ERRATUM À DÉCROISSANCE RAPIDE DE LA DISTRIBUTION f^λ

La preuve du Théorème 2.4 est incomplète car elle utilise la Remarque 2.2 dans laquelle une dépendance en λ a été omise. A la place de " $a_{k,i} \in \mathcal{O}(V \times \mathbb{C}^n)$, pour $i = 1, \ldots, p$, homogènes de degré k en la deuxième variable ", il convient de lire " $a_{k,i} \in \mathcal{O}(V \times \mathbb{C}^n \times \Gamma)$, pour $i = 1, \ldots, p$, homogène de degré k en la deuxième variable et homogène de degré 0 en la troisième variable" et remplacer la relation de dépendance intégrale par

$$(\lambda_i F(x))^{m_i} + \sum_{k=1}^{m_i} a_{k,i}(x, \sum \lambda_j F_j(x) df_j(x), \lambda)(\lambda_i F(x))^{m_i - k} = 0, \ \forall x \in V, \ \forall \lambda \in \Gamma.$$

Plutôt que de suivre les modifications que ce changement entraîne, nous donnons ci-dessous une preuve du Théorème 2.4 indépendante de la Remarque 2.2.

Rappelons que $W^\#$ est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X[\lambda]-$module $\mathcal{D}_X[\lambda] f^\lambda$. Ainsi, dire que $(x^0, 0, \lambda^0)$ n'appartient pas à $W^\#$ équivaut à dire qu'il existe un opérateur $P \in \mathcal{D}_X[\lambda]$, i.e.,

$$P(x, \partial_x, \lambda) = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq m} a_{\alpha,\beta}(x) \lambda^\alpha \partial_x^\beta, \qquad x \in X, \ \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

tel que $P f^\lambda = 0$ et $\sigma_P(x^0, 0, \lambda^0) \neq 0$, où σ_P est le symbole principal de P, soit

$$\sigma_P(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| + |\beta| = m} a_{\alpha,\beta}(x) \lambda^\alpha \xi^\beta, \quad (x, \xi) \in T^*X, \ \lambda \in \mathbb{C}^p.$$

Posons

$$R(x, \lambda) = - \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha,0}(x) \lambda^\alpha.$$

Alors $Q(x, \lambda, \partial_x) := P(x, \lambda, \partial_x) + R(x, \lambda)$ est un opérateur de degré $\leq m - 1$ en λ. On a $f^\lambda(x) = \dfrac{1}{R(x,\lambda)} Q(x, \lambda, \partial_x) f^\lambda(x)$ et $\dfrac{Q}{R}$ est un opérateur différentiel bien défini pour x voisin de x^0, de degré -1 en λ, pour autant que λ reste dans un voisinage

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX conique convenable de λ^0. Quand ϕ appartient à $C_c^\infty(X)^{n,n}$ et que $\operatorname{supp}\phi$ est suffisamment voisin de x_0, on obtient, par intégration par parties:

$$\int |f|^{2\lambda}\phi = \int \{\frac{Q}{R}(x,\partial_x,\lambda)f^\lambda \bar{f}^\lambda(x)\}\phi(x) = \int |f|^{2\lambda}(x)\left(\frac{Q}{R}\right)^*(x,\partial_x,\lambda)[\phi(x)]$$
$$= O(\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|})$$

quand $\operatorname{Re}\lambda$ est borné, si λ reste dans un voisinage conique de λ_0 . En itérant cet argument, on obtient la décroissance rapide cherchée.

Il n'y a pas de modification à apporter à la preuve de la Proposition 2.5 mais on pourra ajouter à la fin de celle du Corollaire 2.6 la précision suivante: "en remarquant que $\operatorname{adh}\{(x,\xi,t) \in T^*X \times \mathbb{C} \mid \xi = \sum t\lambda_j^0 \frac{\mathrm{d}\, f_j}{f_j}(x),\ F(x) \neq 0\}$ est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X[t]-$module $\mathcal{D}_X[t]f^{t\lambda^0}$."

La relation de dépendance intégrale de la Remarque 2.2 peut être obtenue comme suit. Si $(x^0,0,\lambda^0)$ n'appartient pas à $W^\#$ alors il existe $P \in \mathcal{D}_X[\lambda]$ avec $\sigma_P(x^0,0,\lambda^0) \neq 0$ qui annule f^λ et donc

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(x)\lambda^\alpha\left(\sum \lambda_j \frac{\mathrm{d}\, f_j}{f_j}(x)\right)^\beta = 0,\ \forall x \in V,\ \forall\lambda\in\Gamma.$$

Après multiplication par $(\lambda_i F)^m$:

$$-R(x,\lambda)(\lambda_i F)^m + \sum_{|\alpha|+|\beta|=m,\,|\beta|>0} a_{\alpha,\beta}(x)\lambda^\alpha\lambda_i^{|\beta|}(\lambda_i F)^{m-|\beta|}\left(\sum \lambda_j F_j\,\mathrm{d}\, f_j(x)\right)^\beta = 0.$$

On pose

$$a_{k,\beta}(x,\lambda) = \frac{1}{R(x,\lambda)}\sum_{|\alpha|=m-k} a_{\alpha,\beta}(x)\lambda^\alpha \quad \text{et} \quad a_{k,i}(x,\xi,\lambda) = \sum_{|\beta|=k} a_{k,\beta}(x,\lambda)\xi^\beta\lambda_i^k.$$

Alors l'égalité précédente n'est autre que la relation de dépendance intégrale cherchée avec la bonne homogénéité en λ puisque $a_{k,\beta}$ est homogène de degré $-k$.