Oeuvres non publiées de André Haefliger

---

[1] **Exposé au séminaire de Rham 1964-65 : Existence et unicité des classes de Stiefel-Withney et de Chern.**

On se propose de les démontrer en utilisant les propriétés suivantes de la classe d'Euler d'un fibré.

Soit $\xi = (E, \pi, B)$ un fibré vectoriel réel de rang n, d'espace total B, de projection π et de base B. Dans le cas où ξ est orienté, nous utiliserons implicitement la cohomologie entière et dans le cas d'un fibré non-orienté la cohomologie modulo 2. Au fibré ξ nous associons sa classe d'Euler $\chi(\xi) \in H^n(B)$;elle jouit des propiétés suivantes :

1) Si $f : B' \to B$ est une application continue, $\chi(f^{-1}(\xi) = f^*\chi(\xi)$

2) Si $\xi = \xi' \oplus \xi''$, alors $\chi(\xi) = \chi(\xi')\chi(\xi'')$

3) En désignant par E_0 le complémentaire dans E de la section nulle, on a la suite exacte de Gysin :

$$\to H^i(B) \to H^{i+n}(B) \to H^{i+n}(E_0) \to H^{i+1}(B) \to$$

où le premier homomorphisme applique $\alpha \in H^i(B)$ sur $\alpha \cup \chi(\xi)$ et où le second est induit par le projection de E_0 sur B.

Dans la suite K désignera soit le corps des réels soit celui des complexes C. Les fibrés vectoriels réels seront supposés non orientés, alors que les fibrés vectoriels complexes considérés comme fibrés vectoriels réels seront supposés munis de leur orientation canonique (par exemple lorsqu'on parlera de leur claase d'Euler).

Calcul des classes de cohomologie de PK^∞.

Soit K^∞ l'espace vectoriel des suites $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ d'éléments de K dont un nombbre fini d'éléments sont différents de 0. On identifie à K^n le sous-espace défini par $x_i = 0$ pour $i > n$. Ainsi $0 \subset K_1 \subset \dots K_n$ et $K^\infty = \cup K^n$. On munit K^∞ de la topologie dont les fermés sont les sous-ensembles dont l'intersection avec K^n est un fermé pour tout n.

Soit PK^∞ (resp. PK^n) l'espace quotient de $K^\infty - 0 = K_0$ (resp. $K^{n+1} - 0 = {K_0}^{n+1}$) par la relation d'équivalence identifiant x à λx où $\lambda \in K_0 = K - 0$. On a :

$$PK_0 \subset PK_1 \subset \cdots \subset PK_n \subset \cdots \subset PK^\infty.$$

Soit η le fibré K-vectoriel de rang 1 de base PK^∞ dont la fibre au-dessus de la classe de $x \in {K_0}^\infty$ est la droite $\lambda \in K$. On l'appellera le fibré canonique sur PK^∞.

Supposons $K = R$ et écrivons la suite exacte de Gysin du fibré η. On a :

$$\to H^i(PR^\infty) \to H^{i+1}(PR^\infty) \to H^{i+1}({R_0}^\infty) \to H^{i+1}(PR^\infty) \to \dots,$$

où le premier homomorphisme est le cup produit par la classe d'Euler $\mu = \chi(\eta) \in H^1(PR^\infty; Z_2)$.

Or $H^i({R_0}^\infty) = 0$ pour $i > 0$; en effet ${R_0}^\infty$ peut se rétracter radialement par déformation sur le sous-espace S^∞ formé des vecteurs x tels que $\sum {x_i}^2 = 1$, et S^∞ est un complexe cellulaire réunion des S^n, S^{n+1} s'obtenant à partir dr S^n par adjonction de deux cellules de dimension $n+1$.

Il en résulte que μ est le générateur de $H^1(PR^\infty; Z_2)$ et que la multiplication par μ définit un isomorphisme de $H^1(PR^\infty; Z_2)$ sur $H^{i+1}(PR^\infty; Z_2)$. Donc l'anneau de cohomologie $H^*(PR^\infty; Z_2)$ est l'anneau des polynomes à coefficients dans Z_2 à une variable μ qui est la classe d'Euler du fibré η.

Le même arfgument donne un résultat analogue dans le cas complexe. Nous résumons dans le

Théorème.- L'anneau de cohomologie $H^*(PR^\infty; Z)$ (resp. $H^*(PC^\infty; Z)$) est isomorphe à l'anneau des polynômes à coefficients dans Z_2 (resp. Z) dans la variable $\mu \in H^1(PR^\infty; Z_2)$ (resp. $\mu \in H^2(PC^\infty, Z)$). où μ esl la classe d'Euler du fibré canonique η.

Construction des classes de Stiefel-Whiney et de Chern.

Soit $\xi = (E, \pi, B)$ un fibré vectoriel de rang n. Soit $\tilde{E}$ le quotient de $E \times {K_0}^\infty$ par la relation d'équivalence identifiant (z, x) à $(\lambda^{-1}z, \lambda x)$ où $\lambda \in K_0$. La projection $E \times {K_0}^\infty \to B \times {K_0}^\infty$ commute avec l'action de K_0, et définit par passage aux quotients une projection $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to B \times PK^\infty$ qui fait de $\tilde{E}$ un fibré vectoriel de rang n, $\tilde{\xi} = (\tilde{E}, \tilde{\pi}, B \times PK^\infty)$.

L'anneau de cohomologie $H * (B \times PK^\infty)$ à coefficients modulo 2 si $K = R$ et à coefficients entiers si $K = C$ est isomorphe au produit tensoriel $H^*(B) \times H^*(PR^\infty)$. Comme $H^"(PK^\infty)$ est l'anneau des polynômes dans la classe d'Euler μ du fibré canonique η, l'anneau $H^*(B \times PK^\infty)$ est isomorphe à l'anneau des polynômes $H^*(B)[\mu]$.

La classe d'Euler $\chi(\tilde{\xi})$ est donc de la forme suivante :

si $K = R$: $\chi(\tilde{\zeta}) = \sum_{0,\ldots,n} W^i(\zeta)\mu^{n-i}$, où $W^i \in H^i(B; Z_2)$ et

si $K = C$: $\chi(\tilde{\zeta}) = \sum_{0,\ldots,n} c^i(\zeta)\mu^{n-i}$ où $c^i \in H^{2i}(B; Z)$.

La classe W^i (resp. c^i) est appelée la i-ème classe de Stiefel-Whtney (resp. de Chern) du fibré vectoriel réel (resp. complexe) ζ.

On posera $W(\zeta) = \sum_{i=(0,\ldots,n)} W^i(\zeta)$ et $c(\zeta) = \sum_{i=(0,\ldots,n)} c^i(\zeta)$.

Théorème.- La classe $W(\zeta) = \sum W^i(\zeta)$, associèe à tout fibré rèel $\zeta = (E, \pi, B)$ de rang n, vérifie les propriétés suivantes :

i) pour toute application continue $f : B' \to B$ on a

$$W(f^{-1}\zeta) = f^* W(\zeta)$$

ii) pour deux fibrés vectoriels ré=els ζ' et ζ" de base B, on a

$$W(\zeta' \oplus \zeta") = w(\zeta') \cup w(\zeta")$$

iii)

$$W^0(\zeta) = 1$$

$$W^n(\zeta) = \chi(\zeta).$$

Si ζ) est un fibré vectoreil complexe de rang n, alors la classe de Chern $c(\zeta) = \sum c^i(\zeta)$ vérifie les mêmes propriétés i) - iii). (W est replacé partout par c).

Démonstration :

1) Soit $\tilde{f} : B'XPR^\infty \to BXPR^\infty$ leproduit de f par l'identité. On a évidemment $\tilde{f}^{-1}\tilde{(}\zeta) = \widetilde{f^{-1}(\zeta)}$; alors i) rèsulte de ce que $\tilde{f}\chi(\tilde{\zeta}) = \chi(\tilde{f}^{-1}\tilde{\zeta})$.

ii) On a $\widetilde{\zeta' \oplus \zeta}" = \tilde{\zeta}' + \tilde{\zeta}$", d'où la formule ii).

iii) L'image réciproque du fibré ζ par l'inclusion $i : B \to BXPR^\infty$ définie par $i(b) = bXPR_0$ est isomorphe à ζ. Donc $\chi(\zeta) = i * \chi(\tilde{\zeta}) = W^n(\zeta)$.

Pour montrer que $W^0(\zeta) = 1$, il suffit, vu i), de le vérifier lorsque ζ est le fibré trivial R^n sur un point, et par ii) lorsque $n = 1$. Dans ce cas $\tilde{\zeta}$ est isomorphe au fibré canonique η sur PR^∞ ; donc $\chi(\tilde{\zeta}) = \mu$ et $W^0(\zeta) = 1$.

La démonstration dans le cas des fibrés complexes est la même.

Unicité.- Le fibré en projectif associé à un fibré vectoriel.

La multiplication par la classe d'Euler $\chi(\tilde{\zeta})$ induit un homomorphisme injectif de $H^*(BXPK^\infty$ dans $H^*(BXPK^\infty)$?, car le coefficient de μ^n dans $\chi(\zeta^n$ est 1. D'après la suite exacte de Gysin du fibré $\tilde{\zeta}$, si $\tilde{E}_0$ est le complémentaire de la section nulle du fibré $\tilde{E}$, on a $H^*(\tilde{E}_0)$ = quotient de l'anneau $H^*(B)[\mu]$ par l'idéal engendré par $\chi(\tilde{\zeta})$.

Soit PE le fibré en espaces projectifs associé à ζ ; c'est le quotient de E_0 par la relation d'équivalence qui identifie $z \in \pi^{-1}(b)$ avec λz où $\lambda \in K_0$; on a une projection $p : PE \to B$ et $p^{-1}(b)$ est l'espace projectif associé à l'espace vectoriel $\pi^{-1}(b)$.

La projection $E_0 X {K_0}^\infty \to E_0$ commute avec l'action de E_0 et donne par passage aux quotients une application $\phi : \tilde{E}_0 \to PR$. Il est facile de démontrer que $\phi^* : H^*(PR) \to H^*(E_0)$ est un isomorphisme, car $\tilde{E}_0$ est un fibré sur PE de fibre ${K_0}^\infty$.

Pour notre but, il suffit de vérifier que l'homomorphisme $p^* : H^*(B) \to H^*(PR)$ induit par laprojection p est injectif. En effet $\phi^* p^*$ est injectif, car c'est l'homomorphisme induit par la projection naturelle de $\tilde{E}_0$ sur B.

Introduisons sur B une métrique euclidienne si $K = R$ et hermitienne si $K = C$.

Soit E_1 fibré sur PE qui est l'image réciproque de E par la projection $p : PE \to B$; ce fibré contient un sous-fibré de rang 1 dont la fibre au-dessus de la classe de $z \in E$

est la droite λz, avec $\lambda \in K$. Ainsi le fibré E_1 est somme directe de ce fibré de rang 1 et du sous-fibré orthogonal qui est de rang $n-1$. En répétant la même construction sur ce fibré et ainsi de suite $(n-1)$ fois, on en déduit la

Proposition : A tout fibré vectoriel ζ de base B on peut associer (fonctoriellement) un espace B' et une projection $f : B' \to B$ de sorte que :

a)$f^{-1}\zeta$ est somme directe de fibrés de reng 1

b) f^* applique injectivement $H^*(B)$ dans $H^*(B')$.

Corollaire : Unicité des classes de Stiefel- Whitney et de Chern vérifiant les propriétés i) à iii) du théorème précédent.

Considérons par exemple le cas $K = R$. Supposons qu'il existe un foncteur associant à tout fibré vectoriel réel de base B et de rang n une classe $W'(\zeta) \in H^*(B; Z_2)$ vérifiant les propriétés i) à iii). D'après ii) et iii), on a $W(f^{-1}\zeta) = W'(f^{-1}\zeta)$. D'aprés i), $W(f^{-1}\zeta) = f^*W(\zeta)$ et $W'(f^{-1}\zeta) = f^*W'(\zeta)$, donc $W(\zeta) = W'(\zeta)$, puisque f^* est imjectif.

[2] Le séminaire Cartan 1961-62 : Lettre de Haefliger à Cartan du 11 décembre 1961.

A notre retour de Princeton en septembre 1961, nous organisons avec de Rham un séminaire sur les travaux de Smale, en particulier sur son article « On the structure of manifolds » qui paraîtra dans l'American Journal of Mathematics en 1962. Le séminaire a lieu conjointement entre Lausanne et Genève.

Smale nous rejoindra en Suisse en janvier 1962, invité par de Rham. Il fera plusieurs exposés à Genève ou Lausanne sur ses travaux récents, notamment aussi sur les systèmes dynamiques.