection $g: [0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$.

Supposons maintenant que X est un espace topologique. *Comment définir une topologie sur le quotient $X/\sim$?* Cette fois-ci, il y a une unique réponse naturelle, que voici : en posant

$$U \subset X/\sim \text{ est ouvert } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset X \text{ est ouvert},$$

on définit une topologie sur $X/\sim$ appelée la **topologie quotient**. L'espace topologique ainsi obtenu est appelé **l'espace quotient**.

Remarques.

1. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une topologie, la plus fine sur l'ensemble quotient telle que π soit continue.

2. Soient Y un espace topologique et $f: X \to Y$ une application qui passe au quotient, induisant $g: X/\sim \to Y$ telle que $f = g \circ \pi$. Alors, f est continue si et seulement si g est continue.

   En effet, si g est continue, alors $f = g \circ \pi$ l'est aussi puisque π est continue pour la topologie quotient. Réciproquement, si $U \subset Y$ est un ouvert, alors $\pi^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert puisque f est continue ; par définition de la topologie quotient, cela signifie que $g^{-1}(U) \subset X/\sim$ est ouvert, et donc que g est continue.

On a ainsi démontré l'énoncé suivant :

Toute application continue $f: X \to Y$ induit une bijection continue $g: X/\sim \to f(X)$, où la relation d'équivalence sur X est donnée par $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

C'est une sorte d'analogue topologique du *premier théorème d'isomorphisme* en théorie des groupes : tout homomorphisme de groupes $f: G \to G'$ induit un isomorphisme de groupes $g: G/Ker(f) \to f(G)$. Mais rappelons-le encore une fois, si en théorie des groupes, un homomorphisme bijectif est automatiquement un isomorphisme, ce n'est pas le cas en topologie : une application continue bijective n'est *pas* toujours un homéomorphisme !

Exemples d'espaces quotients.

1. Considérons à nouveau l'exemple du plan $X = \mathbb{R}^2$ muni de la relation d'équivalence $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. La topologie standard sur $\mathbb{R}^2$ définit donc une topologie sur l'ensemble quotient. Nous allons maintenant vérifier que cet espace quotient est homéomorphe à $[0, \infty)$ (muni de la topologie induite par la topologie standard sur $\mathbb{R}$).

   Comme on l'a vu, l'application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|$ induit une bijection $g: \mathbb{R}^2/\sim \to [0, \infty)$. Comme f est continue (Analyse I), g est une bijection continue, et il reste uniquement à vérifier que g^{-1} est continue, c'est-à-dire que g est ouverte ; ainsi, il faut montrer que si $U \subset \mathbb{R}^2/\sim$ est tel que $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, alors $g(U) = f(\pi^{-1}(U)) \subset [0, \infty)$ est ouvert. En conclusion, il nous suffit de vérifier que f est une application ouverte. Par la remarque 3 de la section précédente, il faut juste vérifier que f envoie toute boule euclidienne sur un ouvert de $[0, \infty)$. C'est clairement le cas, puisque $f(B(x, r)) = (\|x\| - r, \|x\| + r)$ si $\|x\| \geq r$ et $f(B(x, r)) = [0, \|x\| + r)$ si $\|x\| < r$, des ouverts de $[0, \infty)$.

2. Reprenons aussi l'exemple du sous-ensemble $A = \{0, 1\}$ de $X = [0, 1]$, muni de la topologie standard. Comme on l'a vu, l'application $f: [0, 1] \to S^1$ donnée par $f(t) = e^{2\pi i t}$ induit une bijection $g: [0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$; comme f est continue, il en va de même pour g qui est donc une bijection continue. Nous allons maintenant montrer que g est en fait un homéomorphisme, d'où $[0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$. Ainsi, *le cercle est obtenu en recollant les deux extrémités d'un intervalle.*

Exactement comme ci-dessus, il nous suffit de vérifier que g est une application ouverte. Soit donc $U \subset [0,1]/\{0,1\}$ tel que $\pi^{-1}(U) \subset [0,1]$ est ouvert ; il s'agit de montrer que $g(U) = f(\pi^{-1}(U)) \subset S^1$ est ouvert.[9] Fixons donc $z \in f(\pi^{-1}(U)) \subset S^1$, d'où $t \in \pi^{-1}(U) \subset [0,1]$ tel que $z = f(t) = e^{2\pi i t}$. Dans le cas $t \neq 0,1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset \pi^{-1}(U) \cap (0,1)$ puisque $\pi^{-1}(U)$ et $(0,1)$ sont ouverts dans $[0,1]$. On a alors $f((t-\varepsilon,t+\varepsilon)) = S^1 \cap \ell^{-1}((t-\varepsilon,t+\varepsilon))$, où $\ell = \frac{1}{2\pi}\log: \mathbb{C}\smallsetminus[0,\infty) \to (0,1)$ et $\log: \mathbb{C}\smallsetminus[0,\infty) \to (0,2\pi)$ est une détermination (continue) du logarithme. Ainsi, ℓ est continue et $f((t-\varepsilon,t+\varepsilon)) \subset S^1$ est ouvert. Comme on a les inclusions $z = f(t) \in f(t-\varepsilon,t+\varepsilon) \subset f(\pi^{-1}(U))$, cela montre que $f(\pi^{-1}(U))$ est bien un voisinage de z. Dans le cas $t = 0$ ou $t = 1$, $\pi^{-1}(U)$ contient nécessairement les deux points $\{0,1\}$, et comme c'est un ouvert de $[0,1]$, il contient $[0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon,1]$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Comme ci-dessus, on vérifie que $f([0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon,1])$ est un ouvert de S^1 (on peut utiliser une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \smallsetminus (-\infty,0]$), ce qui implique que $f(\pi^{-1}(U))$ est bien un voisinage de $z = 1 \in S^1$. Ainsi, $f(\pi^{-1}(U))$ est voisinage de chacun de ses points ; c'est donc un ouvert, ce qui termine la démonstration.

3. Plus généralement, si X est le disque unité $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ et A est son bord, c'est-à-dire la sphère unité $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, alors l'espace quotient $D^n/\partial D^n$ est homéomorphe à la sphère S^n. (Le cas $n = 1$ correspond à l'exemple ci-dessus.) On le montrera au chapitre 2.
4. Soit $X = [0,1] \times [0,1]$ muni de la relation d'équivalence suivante : $(x,y) \sim (x',y')$ si $(x,y) = (x',y')$, $x = x'$ et $\{y,y'\} = \{0,1\}$ ou $\{x,x'\} = \{0,1\}$ et $y = y'$. Cet espace n'est autre que le tore $S^1 \times S^1$. Ainsi, *le tore est obtenu en recollant deux à deux les bords opposés d'un carré*.

   Pour le voir, considérons l'application

$$f: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]/\{0,1\} \times [0,1]/\{0,1\}$$

   donnée par la projection $\pi: [0,1] \to [0,1]/\{0,1\}$ sur chaque coordonnée. On vérifie facilement que f induit une bijection $g: X/\sim \to [0,1]/\{0,1\} \times [0,1]/\{0,1\}$. Comme π est continue, f l'est aussi par définition de la topologie produit, et g aussi par définition de la topologie quotient. Il reste à montrer que g^{-1} est continue, ce qui est intuitivement clair et découlera facilement de résultats du chapitre 2. Ainsi, $X/\sim$ est homéomorphe à $[0,1]/\{0,1\} \times [0,1]/\{0,1\}$. Par l'exemple 2 ci-dessus, on a un homéomorphime $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$, d'où $[0,1]/\{0,1\} \times [0,1]/\{0,1\} \cong S^1 \times S^1$. Cela termine la preuve.

Comme on le voit sur les exemples ci-dessus, il est souvent facile de trouver une bijection continue de la forme $X/\sim \to Y$, mais il est plus difficile de montrer que cette application est un homémorphisme. Pour cette raison, il est très utile de trouver une classe d'espaces sur lesquels toute application continue bijective

9. Notons que f n'est *pas* ouverte, puisque $f([0,1/2))$ n'est pas un voisinage de $f(0) = 1 \in S^1$: on l'a vu en exemple 4 de la section I.2. On va vérifier qu'elle envoie néanmoins bien les ouverts de la forme $\pi^{-1}(U) \subset [0,1]$ sur des ouverts de S^1.

est un homéomorphisme. Une telle classe est donnée par les espaces *compacts* qui seront étudiés au chapitre 2.

I.6 Suites et limites

Rappelons qu'une *suite* dans un ensemble X est une application

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \to X, \quad n \mapsto x_n$$

habituellement notée (x_n). Comme mentionné en introduction, il suffit d'une topologie sur l'ensemble X pour définir la notion de suite convergente.

Définition. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique, et soit (x_n) une suite dans X. Un élément $x \in X$ est appelé **limite de $(\mathbf{x_n})$ dans $\mathbf{X}$** si

$$\text{pour tout } U \in \mathscr{T} \text{ contenant } x, \text{ il existe } N \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow x_n \in U\,.$$

Dans ce cas, on dit que la suite (x_n) **converge vers $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$**, noté $x_n \to x$.

Remarques.

1. Si $\mathscr{B}_x$ est une base de voisinages de $x \in X$, alors $x_n \to x$ si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{B}_x$, il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B$.
   En effet, commençons par supposer que x_n converge vers $x \in X$. Si B est un élément de la base de voisinages $\mathscr{B}_x$, alors B est un voisinage de $x \in X$, donc il existe $U \subset X$ ouvert avec $x \in U \subset B$. Par définition de la convergence, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in U \subset B$, ce qui démontre une implication. Réciproquement, soit $U \subset X$ un ouvert qui contient x ; c'est un voisinage de $x \in X$, donc par définition d'une base de voisinages, il existe $B \in \mathscr{B}_x$ avec $B \subset U$. Par hypothèse, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B \subset U$, ce qui montre l'autre implication.
2. Si S est une sous-base pour la topologie sur X, alors $x_n \to x \in X$ si et seulement si pour tout $U \in S$ contenant x, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in U$. La preuve est un exercice.

Donnons à présent quelques exemples de convergence dans divers espaces topologiques. D'autres exemples sont proposés en exercices.

Exemples de convergence.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Tentons de comprendre la convergence des suites dans l'espace topologique $(X, \mathscr{T}_d)$. Comme on l'a vu, l'ensemble $\mathscr{B}_x = \{B_d(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ des boules centrées en $x \in X$ forme une base de voisinages de $x \in X$. Ainsi, par la première remarque ci-dessus, une suite (x_n) converge vers $x \in X$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_d(x, \varepsilon)$. En d'autres termes,

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon\,.$$

   On retrouve donc bien la définition de convergence vue en Analyse I.

2. Soit X un espace discret. En appliquant la définition de convergence à l'ouvert $U = \{x\} \subset X$, on trouve qu'une suite (x_n) converge vers $x \in X$ (si et) seulement s'il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n = x$. Ainsi, les seules suites convergentes dans un espace discret sont les suites qui sont constantes à partir d'un certain indice. C'est ce qu'on appelle une *suite stationnaire*.
3. Soient X un espace topologique, I un ensemble, et $X^I = \{f : I \to X\}$ l'espace produit correspondant muni de la topologie produit. Tentons de comprendre quand une suite (f_n) converge vers une limite f dans X^I.
   Par définition, la topologie produit est engendrée par la sous-base
   $$S = \{\pi_i^{-1}(U) \mid i \in I,\ U \subset X \text{ ouvert}\}.$$
   Par la seconde remarque ci-dessus, on a donc que $f_n \to f \in X^I$ si et seulement si pour tout $i \in I$ et tout $U \subset X$ ouvert avec $f \in \pi_i^{-1}(U)$, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow f_n \in \pi_i^{-1}(U)$. Par définition, on a
   $$\pi_i^{-1}(U) = \{g : I \to X \mid g(i) \in U\}.$$
   Ainsi, $f_n \to f \in X^I$ si et seulement si pour tout $i \in I$ et tout $U \subset X$ ouvert avec $f(i) \in U$, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow f_n(i) \in U$. Cela signifie que $f_n(i)$ converge vers $f(i)$ dans X pour tout $i \in I$.
   En conclusion, la convergence dans l'espace produit X^I n'est autre que la *convergence simple* (ou *convergence ponctuelle*) : une suite (f_n) d'applications converge vers f dans X^I si et seulement si pour tout $i \in I$, la suite $(f_n(i))$ converge vers $f(i)$ dans X.
4. Considérons un ensemble X muni de la *topologie codénombrable*
   $$\mathscr{T}_c = \{U \subset X \mid X \smallsetminus U \text{ est dénombrable ou égal à } X\}.$$
   Nous allons vérifier que là encore, comme dans un espace discret, les seules suites convergentes sont les suites stationnaires.
   Soit donc (x_n) une suite qui converge vers $x \in X$, et $U := (X \smallsetminus \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cup \{x\}$. Par définition de $\mathscr{T}_c$, U est un ouvert de X qui contient x. Ainsi, il existe un entier N tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Par construction de U, cela implique que $x_n = x$ pour tout $n \geq N$.
5. Soit X un ensemble muni de la topologie triviale. Une suite (x_n) converge vers $x \in X$ si et seulement s'il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in X$. Ainsi, toutes les suites convergent vers tous les points !

Ce dernier exemple, bien que totalement trivial, révèle un phénomène intéressant : dans un espace topologique quelconque, une suite peut converger vers plusieurs limites ! Mais il existe une classe naturelle d'espaces dans lesquels ce phénomène n'arrive jamais : les espaces *séparés*.

Définition. Un espace topologique X est dit **séparé** (ou **Hausdorff**, ou $\mathbf{T_2}$) si pour tout $x \neq y \in X$, il existe des ouverts $U, V \subset X$ disjoints avec $x \in U$ et $y \in V$.

Notons que la propriété “être séparé” est une propriété topologique : si X et Y sont deux espaces homéomorphes, alors X est séparé si et seulement si Y est séparé. Dans un tel espace, il y a bel et bien *unicité de la limite*.

Proposition I.8. *Soit (x_n) est une suite dans un espace séparé X. Si (x_n) converge vers $x \in X$ et (x_n) converge vers $y \in X$, alors $x = y$.*

Démonstration. Soit donc (x_n) une suite dans X séparé avec $x_n \to x$, et soit $y \in X$ avec $y \neq x$; il s'agit de vérifier que (x_n) ne converge pas vers y. Comme x et y sont deux éléments distincts d'un espace séparé, il existe des ouverts $U, V \subset X$ disjoints avec $x \in U$ et $y \in V$. Comme (x_n) converge vers $x \in X$ et U est un ouvert de X qui contient x, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in U$. Comme U et V sont disjoints, cela signifie que pour tout $n \geq N$, on a $x_n \notin V$. Puisque V est un ouvert de X qui contient y, la suite (x_n) ne converge donc pas vers $y \in X$. □

Exemples d'espaces séparés.

1. Tout espace discret est séparé : il suffit de choisir $U = \{x\}$ et $V = \{y\}$.
2. Si X est un ensemble avec au moins deux éléments muni de la topologie triviale, alors X n'est *pas* séparé.
3. Un ensemble X infini muni de le topologie cofinie $\mathscr{T}_f$ n'est *pas* séparé, puisque deux ouverts non-vides ne sont jamais disjoints !

   Pour la même raison, un ensemble X non-dénombrable muni de la topologie codénombrable $\mathscr{T}_c$ n'est pas séparé.
4. Tout espace métrique (X, d) est séparé. En effet, si x et y sont deux éléments distincts de X, alors $d(x, y) =: 2r$ est positif par définition d'une distance. On peut alors choisir $U = B(x, r)$ et $V = B(y, r)$. Ce sont des ouverts de X, et l'inégalité du triangle implique facilement qu'ils sont disjoints.

Ce dernier exemple montre qu'en fait, tout espace métrisable est séparé. Ainsi, si un espace n'est pas séparé, il n'est pas métrisable. Cela donne une nouvelle preuve (en fait, la même) qu'un ensemble muni de la topologie triviale n'est jamais métrisable sauf s'il compte moins de deux éléments. Cela montre également que pour X infini (resp. X non-dénombrable), l'espace topologique $(X, \mathscr{T}_f)$ (resp. $(X, \mathscr{T}_c)$) n'est pas métrisable.

Voyons à présent comment la propriété topologique “être séparé” se comporte relativement aux diverses opérations sur les espaces. Ces résultats sont très faciles à vérifier, les preuves sont donc en exercice.

Remarques.

1. Si Y est un sous-espace d'un espace séparé X, alors Y est aussi séparé.
2. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ est une famille d'espaces séparés, alors $\prod_{i \in I} X_i$ est aussi séparé.
3. Si X est un espace séparé muni d'une relation d'équivalence, alors l'espace quotient $X/\sim$ n'est en général *pas* séparé.

À ce stade, il est naturel de se demander si nous n'avons pas exigé une condition trop forte pour l'unicité de la limite. En d'autres termes :

Question 1. S'il y a unicité de la limite dans un espace topologique, cet espace est-il séparé ?

Un premier élément de réponse est : pas toujours ! En effet, nous avons déjà vu qu'un espace $(X, \mathscr{T}_c)$ avec X non-dénombrable n'est pas séparé, malgré le fait que les seules suites convergentes sont stationnaires, et donc, admettent une limite unique. Nous allons donner une réponse plus complète très prochainement.

En attendant, nous allons nous intéresser à la notion d'ensemble *séquentiellement fermé*. Pour cela, fixons un espace topologique X. Pour tout sous-ensemble $A \subset X$, notons

$$A' = \{x \in X \mid \text{il existe } (x_n) \text{ dans } A \text{ avec } x_n \to x \in X\}$$

l'ensemble des limites de suites dans A. Comme toutes les suites stationnaires sont convergentes, on a l'inclusion $A \subset A'$.

On dit que A est **séquentiellement fermé dans X** si $A' = A$. En d'autres termes, A est séquentiellement fermé dans X si toute limite d'une suite dans A est dans A.

Exemples d'ensembles séquentiellement fermés.

1. Dans un espace discret X, les seules suites convergentes sont les suites stationnaires : cela implique l'égalité $A = A'$ pour tout $A \subset X$, donc tout sous-ensemble est séquentiellement fermé dans X.

   Il en va de même pour tout espace muni de la topologie codénombrable $\mathscr{T}_c$, pour la même raison.
2. Dans un ensemble X muni de la topologie triviale, toutes les suites convergent vers toutes les limites, donc $A' = X$ pour tout $A \subset X$ non-vide. Ainsi, les seuls ensembles séquentiellement fermés sont X et $\varnothing$.
3. Dans $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie standard, $A = (0, 1]$ n'est *pas* séquentiellement fermé puisque la suite $x_n = 1/n \in A$ converge vers $x = 0 \notin A$.

On devine donc une relation entre la notion de séquentiellement fermé et celle de fermé ; la voici.

Proposition I.9. *Si $A \subset X$ est fermé dans X, alors A est séquentiellement fermé dans X.*

Démonstration. Rappelons que $A \subset X$ est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$. Il nous suffit de vérifier l'inclusion $A' \subset \overline{A}$, puisqu'on aura alors $A \subset A' \subset \overline{A}$, ce qui implique $A = \overline{A} \Rightarrow A = A'$. Nous allons en fait vérifier la contraposée de l'inclusion $A' \subset \overline{A}$, à savoir l'implication $x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin A'$. Soit donc $x \notin \overline{A}$. Par définition de l'adhérence, cela signifie que $X \setminus A$ est un voisinage de $x \in X$; il existe donc U ouvert de X avec $x \in U \subset X \setminus A$. Ainsi, aucune suite dans A ne peut converger vers $x \in X$, c'est-à-dire, $x \notin A'$. $\square$

Ce résultat amène naturellement la question de savoir quand la réciproque est valide. En d'autres termes :

Question 2. Dans quel espace topologique a-t-on que tout sous-ensemble séquentiellement fermé est fermé ?

Nous allons donner une réponse satisfaisante à cette question, mais en attendant, bornons-nous à montrer que ce n'est pas toujours le cas. Pour ce faire, considérons à nouveau l'exemple d'un ensemble X non-dénombrable muni de la topologie codénombrable $\mathscr{T}_c$. Comme on l'a vu en exemple 1 ci-dessus, tout sous-ensemble A de X est séquentiellement fermé dans X. En revanche, comme X est non-dénombrable, il existe des sous-ensembles non-fermés dans X, comme par exemple $A = X \smallsetminus \{x\}$.

Avant de revenir à cette question, nous allons discuter une dernière notion liée aux suites convergentes, que voici. Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est **séquentiellement continue en $\mathbf{x \in X}$** si, pour toute suite (x_n) dans X avec $x_n \to x \in X$, on a $f(x_n) \to f(x) \in Y$.

Proposition I.10. *Si $f\colon X \to Y$ est continue en $x \in X$, alors f est séquentiellement continue en $x \in X$.*

Démonstration. Soit donc $f\colon X \to Y$ est continue en $x \in X$, et soit (x_n) une suite dans X avec $x_n \to x \in X$; il s'agit de vérifier que $f(x_n) \to f(x) \in Y$. Pour ce faire, fixons un ouvert V de Y avec $f(x) \in V$. Comme f est continue en $x \in X$ et V est un voisinage de $f(x) \in Y$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x \in X$; il existe donc un ouvert U de X avec $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Comme (x_n) converge vers $x \in X$, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in U$. Pour ce même N, on a donc $n \geq N \Rightarrow f(x_n) \in f(U) \subset V$. Cela démontre que $f(x_n)$ converge vers $f(x) \in Y$ et termine la preuve. □

À nouveau, il est naturel de se demander quand la réciproque est valide.

Question 3. Dans quel espace topologique a-t-on que toute fonction séquentiellement continue en un point est continue en ce point ?

À cette question aussi, nous allons répondre très prochainement ; en attendant, nous allons simplement montrer que ce n'est pas toujours le cas. Pour ce faire, considérons encore une fois un ensemble X non-dénombrable muni de la topologie codénombrable $\mathscr{T}_c$, et l'application $f = id\colon (X, \mathscr{T}_c) \to (X, \mathscr{T}_{\text{disc}})$. Cette application est séquentiellement continue en tout $x \in X$, puisque les seules suites convergentes dans $(X, \mathscr{T}_c)$ sont les suites stationnaires, qui sont évidemment aussi convergentes dans $(X, \mathscr{T}_{\text{disc}})$. Cette application n'est néanmoins continue en aucun $x \in X$, puisque $\{x\}$ est un voisinage de $x \in (X, \mathscr{T}_{\text{disc}})$ mais $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ n'est pas un voisinage de $x \in (X, \mathscr{T}_c)$ (puisque $X \smallsetminus \{x\}$ est non-dénombrable).

La réponse à ces trois questions passe par la définition suivante.

Définition. Un espace topologique X est dit **à base dénombrable de voisinages** si pour tout $x \in X$, il existe une base de voisinages $\mathscr{B}_x$ qui est dénombrable.

Notons que cette notion est évidemment une notion topologique, c'est-à-dire, invariante par homéomorphisme.

Exemples d'espaces à base dénombrable de voisinages.

1. Tout espace métrique (X, d) est à base dénombrable de voisinages. En effet, pour tout $x \in X$, l'ensemble dénombrable

$$\mathscr{B}_x = \{B(x, 1/n) \mid n \geq 1\}$$

   est une base de voisinages de $x \in X$. Cela démontre en fait que tout espace métri*sable* est à base dénombrable de voisinages.

2. Un ensemble X non-dénombrable muni de la topologie cofinie $\mathscr{T}_f$ n'est *pas* à base dénombrable de voisinages (et n'est donc pas métrisable). C'est sans doute l'exemple le plus simple de tel espace topologique, preuve que la plupart des espaces qu'on "rencontre " sont à base dénombrable de voisinages.

   Pour démontrer ce fait, supposons par l'absurde que $\mathscr{B}_x = \{B_n\}_{n\geq 1}$ est une base dénombrable de voisinages (ouverts) de $x \in X$. Par définition de $\mathscr{T}_f$, cela signifie que $X \smallsetminus B_n$ est fini pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que $A = \bigcup_{n\geq 1}(X \smallsetminus B_n)$ est dénombrable. Comme X ne l'est pas, il existe $y \notin A$, i.e.

$$y \in X \smallsetminus A = X \smallsetminus \bigcup_{n\geq 1}(X \smallsetminus B_n) = \bigcap_{n\geq 1} B_n\,,$$

   et l'on peut choisir $y \neq x$. Par conséquent, $X \smallsetminus \{y\}$ est un voisinage de $x \in X$ qui ne contient aucun des B_n. L'ensemble $\mathscr{B}_x$ n'est donc pas une base de voisinages de $x \in X$.

   La même preuve montre qu'un ensemble X non-dénombrable muni de la topologie codénombrable $\mathscr{T}_c$ n'est pas à base dénombrable de voisinages.

Il est grand temps de donner la réponse aux trois questions ci-dessus.

Théorème I.11. *Soit X un espace topologique à base dénombrable de voisinages.*

(1) L'espace X est séparé si et seulement s'il y a unicité de la limite de toute suite convergente dans X.

(2) Un sous-ensemble $A \subset X$ fermé dans X si et seulement si A est séquentiellement fermé dans X.

(3) Une application $f\colon X \to Y$ est continue en $x \in X$ si et seulement si f est séquentiellement continue en $x \in X$.

Cet énoncé appelle quelques commentaires.

Remarques.

1. Comme tout espace métrique X est à base dénombrable de voisinages, cela implique que dans un tel espace, les notions de fermé et de séquentiellement fermé sont équivalentes, de même que celles de continuité et de continuité séquentielle. Ainsi, nous généralisons les résultats vus en ANALYSE I dans le cas particulier de $X = \mathbb{R}^n$.

2. Comme conséquence du second point ci-dessus, nous obtenons qu'une topologie à base dénombrable de voisinages est entièrement déterminée par la notion de convergence associée. En effet, les suites convergentes permettent de définir les sous-ensembles séquentiellement fermés, qui coïncident avec les sous-ensembles fermés, qui déterminent les sous-ensembles ouverts.

   Cela n'est pas le cas en général, puisque les topologies discrètes et codénombrables sur un ensemble non-dénombrables définissent les mêmes suites convergentes (les suites stationnaires, comme on l'a vu).

La preuve du théorème I.11 repose sur le résultat intermédiaire suivant.

Lemme I.12. *Soit X un espace à base dénombrable de voisinages. Alors, tout $x \in X$ admet une* base décroissante de voisinages ouverts*, i.e. une base de voisinages $\mathscr{B}_x = \{B_n\}$ avec $B_n \supset B_{n+1}$ et $B_n \subset X$ ouvert pour tout $n \geq 1$. De plus, toute suite (x_n) avec $x_n \in B_n$ converge vers $x \in X$.*

Démonstration. Soit x un élément d'un espace X à base dénombrable de voisinages. Par définition, il existe une base dénombrable de voisinages $\{B''_n\}_{n\geq 1}$ de $x \in X$. Comme B''_n est un voisinage de $x \in X$, il existe $B'_n \subset B''_n$ ouvert contenant x ; la suite $B_n = B'_1 \cap \cdots \cap B'_n$ fournit une suite $\mathscr{B}_x = \{B_n\}$ décroissante de voisinages ouverts de $x \in X$, qui est une base de voisinages de x puisque $B_n \subset B''_n$ pour tout n. Soit à présent une suite (x_n) avec $x_n \in B_n$ pour tout $n \geq 1$. Comme la suite (B_n) est décroissante, elle satisfait la propriété suivante : pour tout $B_n \in \mathscr{B}_x$, il existe N tel que $m \geq N \Rightarrow x_m \in B_n$: il suffit de choisir $N = n$. Par la première remarque de cette section, cela implique que (x_n) converge vers $x \in X$, ce qui conclut la preuve. □

Nous terminons ce premier chapitre avec la preuve du théorème I.11, qui ne présente maintenant plus de difficulté.

Preuve du théorème I.11. Une des implications du premier point est toujours valide par la proposition I.8. Pour montrer l'autre implication, supposons X non séparé, et tentons de construire une suite avec deux limites distinctes. Comme X n'est pas séparé, il existe $x \neq y \in X$ tels que pour tous ouverts U, V de X avec $x \in U$ et $y \in V$, l'intersection $U \cap V$ est non-vide. Soit $\{B_n(x)\}_n$ (resp. $\{B_n(y)\}_n$) une base décroissante de voisinages ouverts de $x \in X$ (resp. de $y \in X$), qui existe par le lemme I.12. Pour tout $n \geq 1$, choisissons un élément x_n dans $B_n(x) \cap B_n(y)$, qui est non-vide par hypothèse. Cela donne une suite (x_n) qui converge vers $x \in X$ et vers $y \in X$ par le lemme I.12, ce qui termine la preuve du premier point.

Passons au second point. Une des implications est toujours valide par la proposition I.9. Pour vérifier l'autre implication, il nous suffit de montrer que pour tout sous-ensemble A de X, on a l'inclusion $\overline{A} \subset A'$. En effet, on aura alors $A \subset \overline{A} \subset A'$, ce qui implique $A = A' \Rightarrow A = \overline{A}$. Soit donc $x \in \overline{A}$, ce qui équivaut à dire que tout ouvert de X contenant x intersecte A. Par le lemme I.12, il existe une base $\{B_n\}$ décroissante de voisinages ouverts de $x \in X$. Comme B_n est un ouvert de X contenant x, il intersecte A, et l'on peut donc choisir $x_n \in B_n \cap A$. Cela forme une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x par le lemme I.12.

Ainsi, x est bien limite d'une suite dans A, et donc un élément de A', ce qui démontre le deuxième point.

Passons enfin au troisième point. Une des implications est toujours vraie par la proposition I.10. La réciproque utilise les mêmes techniques que les deux preuves ci-dessus, et est donc laissée en exercices. $\square$

Chapitre II: Connexité et compacité

En ANALYSE I, vous avez vu deux résultats d'une importance fondamentale :

- Le théorème des valeurs intermédiaires : *Si* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *est continue et* $r\in\mathbb{R}$ *est entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, alors il existe* $c\in[a,b]$ *tel que* $f(c)=r$*.*
- Le théorème des bornes atteintes : *Si* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *est continue, il existe* $c\in\mathbb{R}$ *tel que* $f(x)\le f(c)$ *pour tout* $x\in[a,b]$*.*

Il s'avère que les ingrédients essentiels de ces énoncés sont de nature topologique : la continuité de f, et la *connexité* de l'espace toplogique $[a,b]$ dans le premier cas, sa *compacité* dans le second.

Dans ce chapitre, nous allons définir et étudier ces notions topologiques fondamentales. Cela nous amènera, entre autres, à de vastes généralisations des deux théorèmes ci-dessus.

II.1 Espaces connexes

Dans cette première section, nous allons définir la notion de connexité et en étudier les premières propriétés.

Définition. Un espace topologique X est dit **connexe** si pour tous $U,V\subset X$ ouverts disjoints avec $X=U\cup V$, on a $U=\varnothing$ ou $V=\varnothing$.

Remarques.

1. Comme cette définition est formulée uniquement en termes d'ouverts, il s'agit d'une *notion topologique* : en d'autres termes, si X et Y sont deux espaces homémorphes, alors X est connexe si et seulement si Y l'est.
2. L'intuition à avoir est la suivante : un espace est connexe s'il est "d'un seul morceau". En effet, la définition peut se formuler comme suit : si on a une décomposition de X en deux morceaux ouverts, alors un des morceaux est vide.
3. Il existe plusieurs manières équivalentes de formuler cette définition. En voici une autre, souvent très pratique : *un espace topologique* X *est connexe si et seulement si les seuls sous-ensembles ouverts et fermés de* X *sont* $\varnothing$ *et* X*.*
4. Quand on dit qu'un sous-espace $Y\subset X$ est connexe, c'est toujours pour la topologie induite par celle de X. Cela peut se traduire comme suit :

si $U, V \subset X$ sont des ouverts avec $Y \cap U \cap V = \varnothing$ et $Y \subset U \cup V$, alors $Y \subset U$ ou $Y \subset V$.

Comme d'habitude, nous allons commencer par illuster cette définition avec quelques exemples faciles.

Exemples d'espaces connexes.

1. Tout ensemble muni de la topologie triviale est connexe.
2. Un ensemble X avec $\#X > 1$ muni de la topologie discrète n'est *pas* connexe. En effet, si X compte au moins deux éléments, les ouverts $U = \{x\}$ et $V = X \setminus \{x\}$ forment une décomposition non-triviale de X.
3. Le sous-espace $Y = [-1, 0) \cup (0, 1] \subset \mathbb{R}$ n'est *pas* connexe : les ouverts $U = [-1, 0)$ et $V = (0, 1]$ de Y définissent une décomposition non-triviale.

Quand un espace n'est pas connexe, il est souvent facile de le démontrer, comme dans les exemples ci-dessus : il suffit d'exhiber une décomposition non-triviale de cet espace en deux ouverts. En revanche, il n'est souvent pas évident de démontrer qu'un espace (intéressant) est connexe. Nous allons donc commencer par démontrer quelques résultats généraux sur les espaces connexes ; les exemples concrets, comme la droite réelle $\mathbb{R}$, seront traités dans la section suivante.

Le premier résultat est relativement intuitif : une union d'espaces connexes d'intersection non-vide est connexe.

Proposition II.1. *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une collection de sous-espaces connexes d'un espace topologique X avec $\bigcap_{i \in I} A_i$ non-vide, alors le sous-espace $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Démonstration. Comme l'intersection est non-vide, fixons $x \in X$ tel que $x \in A_i$ pour tout $i \in I$. Pour montrer que $Y = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe, considérons donc deux ouverts $U, V \subset X$ avec $Y \cap U \cap V = \varnothing$ et $Y \subset U \cup V$. Le but est de montrer que $Y \subset U$ ou $Y \subset V$ (voir la remarque 4 ci-dessus). Comme x est élément de $\bigcap_{i \in I} A_i \subset Y \subset U \cup V$, on a $x \in U$ ou $x \in V$; sans restreindre la généralité, disons que x appartient à U. Pour tout $i \in I$, on a $A_i \cap U \cap V \subset Y \cap U \cap V = \varnothing$ et $A_i \subset Y \subset U \cup V$, ce qui implique $A_i \subset U$ ou $A_i \subset V$ par connexité de A_i. Mais comme on a $x \in A_i \cap U$, cela donne l'inclusion $A_i \subset U$ pour tout $i \in I$, donc l'inclusion $Y = \bigcup_{i \in I} A_i \subset U$. □

Proposition II.2. *Si A est un sous-espace connexe d'un espace topologique X, alors tout sous-espace $B \subset X$ avec $A \subset B \subset \overline{A}$ est aussi connexe.*

Démonstration. Soient donc $U, V \subset X$ deux ouverts avec $B \cap U \cap V = \varnothing$ et $B \subset U \cup V$; il s'agit de montrer que B est inclu dans l'un de ces ouverts. L'inclusion $A \subset B$ implique $A \cap U \cap V \subset B \cap U \cap V = \varnothing$ et $A \subset B \subset U \cup V$; comme A est connexe, on a donc $A \subset U$ ou $A \subset V$. Sans restreindre la généralité, disons que $A \subset U$, d'où $A \cap V = A \cap U \cap V = \varnothing$. Vérifions l'inclusion $B \subset U$. Soit donc $x \in B \subset U \cup V$. Si x est élément de V, alors x n'appartient pas au fermé $X \setminus V$, qui contient A puisque A et V sont disjoints. Ainsi,

$$x \notin \bigcap_{F \text{ fermé}, F \supset A} F = \overline{A},$$

ce qui contredit $x \in B \subset \overline{A}$. On a donc bien $x \in U$, ce qui conclut la preuve. □

La démonstration du prochain résultat est très facile, mais l'importance de cet énoncé l'élève sans contestation possible au rang de théorème.

Théorème II.3. *Si $f: X \to Y$ est une application continue avec X connexe, alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Par le troisième point de la proposition I.2, l'application surjective $g: X \to Z = f(X)$ obtenue à partir de f en restreignant l'espace d'arrivée est aussi continue. Si Z n'est pas connexe, on a deux ouverts disjoints non-vides $U, V \subset Z$ avec $U \cup V = Z$. Comme g est continue, les sous-ensembles $U' = g^{-1}(U)$ et $V' = g^{-1}(V)$ sont des ouverts de X. De plus, les propriétés élémentaires de théorie des ensembles donnent

$$\begin{aligned} U' \cap V' &= g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) = g^{-1}(U \cap V) = g^{-1}(\varnothing) = \varnothing\,, \\ U' \cup V' &= g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V) = g^{-1}(U \cup V) = g^{-1}(Z) = X\,. \end{aligned}$$

Finalement, comme g est sujective et U non-vide, l'ensemble $U' = g^{-1}(U)$ est aussi non-vide, et de même pour V'. Les ouverts U' et V' forment donc une décomposition non-triviale de X, ce qui est impossible puisque X est connexe. □

Théorème II.4. *Un espace produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ est connexe si et seulement chaque espace X_i est connexe.*

Démonstration. Commençons par supposer le produit connexe. Pour chaque i, la projection $\pi_i: X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ est continue. Par le théorème II.3, l'image X_i de π_i est donc connexe.

Réciproquement, supposons que chaque X_i est connexe et montrons que le produit l'est aussi. Par induction sur $n \geq 1$, et en utilisant l'homéomorphisme

$$X_1 \times \cdots \times X_n \cong (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

vu en exercice, il nous suffit de montrer l'affirmation suivante : si X et Y sont deux espaces connexes, alors leur produit $X \times Y$ est aussi connexe. Pour le voir, fixons un élément quelconque $(a, b) \in X \times Y$. Le sous-espace $X \times \{b\} \subset X \times Y$ est homéomorphe à X (c'est un exercice). Comme X est connexe, on a donc que $X \times \{b\}$ est connexe. Par le même raisonnement, $\{x\} \times Y$ est homéomorphe à Y, et donc connexe, pour tout $x \in X$. Comme $X \times \{b\} \cap \{x\} \times Y = \{(x, b)\}$ est non-vide, la proposition II.1 implique que $T_x = X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y$ est connexe. Finalement, l'intersection $\bigcap_{x \in X} T_x$ contient l'élément (a, b) ; elle est donc non-vide, et cette même proposition II.1 implique que $\bigcup_{x \in X} T_x = X \times Y$ est connexe. □

Remarque. Ce résultat s'étend-il aux produits d'un nombre quelconque d'espaces $\{X_i\}_{i \in I}$? Par la même preuve, on a clairement que si $\prod_{i \in I} X_i$ est connexe, alors chaque X_i est connexe. Réciproquement, on peut montrer que si chaque X_i est connexe, alors l'espace $\prod_{i \in I} X_i$ est connexe pour la topologie produit. La preuve n'est pas très difficile et repose sur le cas fini montré ci-dessus, mais nous ne la verront pas ici. En revanche, l'espace $\prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie des boîtes n'est en général *pas* connexe, même si chaque X_i l'est. Un exemple élégant sera vu en exercices.

II.2 Sous-espaces connexes de $\mathbb{R}$ et connexité par arcs

Tout cela est bien joli, mais jusqu'à présent, nous n'avons pas vu un seul exemple non-trivial d'espace connexe ! Le but de cette nouvelle section est de montrer que les intervalles dans la droite réelle sont connexes. Cela permettra ensuite de prouver qu'une foule d'espaces sont connexes, au moyen d'une nouvelle notion topologique : la *connexité par arcs*. Au passage, on montrera aussi la généralisation promise du théorème des valeurs intermédiaires.

Commençons donc par montrer que les intervalles de la droite réelle sont connexes. Comme vous allez le voir, cette démonstration est assez subtile et d'un type nouveau dans ce cours, puisqu'elle utilise de manière essentielle la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Théorème II.5. *Tout intervalle ouvert $(a,b) \subset \mathbb{R}$ est connexe.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que l'intervalle (a,b) ne soit pas connexe. Par définition, cela signifie qu'il existe deux ouverts $U_1, V_1 \subset \mathbb{R}$ tels que $U = U_1 \cap (a,b)$ et $V = V_1 \cap (a,b)$ sont non-vides, disjoints, et recouvrent (a,b). Comme ces sous-ensembles sont non-vides, on peut choisir $u \in U$ et $v \in V$; comme U et V sont disjoints, u et v sont distincts, et l'on peut donc supposer $u < v$ sans restreindre la généralité. Considérons à présent le sous-ensemble $S \subset (a,b)$ défini par

$$S = \{s \in (a,b) \mid [u,s] \subset U\}.$$

Notons que cet ensemble S est borné, puisqu'il est inclu dans (a,b), et non-vide, puisqu'il contient u. Ainsi, il admet un *supremum* $s_0 = \sup S$. Par définition, cela signifie que s_0 est un *majorant* de S (i.e. $s \leq s_0$ pour tout $s \in S$), et s_0 est *le plus petit des majorants* de S (i.e. si $s \leq s'$ pour tout $s \in S$, alors $s_0 \leq s'$).

Nous affirmons maintenant que tout $x \in V$ avec $u < x$ est un majorant de S. En effet, si tel n'est pas le cas, il existe $s \in S$ avec $x < s$; on aurait donc $x \in (u,s) \subset [u,s] \subset U$, ce qui est impossible puisque U et V sont disjoints. Nous utiliserons cette affirmation plusieurs fois dans la suite de la preuve.

On a les inégalités $a < u$ puisque $u \in (a,b)$, $u \leq s_0$ puisque s_0 est un majorant de S qui contient u, $s_0 \leq v$ puisque s_0 est le plus petit majorant de S et v est un tel majorant (par l'affirmation ci-dessus), et $v < b$ puisque $v \in (a,b)$. En résumé

$$a < u \leq s_0 \leq v < b,$$

ce qui implique que s_0 appartient à $(a,b) = U \cup V$. Ainsi, s_0 est un élément de U ou de V. Nous allons maintenant voir que ces deux cas mènent à une contradiction, ce qui concluera la preuve.

Supposons tout d'abord que $s_0 \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset U$. Notons que $[u, s_0) \subset U$. (Sinon, on aurait un $x \in (u, s_0) \cap V$ qui serait un majorant de S par l'affirmation ci-dessus, et plus petit que s_0 ce qui est impossible.) Ainsi, on a l'inclusion $[u, s_0 + \varepsilon/2] \subset U$, ce qui signifie que $s_0 + \varepsilon/2$ appartient à S. C'est impossible puisque s_0 est un majorant de S.

Supposons enfin que $s_0 \in V$. Comme V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset V$ et $u < s_0 - \varepsilon$. Par l'affirmation ci-dessus, $s_0 - \varepsilon/2$ est un majorant de S, ce qui est impossible puisque s_0 est le plus petit de ces majorants. □

Corollaire II.6. *La droite réelle* $\mathbb{R}$ *est connexe, de même que tous les intervalles* (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞) *et* $[a,\infty)$.

Démonstration. Comme on l'a vu, tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. Puisque (a,b) est connexe par le théorème II.5, il en va donc de même pour les autres, i.e. $\mathbb{R}$, $(-\infty,a)$, et (a,∞). Pour les intervalles restants, on utilise la proposition II.2 : par exemple, $B = [a,b)$ est connexe puisque $A \subset B \subset \overline{A}$ avec $A = (a,b)$ connexe. On procède de même pour les autres. □

Voici enfin la généralisation promise du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème II.7 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *une application continue avec* X *connexe, et soient* $a,b \in X$. *Pour tout* $r \in \mathbb{R}$ *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* $c \in X$ *avec* $f(c) = r$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $f(a) < r < f(b)$ sans aucun $c \in X$ avec $f(c) = r$. En d'autres termes, on suppose $r \notin f(X)$. Considérons les ouverts $U = f(X) \cap (-\infty, r)$ et $V = f(X) \cap (r, \infty)$ de $f(X)$. Par hypothèse, U contient $f(a)$ et V contient $f(b)$; ils sont donc non-vides. Ils sont clairement disjoints, et puisque $r \notin f(X)$, ils recouvrent $f(X)$. Ainsi, $f(X)$ n'est pas connexe, ce qui implique que X n'est pas connexe par le théorème II.3. Une contradiction. □

Notons que cet énoncé aurait pu être donné et démontré à la section précédente. En revanche, c'est uniquement grâce au théorème II.5 que nous pouvons affirmer que cet énoncé est bel et bien une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires vu en ANALYSE I, qui correspond au cas $X = \mathbb{R}$. C'est la raison pour laquelle nous ne le donnons que maintenant.

La connexité de l'intervalle $[a,b]$ va maintenant nous permettre de démontrer la connexité d'une grande classe d'espaces topologiques, appelés *connexes par arcs*. En voici la définition.

Définition. Soit X un espace topologique et $x, y \in X$. Un **chemin** dans X de x à y est une application continue $f\colon [a,b] \to X$ telle que $f(a) = x$ et $f(b) = y$.
Un espace topologique X est dit **connexe par arcs** si pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin dans X de x à y.

Remarques.

1. Notons que la connexité par arcs est une notion topologique : si X et Y sont deux espaces homéomorphes, alors X est connexe par arcs si et seulement si Y l'est.
2. Plusieurs propriétés générales de la connexité par arcs sont en exercices.

Proposition II.8. *Si un espace est connexe par arcs, alors il est connexe.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que X est connexe par arcs mais pas connexe. Il existe donc $U, V \subset X$ ouverts non-vides disjoints qui recouvrent X. Comme ces sous-ensembles ne sont pas vides, on peut choisir $x \in U$ et $y \in V$, et comme X est connexe par arcs, il existe un chemin $f\colon [a,b] \to X$ de x à y. On a alors que $U' = f^{-1}(U)$ et $V' = f^{-1}(V)$ sont deux ouverts de $[a,b]$, non-vides puisque $a \in U'$ et $b \in V'$, avec $U' \cap V' = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $U' \cup V' = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(X) = [a,b]$. Cela signifie que $[a,b]$ n'est pas connexe, ce qui contredit le corollaire II.6. □

Exemples d'espaces connexes par arcs.

1. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble *convexe* ; cela signifie que pour tout $x, y \in X$ le segment $[x,y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ est inclu dans X.[1] Alors, X est connexe par arcs, et donc connexe. En effet, pour tout $x, y \in X$, on peut choisir le chemin $f\colon [0,1] \to X$ donné par $f(t) = tx + (1-t)y$, qui reste dans X par hypothèse.
2. Pour tout $n > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'espace $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{x\}$ est connexe par arcs, et donc connexe.
3. Pour tout $n > 0$, la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs, et donc connexe.

À l'aide de cette notion de connexité et des exemples ci-dessus, on peut donner quelques premières applications.

Trois applications de la connexité.

1. Pour $n > 1$, les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes.[2]

   Pour montrer cette affirmation, supposons par l'absurde qu'il existe un homéomorphisme $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Par la proposition I.2, la restriction de h à $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ définit un homéomorphisme $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{h(0)\}$. Mais $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{h(0)\}$ l'est pour tout $n > 1$, comme on l'a vu ci-dessus. Une contradiction.[3]
2. Toute application continue $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ admet un $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ continue avec $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in S^1$. Dans ce cas, on peut considérer l'application continue $g\colon S^1 \to \{-1, 1\}$ définie par

   $$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

   puisque le dénominateur est non-nul par hypothèse. Comme $g(-x) = -g(x)$, cette application est surjective, d'où $g(S^1) = \{-1, 1\}$. Comme S^1 est connexe

1. Attention, la convexité n'est *pas* une notion topologique !
2. À ceux qui pensent que c'est "évident", il est bon de rappeler que pour tout $n > 1$, il existe une application continue surjective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, ce qu'on appelle une *courbe de Peano*.
3. En fait, on peut montrer que si $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont homéomorphes, alors $n = m$. Mais cela nécessite des outils bien plus puissants.

(on l'a vu ci-dessus), le théorème II.3 implique que $g(S^1) = \{-1, 1\}$ est aussi connexe. Ce n'est pas le cas, car $\{-1, 1\}$ est un espace discret. [4]

3. Toute application continue $f: [0, 1] \to [0, 1]$ admet un point fixe.
   Sinon, on peut considérer l'application continue $g: [0, 1] \to \{-1, 1\}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)-x}{|f(x)-x|}$. Comme $g(0) = 1$ et $g(1) = -1$, g est surjective. On conclut comme ci-dessus. [5]

Remarques.

1. La réciproque de la proposition II.8 n'est pas vraie : il existe des espaces connexes qui ne sont pas connexes par arcs. En voici un exemple, illustré en Figure II.1.
   Soit $f: (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $f(t) = (t, \sin(1/t))$. C'est une application continue, puisque chacune de ses coordonnées est une fonction continue de $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}$. Comme l'intervalle $(0, 1)$ est connexe par le théorème II.5, son image $A = f((0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$ est aussi connexe par le théorème II.3. Notons que A n'est autre que le graphe de la fonction $t \mapsto \sin(1/t)$. Soit à présent l'espace $X = A \cup \{(0, 0)\}$. Notons que le point ajouté est limite d'une suite dans A ; ainsi, il est élément de $A' \subset \overline{A}$. On a donc les inclusions $A \subset X \subset \overline{A}$, ce qui implique que X est toujours connexe par la proposition II.2. En revanche, X n'est pas connexe par arcs, car il n'est pas possible de relier l'origine $x = (0, 0)$ à un point de A, par exemple $y = (1, \sin(1))$, par un chemin continu dans X. La raison en est que la fonction $t \mapsto \sin(1/t)$ ne s'étend pas en une fonction continue en l'origine, comme vous l'avez vu en ANALYSE I.

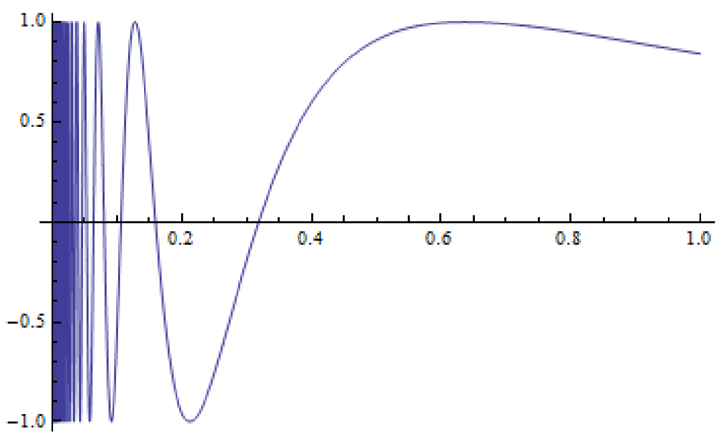


FIGURE II.1 – Un exemple d'espace connexe mais pas connexe par arcs.

---

4. Plus généralement, il est possible de montrer que toute application continue $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ admet un $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. Le cas $n = 2$, que vous verrez en TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE, admet l'énoncé concret suivant : *À tout moment, sur terre, il existe deux points antipodaux du globe qui ont même température et même pression.*

5. Plus généralement, le *théorème du point fixe de Brouwer* affirme que toute application continue du disque $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ dans lui-même admet un point fixe.

2. Malgré cela, la proposition II.8 admet la réciproque partielle que voici : un espace X est connexe par arcs si et seulement si X est connexe et tout $x \in X$ admet un voisinage connexe par arcs. (Dans l'exemple de la figure II.1, l'origine n'admet pas de tel voisinage.)

   Une des implications est claire : si X est connexe par arcs, alors il est connexe par la proposition II.8, et tout $x \in X$ admet le voisinage connexe par arcs X. Nous allons donner (l'idée de) la preuve de l'autre implication, car elle utilise une très belle astuce. Supposons donc X connexe tel que chaque $x \in X$ admet un voisinage connexe par arcs. Fixons un $x \in X$ arbitraire, et considérons

   $$U = \{y \in X \mid \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y\} \subset X\,.$$

   Ce sous-ensemble de X est non-vide puisqu'il contient x. Comme tout $y \in U$ admet un voisinage N connexe par arcs, on aura l'inclusion $N \subset U$ en composant les chemins : cela signifie que U est un voisinage de tout $y \in U$, et donc que U est ouvert. De la même manière, on montre que $X \setminus U$ est ouvert, i.e. que U est fermé. Ainsi, $U \subset X$ est ouvert, fermé et non-vide. Par connexité de X, cela implique que $U = X$, ce qui signifie que X est connexe par arcs.

La preuve ci-dessus repose sur une idée très simple mais extrêmement utile, que l'on peut résumer comme suit.

> Pour voir que les éléments d'un ensemble X satisfont une certaine propriété P, il suffit de munir X d'une topologie qui en fait un espace connexe, et de vérifier que le sous-ensemble
>
> $$U = \{x \in X \mid x \text{ vérifie la propriété } P\} \subset X$$
>
> est non-vide, ouvert, et fermé.

Vous verrez de nombreuses applications de cette idée au cours de vos études.

II.3 Espaces compacts

Passons à présent à la notion de *compacité*. Cette notion est au moins aussi importante que celle de connexité, mais la définition en est bien moins intuitive, et plus difficile à intégrer. Comme pour la connexité, nous allons commencer par la définition de cette notion et un certain nombre de propriétés générales dans cette section, avant de passer à des exemples concrets en section II.4.

Commençons avec un peu de terminologie. Une famille $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ d'ouverts d'un espace topologique X est un *recouvrement ouvert de* X si $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Un *sous-recouvrement fini de* $\mathscr{U}$ est un nombre fini d'éléments de $\mathscr{U}$ qui forment un recouvrement ouvert de X.

Définition. Un espace topologique X est dit **compact** si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Remarques.

1. La compacité est clairement une notion topologique : si X et Y sont deux espaces homéomorphes, alors X est compact si et seulement si Y l'est.
2. Cette définition a beau être courte, elle n'en est pas moins la plus difficile à intégrer de ce cours ! Écrivons-la à nouveau : *Un espace X est compact si pour toute famille $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ avec $U_i \subset X$ ouvert pour tout $i \in I$ et $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, il existe $i_1, \dots, i_m \in I$ tels que $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} = X$.*
3. Il n'est pas inutile d'écrire également en toutes lettres la signification de la non-compacité d'un espace. Un espace X n'est pas compact s'il existe un recouvrement ouvert de X qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. En d'autres termes : *Un espace X n'est pas compact s'il existe une famille $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ avec $U_i \subset X$ ouvert pour tout $i \in I$ et $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, telle que pour tout $i_1, \dots, i_m \in I$ on a $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \neq X$.*
4. La compacité d'un sous-espace $Y \subset X$ (pour la topologie induite) peut s'écrire comme suit : *Un sous-espace $Y \subset X$ est compact si pour toute famille $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ avec $U_i \subset X$ ouvert pour tout $i \in I$ et $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $i_1, \dots, i_m \in I$ tels que $Y \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$.*

Voici à présent une liste d'exemples d'espaces compacts, ou non. D'autres exemples sont en exercices.

Exemples d'espaces compacts.

1. Si un ensemble est muni d'une topologie qui ne compte qu'un nombre fini d'ouverts, alors l'espace topologique correspondant est clairement compact. En particulier, tout ensemble muni de la topologie triviale est compact de même que tout ensemble fini (pour n'importe quelle topologie).
2. Un ensemble X muni de la topologie discrète est compact si et seulement s'il est fini.

   En effet, si X est fini, alors il est compact par l'exemple ci-dessus. Réciproquement, si X est infini, alors $\mathscr{U} = \{\{x\}\}_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. Ainsi, X n'est pas compact.
3. La droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie standard n'est *pas* compacte, puisque le recouvrement $\mathscr{U} = \{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ n'admet pas de sous-recouvrement fini.

   Cela implique directement que les intervalles ouverts (a, b), $(-\infty, a)$ et (a, ∞) ne sont pas compacts, puisqu'ils sont homéomorphes à $\mathbb{R}$.
4. Le sous-espace $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ n'est *pas* compact, puisque le recouvrement ouvert $\mathscr{U} = \{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de sous-recouvrement fini.

   Cela implique qu'aucun intervalle de la forme $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a]$ ou $[a, \infty)$ n'est compact, puisqu'ils sont tous homéomorphes.
5. Les intervalles fermés et bornés $[a, b]$ sont compacts, mais la preuve demande du travail : c'est le résultat principal de la section II.4.

6. Le sous-ensemble $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est compact.

   En effet, soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X, i.e. $U_i \subset \mathbb{R}$ ouvert pour tout $i \in I$ et $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Comme 0 est élément de $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $i_1 \in I$ tel que $0 \in U_{i_1}$. Comme $U_{i_1} \subset \mathbb{R}$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_{i_1}$. Mais $X \smallsetminus (X \cap U_{i_1})$ est fini : il existe donc $i_2, \dots, i_m \in I$ tels que $X \smallsetminus (X \cap U_{i_1}) \subset U_{i_2} \cup \dots U_{i_m}$. Ainsi, on a l'inclusion $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$. On a donc bien trouvé un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$.

Donnons à présent un certain nombre de propriétés générales de la compacité.

Proposition II.9. *Si X est un espace compact et $Y \subset X$ est fermé, alors Y est compact.*

Démonstration. Soit donc $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $Y \subset X$, i.e. une famille d'ouverts de X avec $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Comme $Y \subset X$ est fermé, $X \smallsetminus Y \subset X$ est ouvert, et $\{X \smallsetminus Y\} \cup \{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est compact, il existe $i_1, \dots, i_m \in I$ tels que $X = X \smallsetminus Y \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$. Cela signifie que Y est inclu dans $U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$: on a donc trouvé un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$. □

Proposition II.10. *Soit X un espace séparé et $Y \subset X$ avec Y compact. Alors, Y est fermé dans X.*

Démonstration. Soit X séparé et $Y \subset X$ avec Y compact ; il s'agit de montrer que Y est fermé dans X, i.e. que $X \smallsetminus Y$ est ouvert dans X, ou en d'autres termes, que $X \smallsetminus Y$ est voisinage de tout $x \in X \smallsetminus Y$. Fixons donc $x \in X \smallsetminus Y$, et tentons de trouver $V \subset X$ ouvert avec $x \subset V \subset X \smallsetminus Y$.

Comme $x \in X \smallsetminus Y$, on a $x \neq y$ pour tout $y \in Y$ fixé. Puisque X est séparé, il existe des ouverts disjoints $U_y, V_y \subset X$ avec $y \in U_y$ et $x \in V_y$. La famille d'ouverts $\{U_y\}_{y\in Y}$ forme un recouvrement ouvert de Y qui est compact : ainsi, il existe $y_1, \dots, y_m \in Y$ tels que $Y \subset U_{y_1} \cup \dots U_{y_m}$. Posons $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_m}$, et vérifions qu'il satisfait les propriétés demandées.

C'est un ouvert de X puisqu'il est l'intersection d'un nombre fini d'ouverts de X. Il contient x puisque chaque V_y contient x. Finalement,

$$V \cap Y = \bigcap_{i=1}^{m} V_{y_i} \cap Y \subset \bigcap_{i=1}^{m} V_{y_i} \cap \bigcup_{j=1}^{m} U_{y_j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} (V_{y_j} \cap U_{y_j}) = \varnothing\,,$$

d'où l'inclusion $V \subset X \smallsetminus Y$. Cela termine la démonstration. □

Le résultat suivant est facile, mais d'une grande importance, d'où son statut de théorème.

Théorème II.11. *Si $f\colon X \to Y$ est une application continue avec X compact, alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration. Soit donc $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(X) \subset Y$, i.e. une famille d'ouverts $U_i \subset Y$ tels que $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Comme f est continue, $f^{-1}(U_i) \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$. De plus, on a les égalités ensemblistes

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)\,.$$

Ainsi, $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X qui est compact : il existe donc $i_1,\ldots,i_m \in I$ tels que $X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_m}) = f^{-1}(U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m})$. On a donc l'inclusion $f(X) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$, ce qui signifie qu'on a trouvé un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$. □

Voici l'une des utilités de la notion de compacité.

Corollaire II.12. *Si $f\colon X \to Y$ est une application continue bijective avec X compact et Y séparé, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. On doit vérifier que $f^{-1}\colon Y \to X$ est continue. Par la proposition I.1, il suffit de montrer que pour tout $F \subset X$ fermé, $f(F) \subset Y$ est fermé. Comme F est fermé dans X compact, F est compact par la proposition II.9. Comme f est continue, $f(F)$ est compact par le théorème II.11. Puisque $f(F)$ est compact dans Y séparé, $f(F) \subset Y$ est fermé par la proposition II.10. □

Remarques.

1. En section I.2, on avait vu deux exemples d'applications continues qui ne sont pas des homéomorphismes ; nous allons maintenant voir que chacun de ces exemples satisfait à une des deux conditions du corollaire II.12, mais pas à l'autre. Le premier exemple était $id_X\colon (X, \mathscr{T}_{\text{disc}}) \to (X, \mathscr{T}_{\text{triv}})$. Si X est fini, alors $(X, \mathscr{T}_{\text{disc}})$ est compact. Le problème est que l'espace $(X, \mathscr{T}_{\text{triv}})$ n'est jamais séparé si X compte au moins deux éléments. Le second exemple était l'application exponentielle $f\colon [0,1) \to S^1$. Cette fois, S^1 est bien séparé, mais $[0,1)$ n'est pas compact, comme on l'a vu.
2. Le corollaire II.12 est extrêmement utile. Rappelons-nous par exemple les difficultés rencontrées en sous-section I.5.2 pour vérifier que l'application continue bijective $[0,1]/\{0,1\} \to S^1$ induite par l'exponentielle est un homéomorphisme ! Cela sera une conséquence immédiate du corollaire II.12, une fois que l'on aura démontré que $[0,1]$ est compact.
3. D'une manière plus générale, la discussion en sous-section I.5.2 et le corollaire II.12 impliquent directement l'énoncé suivant : *Soit $f\colon X \to Y$ une application continue avec X compact et Y séparé. Alors, f induit un homéomorphisme entre l'espace quotient $X/\!\sim$ et $f(X)$, où la relation d'équivalence sur X est définie par $x \sim x'$ si et seulement si $f(x) = f(x')$.*

Voici un dernier résultat général sur les espaces compacts.

Théorème II.13. *Un espace produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ est compact si et seulement chaque espace X_i est compact.*

Démonstration. Commençons par supposer le produit compact. Pour chaque i, la projection $\pi_i\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ est continue. Par le théorème II.11, l'image X_i de π_i est donc compact.

Réciproquement, supposons que chaque X_i est compact et montrons que le produit l'est aussi. Comme dans la preuve du théorème II.4, on peut procéder par induction sur $n \geq 1$ et se ramener à l'affirmation suivante : si X et Y sont deux espaces compact, alors leur produit $X \times Y$ est aussi compact. Pour démontrer cet énoncé, on aura besoin d'un résultat intermédiaire que voici.

Lemme II.14 (Lemme du tube)**.** *Soient X un espace topologique quelconque et Y un espace compact. Si N est un ouvert de $X \times Y$ contenant $\{x_0\} \times Y$ pour un certain $x_0 \in X$, il existe un ouvert $U \subset X$ contenant x_0 avec $U \times Y \subset N$.*

Démonstration du lemme du tube. Comme N est ouvert et contient $\{x_0\} \times Y$, il est voisinage de $(x_0, y) \in X \times Y$ pour tout $y \in Y$. Par définition de la topologie produit, il existe des ouverts $U_y \subset X$ et $V_y \subset Y$ avec $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset N$. La famille $\{V_y\}_{y \in Y}$ forme un recouvrement ouvert de Y qui est compact. Il admet donc un sous-recouvrement fini : il existe $y_1, \dots, y_m \in Y$ avec $Y = \bigcup_{i=1}^m V_{y_i}$. Posons $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_m}$, et vérifions qu'il satisfait bien les propriétés voulues. C'est un ouvert de X puisqu'il est l'intersection d'un nombre fini d'ouverts de X. Il contient x_0 puisque chaque U_y contient x_0. Finalement,

$$U \times Y = \bigcap_{i=1}^m U_{y_i} \times \bigcup_{j=1}^m V_{y_j} \subset \bigcup_{j=1}^m (U_{y_j} \times V_{y_j}) \subset N\,.$$

Cela termine la démonstration du lemme du tube. □

À l'aide de ce lemme, terminons la démonstation du théorème II.13. Soient donc X et Y compacts, et $\mathscr{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Pour tout $x \in X$ fixé, $\mathscr{W}$ est un recouvrement ouvert du sous-espace $\{x\} \times Y$, qui est homéomorphe à Y et donc compact. Ainsi, il existe $i_1(x), \dots, i_m(x) \in I$ tels que $\{x\} \times Y \subset W_{i_1(x)} \cup \dots \cup W_{i_m(x)} =: N(x)$. Par le lemme du tube appliqué à cet ouvert $N(x) \subset X \times Y$, et en utilisant une seconde fois la compacité de Y, il existe un ouvert $U(x) \subset X$ contenant x avec $U(x) \times Y \subset N(x)$. En particulier, $\{U(x)\}_{x \in X}$ forme un recouvrement ouvert de X, qui est compact. Il existe donc $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $X = U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)$. Ainsi, on a les inclusions

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^n (U(x_j) \times Y) \subset \bigcup_{j=1}^n N(x_j) = \bigcup_{j=1}^n (W_{i_1(x_j)} \cup \dots \cup W_{i_m(x_j)})\,.$$

On a donc trouvé un sous-recouvrement fini de $\mathscr{W}$, ce qui termine la preuve. □

Remarque. Ce résultat s'étend-il aux produits d'un nombre quelconque d'espaces $\{X_i\}_{i \in I}$? Par la même preuve, on a clairement que si $\prod_{i \in I} X_i$ est compact, alors chaque X_i est compact. Réciproquement, on peut montrer que si chaque X_i est compact, alors l'espace $\prod_{i \in I} X_i$ est compact pour la topologie produit. C'est un résultat difficile, appelé le *théorème de Tychonoff*, qui utilise de manière non-triviale l'axiome du choix (voir Munkres, chapitre 5). En revanche, on montre facilement que l'espace $\prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie des boîtes n'est en général *pas* compact, même si chaque X_i l'est. En voici un exemple.

Exemple. Soit $I = \mathbb{N}$, et pour tout $i \in I = \mathbb{N}$, posons $X_i = \{1, 2\}$ muni de la topologie discrète. Comme X_i est fini, il est compact. En revanche, l'espace produit $\prod_{i \in I} X_i = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ est infini et discret pour la topologie des boîtes. (Rappelons que pour cette topologie, le produit d'espaces discrets est toujours discret.) Or, comme on l'a vu en exemple 2, un espace infini discret n'est pas compact.

II.4 Sous-espaces compacts de la droite

Tout cela est bien joli, mais une fois de plus, nous n'avons pas beaucoup d'exemples naturels d'espaces compacts ! Comme pour la connexité, nous allons commencer par étudier les sous-espaces compacts de la droite réelle. Cela permettra entre autres la généralisation promise du théorème des bornes atteintes, et le caractérisation des sous-espaces compacts de l'espace $\mathbb{R}^n$.

Comme pour la preuve de la connexité de (a,b), la preuve suivante utilise de manière curciale la structure d'ordre sur les réels.

Théorème II.15. *Pour tout $a < b \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[a,b]$ est compact.*

Démonstration. Soit $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fixé de $[a,b]$, i.e. une famille d'ouverts $U_i \subset \mathbb{R}$ avec $[a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Le but est de montrer que $[a,b]$ admet un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$. Pour cela, considérons le sous-ensemble C de $[a,b]$ défini par

$$C = \{x \in (a,b] \mid [a,x] \text{ admet un sous-recouvrement fini de } \mathscr{U}\}.$$

Cet ensemble C est clairement borné, puisqu'il est inclu dans $[a,b]$. Vérifions à présent qu'il est non-vide. Comme $a \in [a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $j \in I$ tel que $a \in U_j$. Puisque $U_j \subset \mathbb{R}$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_j$. Ainsi, $[a, a+\varepsilon/2]$ admet le sous-recouvrement fini $\{U_j\}$ de $\mathscr{U}$. Cela signifie que $a + \varepsilon/2$ est un élément de C, qui n'est donc pas vide. Comme C est borné et non-vide, il admet un supremum $c := \sup C$.

Dans un premier temps, montrons que c appartient à C. On a clairement les inégalités $a < c$ (puisque c majore les éléments de C, qui sont strictement plus grands que a) et $c \leq b$ (puisque b est un majorant de C, et c est le plus petit tel majorant). Ainsi, on a bien $c \in (a,b]$; il reste à voir que $[a,c]$ admet un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$. Comme $c \in (a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $k \in I$ tel que $c \in U_k$. Puisque $U_k \subset \mathbb{R}$ est ouvert et $a < c$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a < c - \varepsilon$ et $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_k$. Il existe $d \in (c-\varepsilon, c]$ avec $d \in C$; sinon, $c - \varepsilon$ serait un majorant de C plus petit que c. Ainsi, $[a,d]$ admet un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$: il existe donc $i_1, \dots, i_m \in I$ tels que $[a,d] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$. Cela implique $[a,c] = [a,d] \cup (c-\varepsilon, c] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \cup U_k$. On a montré que $[a,c]$ admet un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$, d'où $c \in C$.

Dans un second temps, montrons l'égalité $c = b$. Supposons par l'absurde que $c < b$. Comme ci-dessus, il existe $\ell \in I$ et $\varepsilon > 0$ avec $[c, c+\varepsilon/2] \subset U_\ell$ et $c+\varepsilon < b$. On a alors l'inclusion $[a, c+\varepsilon/2] = [a,c] \cup [c, c+\varepsilon/2] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \cup U_k \cup U_\ell$, d'où $c + \varepsilon/2 \in C$. C'est impossible, puisque c est un majorant de C.

On a donc montré que $b = c \in C$. Par définition de C, cela signifie que $[a,b]$ admet un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$. L'intervalle $[a,b]$ est donc compact. □

Voici la généralisation promise du théorème des bornes atteintes.

Théorème II.16 (Théorème des bornes atteintes)**.** *Soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ continue avec X compact. Alors, il existe $x_{min}, x_{max} \in X$ tel que $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Soit $Y = f(X)$ le sous-espace de $\mathbb{R}$ donné par l'image de f. Comme X est compact et f continue, l'espace Y est compact par le théorème II.11. Nous affirmons qu'il existe $M \in Y$ tel que $y \leq M$ pour tout $y \in Y$. Si tel n'était pas le cas, on aurait par l'absurde : pour tout $M \in Y$, il existe $y \in Y$ tel que $M < y$. Ainsi, la famille $\{(-\infty, y)\}_{y \in Y}$ serait un recouvrement ouvert de Y compact, d'où $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tels que $Y \subset \bigcup_{i=1}^m (-\infty, y_i)$. Mais l'élément $y_{i_0} = \max\{y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}\}$ de Y n'appartient pas $\bigcup_{i=1}^m (-\infty, y_i) = (-\infty, y_{i_0})$, ce qui contredit l'inclusion ci-dessus. En conclusion, il existe bien $M \in Y = f(X)$ tel que $y \leq M$ pour tout $y \in Y$; il existe donc $x_{\max} \in X$ tel que $M = f(x_{\max})$, qui satisfait $f(x) \leq f(x_{\max})$ pour tout $x \in X$. L'existence de $x_{\min}$ se prouve de manière analogue, ou en appliquant le résultat ci-dessus à la fonction $-f$. □

Notons que cet énoncé aurait pu être démontré à la section précédente. En revanche, c'est uniquement grâce au théorème II.15 que nous pouvons affirmer qu'il s'agit bien d'une généralisation du théorème des bornes atteintes vu en ANALYSE I, qui correspond au cas $X = [a, b]$. C'est la raison pour laquelle nous ne le donnons que maintenant.

Ce même théorème II.15 nous permet également de caractériser les sous-ensembles compacts de l'espace $\mathbb{R}^n$, comme suit.

Théorème II.17. *Un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné pour la métrique euclidienne.*

Démonstration. Supposons d'abord $A \subset \mathbb{R}^n$ compact. Comme $\mathbb{R}^n$ est séparé, la proposition II.10 implique que A est fermé dans $\mathbb{R}^n$. Considérons le recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^n$ donné par les boules (euclidiennes) ouvertes centrées en l'origine : $\mathscr{U} = \{B(0, r) \mid r > 0\}$. Comme A est compact et $A \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{r>0} B(0, r)$, il existe $r_1, \ldots, r_m > 0$ tels que $A \subset B(0, r_1) \cup \ldots B(0, r_m)$. On a donc $A \subset B(0, R)$, avec $R = \max\{r_1, \ldots, r_m\}$, d'où A borné.

Réciproquement, supposons $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné pour la distance euclidienne. Alors, il existe $R > 0$ tel que $A \subset B(0, R) \subset [-R, R]^n$. Par le théorème II.15, $[-R, R]$ est compact, ce qui implique que $[-R, R]^n$ est compact par le théorème II.13. Ainsi, A est fermé dans $[-R, R]^n$ compact, et donc compact par la proposition I.9. □

Remarques.

1. Plus généralement, si (X, d) est un espace métrique et $A \subset X$ est compact, alors A est fermé dans $(X, \mathscr{T}_d)$ et borné pour la distance d : la preuve ci-dessus s'étend *verbatim*.
2. Cet énoncé est aussi valable pour toute métrique d sur $\mathbb{R}^n$ équivalente à la métrique euclidienne : dans ce cas, A est borné pour d si et seulement A est borné pour la métrique euclidienne. Par exemple, l'énoncé demeure vrai si l'on remplace la métrique euclidienne par d_p pour n'importe quel $p \in [1, \infty]$.
3. En revanche, la réciproque est fausse en général, et ce même sur l'espace topologique $\mathbb{R}^n$! Par exemple, la métrique $\overline{d_2} = \frac{d_2}{1+d_2}$ est bornée et induit la topologie standard sur $\mathbb{R}^n$, on l'a vu. Ainsi, $A = \mathbb{R}^n$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$, et borné respectivement à $\overline{d_2}$. Mais $\mathbb{R}^n$ n'est bien-sûr pas compact.

4. Le théorème II.15 implique que les intervalles de la forme $[a,b]$ et ceux de la forme (a,b), $(a,b]$ ou $[a,b)$ ne sont jamais homéomorphes, puisque les premiers sont compacts et pas les seconds. Cela peut également se démontrer à l'aide de la notion de connexité, comme on l'a vu en exercices. Le théorème II.17, lui, implique des résultats qui nous étaient inaccessibles auparavant. Par exemple, la boule (euclidienne) ouverte $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à la boule fermée $\overline{B(0,1)}$, puisque la seconde est compacte mais pas la première.

Les théorèmes II.16 et II.17 impliquent immédiatement le résultat suivant, dont il est difficile de surestimer l'utilité :

Toute application continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ avec $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné admet un maximum et un minimum.

Nous allons maintenant nous concentrer sur les *espaces métriques compacts*. Commençons par un peu de terminologie.

Soit (X,d) un espace métrique, et soit $A \subset X$ non-vide. Pour $x \in X$, la *distance de x à A* est définie par

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}\,.$$

On vérifiera en exercices que l'application $X \to [0,\infty)$ donnée par $x \mapsto d(x,A)$ est continue. Finalement, on définit le *diamètre* d'un sous-ensemble borné $B \subset X$ par

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x,x') \mid x,x' \in B\}\,.$$

Notons que le diamètre est bien évidemment une notion métrique, et pas topologique.

Voici l'un des résultats les plus utiles sur les espaces métriques compacts. Malgré son importance, il porte traditionnellement le nom de *lemme du nombre de Lebesgue*.

Lemme II.18. *Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique (X,d). Si X est compact, alors il existe un $\delta > 0$ tel que tout sous-ensemble de X de diamètre inférieur à δ est contenu dans l'un des ouverts de $\mathscr{U}$.*

Avant d'en donner la preuve, notons que résultat est faux en général si l'espace métrique (X,d) n'est pas compact. En effet, considérons par exemple la famille $\mathscr{U} = \{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}) \mid n = 1,2,\dots\}$ d'ouverts de l'espace $(0,1)$ muni de la métrique standard. Cette famille forme clairement un recouvrement ouvert de $(0,1)$; néanmoins, pour tout $\delta > 0$, le sous-ensemble $B = (0,\delta/2)$ est de diamètre $\delta/2 < \delta$ mais n'est contenu dans aucun ouvert de $\mathscr{U}$.

Démonstration du lemme II.18. Soit donc $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique (X,d). S'il existe un $i \in I$ avec $U_i = X$, alors le lemme est trivial ; on peut donc supposer que $U_i \neq X$ pour tout $i \in I$. Comme X est compact, il existe $i_1, \dots, i_m \in I$ avec $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$. Pour $j = 1, \dots, m$, notons A_j le fermé non-vide $X \smallsetminus U_{i_j}$, et considérons la fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d(x, A_j)\,.$$

Comme les applications $x \mapsto d(x, A_j)$ sont continues, il en va de même pour f.

Nous allons maintenant montrer que f ne prend que des valeurs strictement positives. En effet, pour tout $x \in X$, il existe j tel que $x \in U_{i_j}$ puisque ces ensembles recouvrent X ; comme U_{i_j} est un ouvert contenant x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_j} = X \smallsetminus A_j$. Ainsi, on a $d(x, a) > \varepsilon$ pour tout $a \in A_j$, d'où $d(x, A_j) \geq \varepsilon$, et $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{m} > 0$.

On a donc $f\colon X \to (0, \infty)$ continue avec X compact. Par le théorème des bornes atteintes, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq \delta$ pour tout $x \in X$. Il reste à montrer que ce δ satisfait la conclusion du lemme. Soit donc $B \subset X$ avec $\operatorname{diam}(B) < \delta$. Fixons un $x_0 \in B$ quelconque. Par definition du diamètre, on a l'inclusion $B \subset B(x_0, \delta)$. De plus, on a les inégalités

$$\delta \leq f(x_0) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d(x_0, A_j) \leq \max_{j=1,\dots,m}\{d(x_0, A_j)\} =: d(x_0, A_{j_0})\,.$$

Cette inégalité implique l'inclusion $B(x_0, \delta) \subset X \smallsetminus A_{j_0}$; en effet, si x est élément de $B(x_0, \delta)$, alors $d(x_0, x) < \delta \leq d(x_0, A_{j_0}) = \inf\{d(x_0, a) \mid a \in A_{j_0}\}$, ce qui implique que x n'est pas élément de A_{j_0}. Ainsi, on a les inclusions $B \subset B(x_0, \delta) \subset X \smallsetminus A_{j_0} = U_{i_{j_0}}$, ce qui termine la démonstration. □

Ce lemme de Lebesgue a de nombreuses applications, comme vous le verrez sûrement au cours de vos études. Nous allons en donner une ici, qui nécessite un peu de terminologie.

Une application f d'un espace métrique (X, d_X) dans un espace métrique (Y, d_Y) est dite **uniformément continue** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in X$, on a $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Remarques.

1. Cette notion est la généralisation naturelle aux espaces métriques de la notion vue en ANALYSE I dans le cas $X = Y = \mathbb{R}$. Il ne s'agit *pas* d'une notion topologique, mais d'une notion métrique, qui dépend des métriques d_X et d_Y choisies. Par ailleurs, il n'y a pas de notion analogue pour des espaces topologiques quelconques (non-métriques).
2. Il est important de bien noter la différence entre la continuité de f et sa continuité uniforme. Dans le premier cas, on a

   $$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x' \in X,\ d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon\,,$$

   alors que dans le second,

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, x' \in X,\ d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon\,.$$

Le point crucial ici est l'échange des quantificateurs $\forall x$ et $\exists \delta$. Dans le premier cas, le δ peut dépendre du x alors que dans le second il n'en dépend pas, il est uniforme, d'où la terminologie. Ainsi, une fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque n'est pas toujours vraie, comme vous l'avez vu en ANALYSE I.

Voilà l'application promise du lemme de Lebesgue.

Théorème II.19. *Si $f: X \to Y$ est une application continue avec X métrique compact et Y métrique, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. La famille $\{B_{d_Y}(y, \varepsilon/2)\}_{y \in Y}$ forme un recouvrement ouvert de Y, et comme f est continue, $\mathscr{U} = \{f^{-1}(B_{d_Y}(y, \varepsilon/2))\}_{y \in Y}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est un espace métrique compact, le lemme II.18 nous garantit l'existence d'un $\delta > 0$ tel que tout sous-ensemble de X de diamètre inférieur à δ est entièrement contenu dans un des ouverts de $\mathscr{U}$. En particulier, pour tous $x, x' \in X$ avec $d_X(x, x') < \delta$, le sous-ensemble $\{x, x'\} \subset X$ est de diamètre inférieur à δ. Par conséquent, il existe $y \in Y$ tel que $\{x, x'\} \subset f^{-1}(B_{d_Y}(y, \varepsilon/2)$; cela signifie que $f(x)$ et $f(x')$ sont des éléments de $B_{d_Y}(y, \varepsilon/2)$, d'où

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), y) + d_Y(y, f(x')) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

par l'inégalité du triangle. Cela termine la démonstration. □

II.5 Espaces séquentiellement compacts

Nous allons terminer ce chapitre sur la compacité par une discussion d'une notion liée : celle de *compacité séquentielle*.

Commençons par un peu de terminologie. Si (x_n) est une suite dans un ensemble X et $n_1 < n_2 < \ldots$ est une suite croissante d'entiers positifs, la suite (y_i) définie par $y_i = x_{n_i}$ est appelée une *sous-suite de* (x_n).

Définition. Un espace topologique X est dit **séquentiellement compact** si toute suite dans X admet une sous-suite convergente.

Notons qu'il s'agit clairement d'une propriété topologique : si X et Y sont deux espaces homéomorphes, alors X est séquentiellement compact si et seulement si Y l'est. Des propriétés de la compacité séquentielle se trouvent en exercices. Voici quelques exemples.

Exemples d'espaces séquentiellement compacts.

1. Un ensemble muni de la topologie triviale est toujours séquentiellement compact, puisque toute suite converge. (Rappelons qu'il est aussi toujours compact.)
2. Tout ensemble fini X est séquentiellement compact (et compact). En effet, toute suite dans un ensemble fini admet une sous-suite stationnaire, qui est convergente quelle que soit la topologie sur X.

3. Un ensemble X muni de la topologie discrète est séquentiellement compact si et seulement s'il est fini (et donc, si et seulement s'il est compact).

   En effet, si X est fini alors il est séquentiellement compact par le point précédent. Réciproquement, si X est discret infini, il existe une suite dont tous les éléments sont distincts ; une telle suite n'admet pas de sous-suite stationnaire, et donc pas de sous-suite convergente dans X.
4. La droite réelle n'est pas séquentiellement compacte, car la suite $x_n = n$ (par exemple) n'admet pas de sous-suite convergente. (Rappelons que $\mathbb{R}$ n'est pas compact.)
5. Les intervalles fermés et bornés $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sont séquentiellement compacts : c'est le *théorème de Bolzano-Weierstraß* vu en ANALYSE I. (Rappelons que, comme on l'a démontré, $[a, b]$ est aussi compact.)

Dans tous les exemples ci-dessus, un espace est séquentiellement compact si et seulement s'il est compact. Cela amène naturellement à la question suivante.

Question. Pour quelle classe d'espaces a-t-on que X est compact si et seulement si X est séquentiellement compact ?

Un élément de réponse est qu'en général, aucune des implications n'est vraie ! Voici des exemples.

Exemples.

1. L'espace $[0, 1]^{[0,1]}$ est compact par le théorème de Tychonoff, puisque c'est un produit d'espaces compacts. En revanche, on peut montrer que cet espace n'est pas séquentiellement compact.
2. La *longue droite* est l'espace obtenu en mettant bout à bout un nombre non-dénombrable de copies de l'intervalle semi-ouvert $[0, 1)$. Il s'agit d'un espace séquentiellement compact, mais pas compact. La démonstration de ce fait demande un mimimum de connaissances des *ordinaux* ; nous n'en verrons donc pas les détails ici.

Néanmoins, voici une réponse positive à la question ci-dessus.

Théorème II.20. *Soit X un espace topologique.*

(i) Si X est à base dénombrable de voisinages et compact, alors X est séquentiellement compact.

(ii) Si X est un espace métrique séquentiellement compact, alors X est compact.

Remarques.

1. Ce théorème montre en particulier que si X est un espace métrisable, alors X est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact. En particulier, un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est séquentiellement compact si et seulement s'il est fermé et borné pour la métrique euclidienne.

2. On peut aussi démontrer que si un espace X admet une base dénombrable (on parle d'*espace à base dénombrable*), alors X est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact. C'est un exercice.
3. Comme les exemples ci-dessus sont des contre-exemples à l'équivalence de ces deux notions, il s'ensuit que $[0,1]^{[0,1]}$ n'est pas à base dénombrable de voisinages, et que la longue droite n'est pas métrisable, ni à base dénombrable.

Preuve du théorème II.20. Supposons donc X à base dénombrable de voisinages et compact, et soit (x_n) une suite quelconque dans X. Il s'agit de montrer que cette suite admet une sous-suite convergente. Notons tout d'abord que (x_n) admet un *point d'accumulation*, c'est-à-dire, un élément $y \in X$ tel que tout ouvert $U \subset X$ contenant y contient un nombre infini de termes de la suite (x_n). En effet, si tel n'était pas le cas, tout $y \in X$ admettrait un voisinage ouvert U_y avec $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_y\}$ fini. Comme $\{U_y\}_{y\in X}$ forme un recouvrement ouvert de X compact, il existe $y_1, \dots, y_m \in X$ avec $X = U_{y_1} \cup \dots U_{y_m}$. Mais comme chacun de ces U_{y_i} ne contient qu'un nombre fini des x_n, cette suite ne contiendrait qu'un nombre fini de termes, une contradiction.[6]

Il nous reste à démontrer que si y est un point d'accumulation de (x_n), alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers y. Pour ce faire, considérons une base dénombrable décroissante $\{B_i\}$ de voisinages ouverts de y, qui existe par le lemme I.12. Comme y est un point d'accumulation de (x_n), chaque B_i contient un nombre infini de termes de cette suite. Ainsi, on peut choisir $n_1 < n_2 < \ldots$ avec $x_{n_i} \in B_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots$. Par le lemme I.12, cette sous-suite converge vers $y \in X$, ce qui termine la preuve du premier point.

La preuve du second point est moins évidente.[7] Supposons que (X, d) est un espace métrique non-compact, et tentons de trouver une suite dans X sans sous-suite convergente. Par hypothèse, il existe un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ sans sous-recouvrement fini. Pour tout $x \in X$, de deux choses l'une : soit il existe un indice $i(x) \in I$ tel que $B(x,1) \subset U_{i(x)}$ (premier cas), soit la boule $B(x,1)$ n'est contenue dans aucun U_i ; dans ce second cas, choisissons $0 < r(x) < 1$ et $i(x) \in I$ tels que $B(x, r(x)) \subset U_{i(x)}$ mais $B(x, 2r(x))$ n'est contenue dans aucun U_i. (C'est possible car $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X.) Ainsi, nous avons défini pour chaque $x \in X$ un indice $i(x) \in I$. Comme $\{U_i\}_{i\in I}$ n'admet pas de sous-recouvrement fini, on peut définir une suite (y_k) dans X avec $y_k \notin U_{i(y_1)} \cup \dots \cup U_{i(y_{k-1})}$ pour tout $k \geq 1$. Soit $x_n = y_{k_n}$ une sous-suite quelconque. Par construction, on a $x_n \notin U_{i(x_1)} \cup \dots \cup U_{i(x_{n-1})}$ pour tout $n \geq 1$; il nous reste à voir que cette condition implique que (x_n) ne converge pas.

Supposons par l'absurde que cette suite (x_n) converge vers une limite $x \in X$. Soit n fixé. Par la condition énoncée ci-dessus, on a $x_m \notin U_{i(x_n)}$ pour tout $m > n$. Dans le premier cas, on a $B(x_n, 1) \subset U_{i(x_n)}$, d'où $x_m \notin B(x_n, 1)$, i.e. $d(x_n, x_m) > 1$ pour tout $m > n$. Comme (x_n) est une suite convergente, cela ne peut se passer que pour un nombre fini de $n \geq 1$. Quitte à supprimer un nombre fini d'éléments

6. Notons que cet argument n'utilise pas l'hypothèse de dénombrabilité. Ainsi, on vient de montrer que dans un espace compact, toute suite admet un point d'accumulation.

7. Cette démonstration ne fait pas partie du champ de l'examen.

de cette suite, on peut donc supposer que pour tout $n \geq 1$, x_n est dans la seconde classe ; en d'autres termes, on a $0 < r(x_n) < 1$ tel que $B(x_n, r(x_n)) \subset U_{i(x_n)}$ mais $B(x_n, 2r(x_n))$ n'est contenue dans aucun U_i. Comme $x_m \notin U_{i(x_n)}$ pour tout $m > n$, on a donc $d(x_m, x_n) \geq r(x_n)$, ce qui implique que $B(x_n, 2d(x_m, x_n))$ n'est contenue dans aucun U_i.

Comme $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X qui contient la limite x de (x_n), il existe $i \in I$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset U_i$. Comme $x_n \to x$, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < r/5$. Alors, pour tous $n, m \geq N$, on a l'inclusion $B(x_n, 2d(x_m, x_n)) \subset U_i$, ce qui contredit l'énoncé ci-dessus. En effet, pour $y \in B(x_n, 2d(x_m, x_n))$, on a

$$d(y, x_n) < 2d(x_m, x_n) \leq 2(d(x_m, x) + d(x, x_n)) < 2(r/5 + r/5) = 4r/5\,,$$

d'où $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < r/5 + 4r/5 = r$, i.e. $y \in B(x, r) \subset U_i$. Cela démontre l'inclusion de $B(x_n, 2d(x_m, x_n))$ dans U_i, et termine la démonstration.

□

Discussion

À ce stade, nous avons à peu près couvert ce que tout cours d'introduction à la topologie générale digne de ce nom doit couvrir. Pour les quelques semaines qui restent, les possibilités les plus naturelles sont les suivantes.

1. Une étude des questions de métrisabilité d'espaces topologiques au moyen des axiomes de séparation et de dénombrabilité. C'est la suite logique dans la ligne de la *topologie générale*.
2. Une étude spécifique des espaces de fonctions. C'est le début de ce qu'on appelle l'*analyse fonctionnelle*.
3. Bifurquer vers la construction d'invariants algébriques associés aux espaces topologiques. C'est le sujet de la *topologie algébrique*.
4. Donner la classification des surfaces, qui constitue le premier chapitre de la *topologie géométrique*.

Pour être traitée convenablement, une introduction à un de ces chapitres nécessiterait au moins un mois. Comme nous n'avons pas autant de temps à disposition, il s'agit de faire un choix, qui dépend des buts à atteindre.

La première option s'inscrirait naturellement dans notre cours : nous avons déjà vu un axiome de séparation (être un espace *séparé*) et un axiome de dénombrabilité (être un espace *à base dénombrable de voisinages*), et nous avons montré que si un espace est métrisable, alors il satisfait ces deux propriétés. Il s'agit ensuite de renforcer ces axiomes pour obtenir des conditions suffisantes pour qu'un espace soit métrisable (*théorème de métrisabilité d'Urysohn*), puis de raffiner ces conditions pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes (*théorème de métrisabilité de Smirnov*). Pour des raisons de manque de temps et d'utilité incertaine de ces résultats dans la suite de vos études, nous n'allons pas traiter de ces questions. Pour les personnes intéressées, les chapitres 4 et 6 de Munkres traitent de ce sujet de manière très complète.

Le choix de la seconde option se défend lui aussi. Nous avons déjà vu deux topologies sur l'ensemble Y^X des applications $X \to Y$: la *topologie produit*, qui comme on l'a vu, correspond à la topologie de la convergence simple, et la *topologie des boîtes*. Le problème est que pour ces topologies, l'espace Y^X est rarement métrisable, même si Y l'est. Pour cette raison, entre autres, il est utile de considérer d'autres topologies sur cet espace, comme la *topologie uniforme* si Y est un espace métrique, et la *topologie compact-ouverte* si X et Y sont des espaces topologiques. Dans le même ordre d'idées, il est intéressant d'étudier les suites de Cauchy dans les espaces métriques. Cela mène naturellement à la notion de *complétion d'un espace métrique*, qui généralise la construction des nombres réels à partir des nombres rationnels. Comme ces questions seront traitées, au moins en partie, en ANALYSE FONCTIONNELLE, nous n'allons pas les étudier dans ce cours, mais renvoyer les lecteurs intéressés au chapitre 7 de Munkres.

Une introduction à la topologie algébrique serait tout à fait possible à ce stade, mais c'est l'objet du cours du même nom en troisième année, où sont expliquées les notions de *groupe fondamental* et de *revêtement*. Des cours avancés sont aussi régulièrement donnés dans notre section sur les théories de *l'homologie*, de la *cohomologie* et de *l'homotopie*, qui forment l'essentiel de la topologie algébrique. Pour ces raisons, il serait prématuré de traiter de ces questions dans un cours de deuxième année.

Notre choix portera donc sur la dernière option, celle de la classification des surfaces. La raison prinicipale est que ce résultat sera utilisé au cours de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, en particulier dans le cadre du *théorème de Gauß-Bonnet*. Il faut aussi préciser que ce chapitre supplémentaire jettera les bases de la topologie géométrique, un type de topologie beaucoup plus visuelle et intuitive que la topologie générale, qui est utile à la compréhension de bien des cours avancés : SURFACES DE RIEMANN, THÉORIE DES NOEUDS, TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE,...

Chapitre III: Classification des surfaces

Comme son nom l'indique, le but de ce chapitre est d'énoncer et de démontrer le théorème de classification des surfaces. La preuve complète, dans le degré de précision et de formalisme des chapitres précédents, prendrait bien trop de temps. Nous allons ainsi changer légèrement de ton et adopter dorénavant une approche plus intuitive mais moins précise, dans le but de communiquer un maximum des idées de cette démonstration, mais en laissant de côté les détails techniques. Tous ces détails peuvent se trouver dans la littérature, par exemple dans le chapitre 12 de Munkres.

Ce chapitre III est divisé en quatre sections. Dans la première, nous introduisons la notion la plus importante de toute la topologie géométrique : celle de *variété*. Dès la section III.2, nous nous restreignons aux variétés de dimensions 2, c'est-à-dire aux surfaces, nous montrons comment en construire plusieurs familles infinies, et nous énonçons le théorème de classification. La section III.3 contient une discussion d'un résultat technique mais nécessaire : le fait que toute surface admet une *triangulation*. Finalement, la section III.4 contient les idées principales de la preuve du théorème de classification.

III.1 La notion de variété

Les *variétés* forment sans aucun doute la classe d'espaces topologiques la plus importante et la plus étudiée en géométrie, en physique mathématique, et autres. En voici la définition.

Définition. Une **variété de dimension m** est un espace topologique X séparé, à base dénombrable, et tel que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Une variété de dimension 1 est appelée une **courbe**, et une variété de dimension 2 est appelée une **surface**.

Cette définition appelle quelques remarques.

Remarques.

1. Les conditions de séparation et de dénombrabilité sont de nature technique, afin d'éviter certains espaces pathologiques. Par exemple, la *droite à deux origines* est définie comme le quotient $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}/\sim$ avec $(x,0) \sim (x,1)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; cet espace satisfait les axiomes d'une courbe, sauf

celui de séparation. De même, on souhaite éviter les espaces tels la *longue droite*, déjà mentionnée en page 55, qui satisfait les axiomes d'une courbe, sauf celui d'être à base dénombrable.

En fait, une étude plus approfondie des problèmes de métrisabilité (un des chapitres que nous n'aurons pas le temps de traiter) montre que dans le contexte des variétés, ces deux conditions sont équivalentes à la métrisabilité. Ainsi, dans tout ce chapitre, et plus généralement, en topologie géométrique, tous les espaces étudiés sont métrisables.

2. La véritable condition à retenir est la dernière, qui peut s'énoncer comme suit : X est *localement homéomorphe* à $\mathbb{R}^m$.

   Notons que pour voir que la dimension d'une variété est bien définie, il faut vérifier que si un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$, alors n et m coïncident. Ce résultat est vrai, mais nécessite des outils de topologie algébrique, tels l'homologie. Nous n'en verrons donc pas la preuve ici.
3. L'importance de ces espaces vient surtout du fait qu'il est possible [1] d'y faire du calcul différentiel et intégral : c'est le sujet de la *topologie différentielle* que vous étudierez au cours de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

Donnons à présent quelques exemples.

Exemples de variétés.

1. Tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est une variété de dimension m. En particulier, $\mathbb{R}$ est une courbe et $\mathbb{R}^2$ est une surface (connexes, non-compactes).
2. Le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ est une courbe (connexe, compacte). En effet, S^1 est un sous-espace de l'espace métrique $\mathbb{R}^2$, il est donc métrisable. Par ailleurs, l'application exponentielle $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1$ fournit un homéomorphisme local ; cela découle des arguments donnés en exemple 2, page 28.

Avant de continuer cette liste d'exemples, nous sommes déjà en mesure d'énoncer le théorème de classification des courbes, qui n'est pas très difficile, mais dont nous ne donnerons pas la preuve.

Théorème III.1 (Classification des courbes)**.** *Toute courbe connexe est homéomorphe à la droite réelle $\mathbb{R}$ ou au cercle S^1.*

Notons que ces deux espaces ne sont pas homéomorphes, puisque S^1 est compact et $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Ainsi, il existe à homéomorphisme près exactement deux courbes connexes : la droite et le cercle. Cela permet de classifier toutes les courbes (pas forcément connexes), en appliquant le résultat ci-dessus à chaque composante connexe.

Ce type de théorème est le *Saint-Graal* de la topologie : la classification complète de certains espaces topologiques à homéomorphisme près. Un tel théorème est aussi connu pour les surfaces, qu'elles soient compactes ou non. Dans ce

1. En fait pas toujours, puisque Michel Kervaire – un ancien membre de cette section – a montré en 1960 que certaines variétés topologiques (de dimension 10) n'admettent pas de structure différentiable. Depuis, on a construit des exemples de telles variétés en toutes dimensions $m \geq 4$.

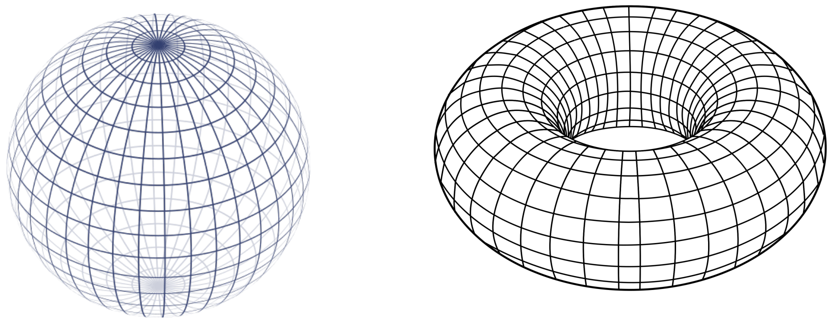


FIGURE III.1 – La sphère et le tore.

chapitre, on se retreindra aux surfaces compactes. Notons encore que la classification des variétés compactes (orientables) de dimension 3 n'a été achevée qu'entre 2003 et 2008. Quant à la classification des variétés (compactes, orientables) de dimension 4, malgré plusieurs résultats remarquables, elle est et restera à jamais totalement hors de portée.

Continuons notre liste d'exemples de variétés.

3. La sphère $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$ est une variété connexe, compacte de dimension m (exercice).
4. Si X (resp. Y) est une variété de dimension m (resp. n), alors $X \times Y$ est une variété de dimension $m + n$. C'est aussi un exercice. En particulier, le *tore* $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$, déjà rencontré en exemple 4 page 29, est une surface (connexe, compacte).

Ainsi, la sphère S^2 et le tore $\mathbb{T}$ sont deux surfaces connexes, compactes, illustrées en figure III.1. Sont-elles homéomorphes ? Tout ce que l'on peut dire pour le moment, c'est qu'aucun des outils développés dans ce cours ne permet de l'exclure... On y reviendra.

Encore quelques exemples.

5. Le disque fermé $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ n'est pas une surface, mais ce que l'on appelle une *surface-à-bord*. En effet, certains points de D^2 (ceux du bord) n'admettent pas de voisinage homéomorphe à (un ouvert de) $\mathbb{R}^2$, mais un voisinage homéomorphe au demi-plan fermé $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$.
6. Considérons le carré $[0,1] \times (-1,1)$ muni de la relation d'équivalence suivante : $(0,y) \sim (1,-y)$ pour tout $y \in (-1,1)$. L'espace quotient est une surface (connexe, non-compacte), qui est dite *non-orientable*. (On y reviendra.) Elle est appelée le *ruban de Möbius* et est illustrée au côté gauche de la figure III.2.
7. Considérons le carré $[-1,1] \times [-1,1]$ muni de la relation d'équivalence suivante : $(x,1) \sim (x,-1)$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $(1,y) \sim (-1,-y)$ pour

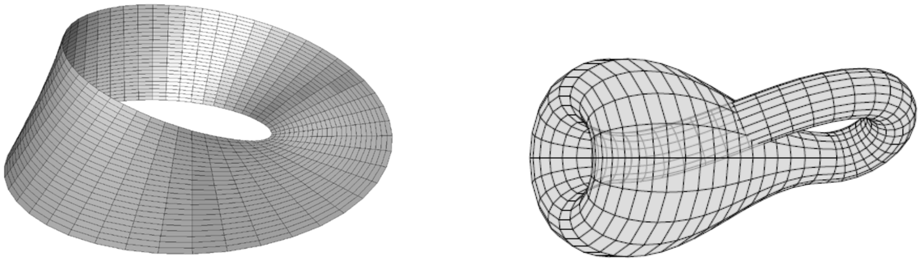


FIGURE III.2 – Le ruban de Möbius et la bouteille de Klein.

tout $y \in [-1,1]$. L'espace quotient est une surface (connexe, compacte, non-orientable), appelée la *bouteille de Klein*. À la différence des surfaces précédentes, celle-ci ne se plonge pas dans l'espace à trois dimensions. [2] Pour cette raison, elle est plus difficile à se représenter. Une telle représentation est donnée en figure III.2.

On peut maintenant énoncer de manière plus précise le but de ce chapitre : il s'agit de donner la classification des surfaces connexes compactes, à homéomorphisme près.

III.2 Construction de surfaces et énoncé du théorème

Le but de cette section est de construire plusieurs surfaces (en fait, toutes) comme des quotients de polygones via "recollement de côtés".

Nous avons déjà vu quelques exemples de cette construction. En page 29, nous avions considéré le carré $X = [0,1] \times [0,1]$ muni de la relation d'équivalence suivante : $(x,y) \sim (x',y')$ si $(x,y) = (x',y')$, $x = x'$ et $\{y,y'\} = \{0,1\}$ ou $\{x,x'\} = \{0,1\}$ et $y = y'$. De manière plus concise, on a identifié les points $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$ pour tous $x,y \in [0,1]$. Nous avions démontré que l'espace quotient correspondant n'est autre que le tore $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$. De manière moins formelle mais plus intuitive, on doit comprendre la projection $\pi : X \to X/\sim$ comme le recollement des paires de côtés opposés du carré X ; un premier recollement donne un cylindre, et le second donne le tore. Ce processus est illustré en figure III.3.

Une manière naturelle de se donner cette relation d'équivalence sur le carré est d'assigner une lettre et une flèche à chaque côté du carré, avec la convention suivante : deux côtés avec la même lettre doivent être recollés, et ce recollement doit se faire de manière à préserver le sens des flèches. De manière encore plus économique, on peut simplement associer à chaque côté sa lettre (disons, a) si ce côté est orienté dans le sens trigonométrique, et la lettre a^{-1} dans le cas contraire.

Plus généralement, si l'on muni un polygone P à $2n$ côtés d'un mot de $2n$ lettres, cela détermine de manière unique un espace quotient, obtenu en recollant

2. Une application $f : X \to Y$ est un *plongement* si l'application $X \to f(X)$ obtenue via f en restreignant l'espace d'arrivée est un homéomorphisme. On peut démontrer que pour X la bouteille de Klein, il n'existe pas de plongement $X \to \mathbb{R}^3$.

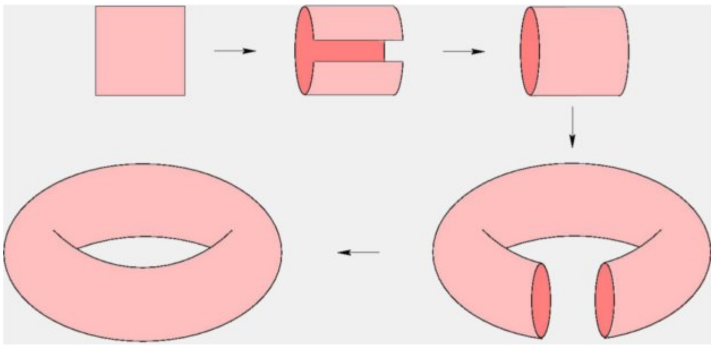


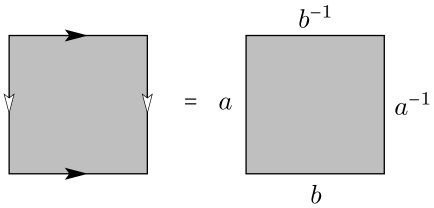
FIGURE III.3 – Construction du tore en recollant les bords opposés d'un carré.

les côtés de P selon la règle décrite ci-dessus. Cet espace quotient ne sera pas toujours une surface ; en fait, on montre facilement que c'est une surface (compacte) si chaque lettre apparaît exactement deux fois dans le mot.

Voyons quelques exemples.

Exemples de surfaces obtenues à partir de polygones marqués.

1. Le carré muni du mot $aba^{-1}b^{-1}$ n'est autre que le tore $\mathbb{T}$. Cela se comprend à l'aide de la figure III.3 et de l'illustration ci-dessous.



2. Le carré muni du mot $abab^{-1}$ décrit la bouteille de Klein : c'est exactement l'exemple 7 ci-dessus.
3. L'espace obtenu via le carré muni du mot $aa^{-1}bb^{-1}$ est simplement la sphère S^2. (Imaginer une *empanada*.)
4. L'espace obtenu via le carré muni du mot $abab$ est homéomorphe au quotient $D^2/\sim$, où chaque point $x \in \partial D^2$ est identifié à son antipode $-x$. Comme vous le verrez en exercice, il s'agit de l'espace projectif réel de dimension 2, aussi appelé *plan projectif* et noté $\mathbb{R}P^2$.
5. Considérons à présent un octogone muni du mot $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$. Il est possible mais relativement difficile de comprendre quelle est la surface correspondante en tentant directement de recoller ces côtés par paires. Une meilleure idée est de commencer par découper cet octogone en deux ; on obtient alors deux pentagones avec mots $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}c$ et $c^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$, qui doivent encore être recollés le long de leur côté marqué par la lettre c. En effectuant les recollements dans chacun de ces pentagones, on obtient deux tores avec une composante de bord, qui doivent être recollés le long de leur bord. La surface ainsi obtenue est appelée le *tore à* 2 *trous*. Elle est illustrée en figure III.4.

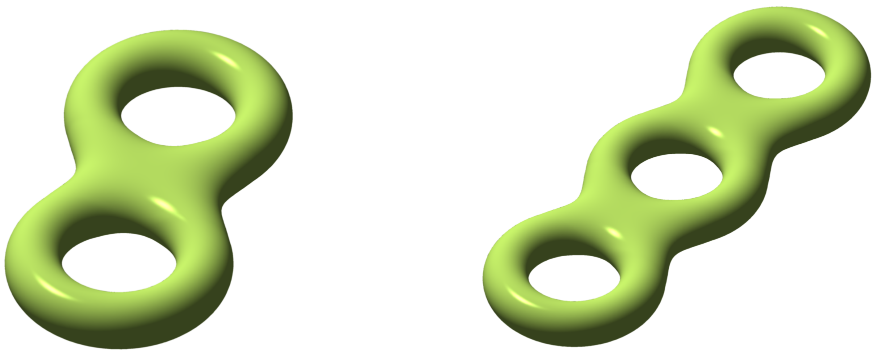


FIGURE III.4 – Le tore à deux trous et le tore à trois trous.

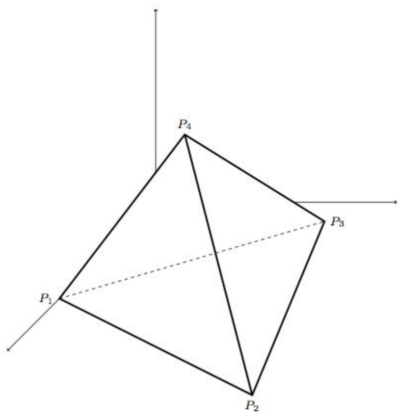
6. Cette construction peut être généralisée de la façon suivante : pour tout entier $g \geq 1$, le $4g$-gone muni du mot $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ donne une surface connexe compacte appelée le *tore à g trous* ou la **surface orientable de genre g**, notée Σ_g. (Par convention, la sphère S^2 est la surface orientable de genre 0. Notez que $\Sigma_1 = \mathbb{T}$ par l'exemple 1.) Par le même argument que dans le cas $g = 2$ décrit en exemple 5, la surface de genre g s'obtient en recollant une surface de genre $g-1$ et un tore le long d'une composante de bord : on parle de la *somme connexe* de Σ_{g-1} et $\mathbb{T}$, notée $\Sigma_g = \Sigma_{g-1} \# \mathbb{T}$. L'exemple de Σ_3 est illustré en figure III.4.
7. Considérons la carré muni du mot $aabb$. En découpant ce carré le long d'une diagonale, on comprend que l'espace quotient correspondant est la somme connexe de deux copies du plan projectif $\mathbb{R}P^2$. On verra en exercice que cette surface n'est autre que la bouteille de Klein.
8. Cette construction peut être généralisée de la façon suivante : pour tout entier $h \geq 2$, considérons le $2h$-gone muni du mot $a_1 a_1 \cdots a_h a_h$. L'espace correspondant est une surface connexe compacte, la somme connexe de h copies de $\mathbb{R}P^2$, qu'on appelle la **surface non-orientable de genre h**, notée N_h. (Par convention, le plan projectif est la surface non-orientable de genre 1. Notez que par l'exemple 7, N_2 n'est autre que la bouteille de Klein.)

En résumé, on a donc construit deux familles infinies de surfaces : les surfaces orientables de genre $g \geq 0$, et les surfaces non-orientables de genre $h \geq 1$,

$$\Sigma_g = \overbrace{\mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T}}^{g \geq 0}, \qquad N_h = \overbrace{\mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2}^{h \geq 1}.$$

On peut maintenant énoncer le théorème de classification.

Théorème III.2 (Classification des surfaces compactes)**.** *Toute surface compacte connexe est homéomorphe à une unique surface parmi* $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ *et* $N_1, N_2, \ldots$



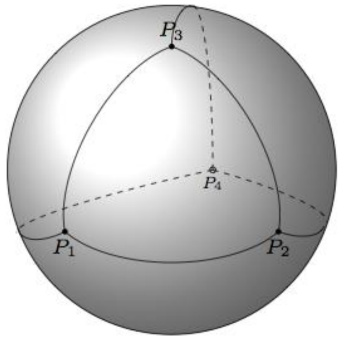


FIGURE III.5 – Le tétraèdre définit une triangulation de la sphère.

III.3 Toute surface est triangulable

La preuve du théorème de classification repose sur un énoncé technique que nous allons admettre sans démonstration. Son énoncé nécessite un peu de terminologie.

Soit X un espace compact séparé. Un *triangle dans* X est un sous-espace $A \subset X$ muni d'un homéomorphisme $h: T \to A$, où T est un triangle euclidien fermé dans le plan $\mathbb{R}^2$. L'image dans A d'un sommet de T est appelé un *sommet de* A, et l'image dans A d'un côté de T est appelé un *côté de* A. Une *triangulation de* X est une collection de triangles $A_1, \ldots, A_n$ dans X telle que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, et pour tous $i \neq j$, l'intersection de A_i et A_j est soit vide, soit un sommet de A_i et de A_j, soit un côté de A_i et de A_j. Si l'espace X admet une triangulation, alors on dit que X est *triangulable*.

Exemples de triangulations.

1. Une triangulation du disque D^2 peut être obtenue avec un unique triangle $A = D^2$, en choisissant pour $h: T \to D^2$ n'importe quel homéomorphisme entre le disque et le triangle T.
2. La surface d'un tétraèdre définit une triangulation de la sphère S^2 avec 4 triangles. Elle est illustrée en figure III.5. La surface d'un icosaèdre en définit une autre, avec 20 triangles.

Voici le résultat principal de cette section.

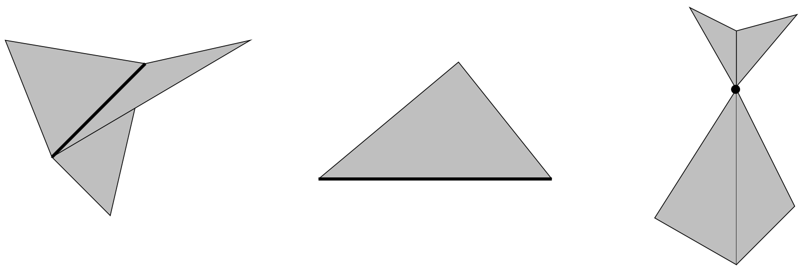
Théorème III.3. *Toute surface compacte est triangulable.*

Cet énoncé, bien que tout à fait vraisemblable et intuitif, ne se démontre pas facilement. Depuis la première preuve complète en 1925, des démonstrations courtes ont vu le jour. En tout état de cause, la preuve de ce résultat dépasse de beaucoup le cadre de ce cours. Nous l'admettrons donc, pour en déduire le corollaire suivant.

Corollaire III.4. *Toute surface compacte est homéomorphe à l'espace quotient obtenu à partir d'une collection finie de triangles fermés disjoints du plan en recollant leurs côtés deux à deux.*

Démonstration. Soit donc X une surface compacte. Par le théorème III.3, X admet une triangulation, d'où des homéomorphismes $h_i\colon T_i \to A_i \subset X$. En supposant les triangles T_i disjoints, cela définit une application $E := T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_n \xrightarrow{h} X$, application surjective puisque les triangles A_i recouvrent X. Comme E est compact et X séparé, h induit un homéomorphisme $E/\sim \to X$, où $x \sim x'$ si $h(x) = h(x')$ (voir remarque 3, page 48). Il reste à vérifier que cette relation d'équivalence correspond précisément à recoller les côtés deux à deux.

Par définition d'une triangulation, on peut en effet recoller les côtés des triangles deux par deux. Par ailleurs, rien ne nous empêche de recoller les côtés de plus de deux triangles ensemble, ou d'avoir un côté d'un triangle recollé à aucun autre côté. Nous pourrions aussi avoir des triangles recollés le long d'un sommet, mais recollés le long d'aucun des côtés adjacents. Ces trois situations sont illustrées ci-dessous.



Dans ces trois cas, on peut démontrer que les points marqués en gras sur la figure ci-dessus n'admettent pas de voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. (Le dernier cas se démontre facilement à l'aide de la connexité, mais les deux premiers cas requièrent des outils dont nous ne disposons pas dans ce cours.) Ainsi, les espaces obtenus de sont pas des surfaces. Comme nous avions supposé que X est une surface, la seule possibilité de recollement est celle décrite dans l'énoncé. Cela termine la démonstration. $\square$

Le résultat suivant est maintenant presque immédiat.

Corollaire III.5. *Toute surface compacte connexe est homéomomorphe à l'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone.*

Démonstration. Soit donc X une surface compacte connexe. Par le corollaire III.4, l'espace X est obtenu en recollant deux à deux les côtés d'une collection de triangles. Considérons donc ces triangles, et recollons les côtés deux à deux pour construire X, mais en ne recollant que les paires de côtés qui appartiennent à des composantes connexes différentes. Une fois que toutes les identifications de ce type ont été faites, nous nous retrouvons avec un certain nombre de polygones (disons, m), et avec toutes les identifications restantes entre des paires de côtés qui appartiennent au même polygone. Notons que l'espace quotient X aura m composantes connexes. Comme on a supposé X connexe, on a en fait $m = 1$, d'où le résultat : X est obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un unique polygone. $\square$

III.4 Preuve du théorème

Nous savons maintenant que toute surface compacte connexe s'obtient en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone, disons, à $2n$ côtés. Comme nous l'avons vu en section III.2, une manière pratique de se donner une telle identification est via un mot de $2n$ lettres, où chaque lettre apparaît exactement deux fois. On parle de *polygone marqué*. Plus généralement, on peut considérer des collections de polygones marqués, où chaque lettre apparaît exactement deux fois dans l'ensemble de tous les mots.

Bien entendu, deux collections de polygones marqués peuvent donner des surfaces homéomorphes. (Nous avons déjà vu ce phénomène en section III.2 : les mots $abab^{-1}$ et $aabb$ définissent tous deux la bouteille de Klein.) L'idée est maintenant de donner une liste d'opérations sur les collections de polygones marqués (ou collection de mots) qui ne modifient pas la surface sous-jacente. On pourra ensuite utiliser ces opérations pour tenter de ramener toutes les collections de mots à une certaine liste, qui correspondera donc à une liste complète de surfaces connexes compactes.

Voici cette liste d'opérations. Pour chacune d'entre elles, nous commençons par la décrire combinatoirement en termes des mots, puis nous expliquons son effet géométrique sur les collections de polygones correspondants.

(i) Remplacer un mot de la forme y_0y_1 par les mots y_0c^{-1} et cy_1, où la lettre c n'apparaît pas dans les mots y_0 et y_1 : cela correspond à *découper* un polygone marqué.

(ii) Remplacer deux mots de la forme y_0c^{-1} et cy_1 par le mot y_0y_1 : cela correspond à *recoller* deux polygones marqués le long d'un côté.

(iii) Remplacer chaque occurrence d'une lettre par une autre lettre (qui n'apparaît pas ailleurs) ; remplacer chaque occurrence d'une lettre par son inverse, et vice-versa. Cela correspond simplement à *renommer* certains côtés.

(iv) *Permuter* cycliquement des lettres d'un mot, i.e. remplacer un mot de la forme $a_1^{\varepsilon_1}\cdots a_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}a_n^{\varepsilon_n}$ par $a_n^{\varepsilon_n}a_1^{\varepsilon_1}\cdots a_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$. Cela revient à changer le sommet à partir duquel on commence à lire le mot le long du bord du polygone.

(v) Remplacer un mot de la forme $a_1^{\varepsilon_1}\cdots a_n^{\varepsilon_n}$ par son inverse formel $a_n^{-\varepsilon_n}\cdots a_1^{-\varepsilon_1}$. Cela correspond à *renverser* un polygone marqué.

(vi) Remplacer un mot de la forme $y_0aa^{-1}y_1$ par le mot y_0y_1. L'opération correspondante est d'*annuler* deux côtés adjacents en les recollants.

On dira que deux collections de polygones marqués sont *équivalentes* si elles peuvent être reliées par ces six opérations. Notons que dans ce cas, les deux surfaces ainsi construites sont homéomorphes.

Exemple de polygones marqués équivalents. Les mots $aba^{-1}b$ et $aabb$ sont équivalents via la suite d'opérations suivantes :

$$aba^{-1}b \overset{(i)}{\to} abc^{-1},\ ca^{-1}b \overset{(iv),(v)}{\to} c^{-1}ab,\ b^{-1}ac^{-1} \overset{(ii)}{\to} c^{-1}aac^{-1} \overset{(iv)}{\to} aac^{-1}c^{-1} \overset{(iii)}{\to} aabb\,.$$

Cela donne une preuve combinatoire du fait que ces deux mots présentent la même surface, un résultat déjà vu en exercices.

Il reste à démontrer l'énoncé suivant.

Proposition III.6. *Tout polygone marqué est équivalent à un des mots*

$$aa^{-1}bb^{-1},\ abab,\ a_1a_1\cdots a_ha_h\ (h \geq 2),\ a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\ (g \geq 1)\,.$$

Nous ne donnerons pas cette preuve non plus, mais il est à noter que cet énoncé et sa démonstration sont de nature purement combinatoire.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve du théorème de classification des surfaces.

Preuve du théorème III.3. Soit donc X une surface compacte connexe. Par le corollaire III.5, X est homéomomorphe à l'espace quotient obtenu en identifiant deux à deux les côtés d'un polygone ; en d'autres termes, X est donné par un polygone marqué. Par la proposition III.6, ce dernier est équivalent à un des mots

$$aa^{-1}bb^{-1},\ abab,\ a_1a_1\cdots a_ha_h\ (h \geq 2),\ a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\ (g \geq 1)\,.$$

Comme deux polygones marqués équivalents définissent les mêmes surfaces, X est homéomorphe à une des surfaces données par cette liste de mots. Par les exemples en section III.2, il s'agit des surfaces suivantes :

$$S^2,\ \mathbb{R}P^2,\ N_h\ (h \geq 2),\ \Sigma_g\ (g \geq 1)\,.$$

Par convention, cela correspond aux surfaces Σ_g pour $g \geq 0$ et N_h pour $h \geq 1$, ce qui est précisément la liste de surfaces du théorème III.3. $\square$

La preuve est-elle vraiment terminée ? Non, puisqu'il reste encore à montrer que deux surfaces dans cette liste ne sont jamais homéomorphes (le mot "unique" dans l'énoncé du théorème). Avec les outils dont nous disposons, il est impossible de distinguer ces espaces les uns des autres : en effet, ils sont tous connexes (par arcs), compacts, séparés, à base dénombrable, métrisables, et localement homéomorphes à $\mathbb{R}^2$. Ils partagent donc les mêmes propriétés topologiques, parmi celles vues dans ce cours.

Pour les distinguer, il faut un outil nouveau, du type qu'on construit en topologie algébrique. Le plus pratique à ce stade est ce qu'on appelle le *groupe fondamental*, dont vous verrez la définition en TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. À tout espace topologique X, on associe un groupe $\pi_1(X)$ de telle manière qu'un homéomorphisme $X \to Y$ induit un isomorphisme $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.[3] On montre

3. De manière plus précise, π_1 est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques (pointés) dans la catégorie des groupes.

ensuite que si X est une surface donnée par un mot w en les lettres $a, b, c, \ldots$ (de telle manière que tous les sommets du polygône marqué correspondant sont identifiés en un point), alors le groupe fondamental de X admet la présentation par générateurs et relations

$$\pi_1(X) = \langle a, b, c, \ldots \mid w \rangle \ .$$

Par exemple, le groupe fondamental de la sphère est $\pi_1(S^2) = \{1\}$, tandis que celui du tore est $\pi_1(\mathbb{T}) = \left\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \right\rangle = \mathbb{Z}^2$.

Il reste alors à vérifier que deux groupes présentés par deux mots distincts de la liste donnée en proposition III.6 ne sont pas isomorphes, ce qui est très facile. Cela implique alors que les espaces topologiques correspondants ne sont pas homéomorphes, ce que nous cherchions à démontrer.