UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des Sciences

Section de mathématiques
H.-M. Maire

GÉOMÉTRIE II

2001-2002

I. Topologie générale

II. Géométrie différentielle

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Introduction

Les notions de *voisinage, continuité, convergence, limites, etc.* définies dans $\mathbf{R}^n$ au cours d'Analyse I ont un sens dans des cadres plus généraux (e.g. convergence d'une suite de fonctions). Le but de la **Topologie** est d'étudier abstraitement ces concepts. On distingue deux branches dans cette théorie:
– la topologie des **espaces métrisables**, où la notion de voisinage provient d'une "distance". L'intuition géométrique facilite l'étude de problèmes abstraits. La **topologie algébrique** (qui utilise des outils algébriques pour résoudre des problèmes géométriques) et la **topologie différentielle** (qui utilise le calcul différentiel) sont des chapitres en plein développement de cette théorie.
– **la topologie générale** qui étudie les espaces topologiques quelconques pour lesquels l'intuition géométrique n'est pas d'un grand secours. Le vocabulaire utilisé ici est devenu un vocabulaire de base pour tous les travaux actuels en Analyse et Géométrie.

Bibliographie

Les rayons 53, 54 et 55 de la bibliothèque de la Section de Mathématiques contiennent la plupart des ouvrages relatifs au cours de Géométrie II. On pourra consulter en particulier:

55/164 ARMSTRONG M. A., *Basic Topology* , Springer 1983.
53/194 BERGER M. & GOSTIAUX B., *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France 1987.
55/72 BROWN R., *Elements of Modern Topology*, Mc Graw-Hill 1968.
54/147 CHRISTOL G., COT A. & MARLE C.-M., *Topologie,* Ellipse, 1997.
53/129 do CARMO M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall 1976.
54/91 DIXMIER J., *Topologie générale*, Presses Universitaires de France 1981.
54/40 DUGUNDJI J., *Topology*, Allyn & Bacon 1966.
53/112 KLINGENBERG W., *A Course in Differential Geometry*, Springer 1978.
54/106 MUNKRES J. R., *Topology,* Prentice Hall 1975.
54/48 STEEN L. A. & SEEBACH J. A., *Counterexamples in Topology*, Springer 1978.
53/206 STRUIK D., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover 1988.
53/186 THORPE J. A., *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer 1979.
46/633 WAGSCHAL C., *Topologie et Analyse fonctionnelle,* Hermann 1995.

1. Espaces métriques, espaces topologiques

Définition 1.1. Une *distance* ou *métrique* sur un ensemble quelconque X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes, $\forall x, y, z \in X$:
(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Inégalité triangulaire)
Le couple (X, d) est un *espace métrique*.

Remarques. 1) On a nécessairement $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ car $2d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x) = 0$.
2) De (ii) et (iii) on déduit: $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$.
3) (ii) et (iii) $\iff$ $d(z, x) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemples.
1) Pour X quelconque, $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$ définit la *métrique discrète.*
2) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$; $d'(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$; $d''(x, y) = \left|\dfrac{x}{1 + |x|} - \dfrac{y}{1 + |y|}\right|$.
3) $X = \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$, $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$. L'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d_2)$ est donc l'espace euclidien usuel.
4) $X = \mathbb{R}^n$, $d_\infty(x, y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$.
5) $X = C^0([a, b])$, $d_p(f, g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx)^{1/p}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$.
6) $X = C^0([a, b])$, $d_\infty(f, g) = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x) - g(x)|$.

Définition 1.2. Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. L'ensemble $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ est la *boule (ouverte)* de centre a et rayon r.

Définition 1.3. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $O \subseteq X$ est un *sous-ensemble ouvert* de (X, d) si

$$\forall x \in O,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subseteq O.$$

Exemple. Les boules $B(a, r)$ sont ouvertes. En effet, soit $x \in B(a, r)$; alors $r - d(a, x) > 0$ et $B(x, r - d(a, x)) \subseteq B(a, r)$ d'après l'inégalité triangulaire.

Proposition 1.4. *Soit (X, d) un espace métrique.*
(i) $\emptyset$ et X sont ouverts;
(ii) la réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte;
(iii) l'intersection d'une famille finie *d'ouverts est ouverte.*

Preuve.
(i): L'ensemble vide est ouvert car il n'y a rien à vérifier. L'espace total X est ouvert car $B(x,r)$ est toujours contenu dans X.
(ii): Soit $\{O_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts et $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Il existe alors $i' \in I$ tel que $x \in O_{i'}$ et donc $r_{i'} > 0$ tel que $B(x, r_{i'}) \subseteq O_{i'}$, puisque $O_{i'}$ est ouvert. Par suite, $B(x, r'_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$.
(iii): Soit $\{O_i\}_{i\in I}$ une famille *finie* d'ouverts et $x \in \bigcap_{i\in I} O_i$. Puisque $x \in O_i$, $\forall i \in I$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subseteq O_i$. Il suffit de prendre $r = \min_{i\in I} r_i$ pour avoir $B(x,r) \subseteq \bigcap_{i\in I} O_i$. □

Définition 1.5. Deux distances d et d' sur un ensemble X sont *équivalentes* si elles donnent les mêmes sous-ensembles ouverts, i.e.,

$$\forall x \in X, \forall r > 0, \exists r' > 0 \quad \text{tel que} \quad B_{d'}(x, r') \subseteq B_d(x, r) \quad \text{et vice versa,}$$

ou bien

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon' > 0 \quad \text{t. q.} \quad \forall y \in X,\ d(x,y) < \varepsilon' \implies d(x,y) < \varepsilon \quad \text{et sym.}$$

Elles sont *uniformément équivalentes* si $\exists c,\ C > 0$ tels que:

$$c\ d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C\ d(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

Exemples. 1) Les distances d_p, $1 \leq p \leq \infty$, dans $\mathbb{R}^n$ sont uniformément équivalentes (cf. Exercice 1.7).
2) Les distances d et d' de l'exemple 2) ci-dessus sont équivalentes mais pas uniformément équivalentes, car l'une est bornée et l'autre pas.

Définition 1.6. Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ satisfaisant:
(i) X et $\emptyset \in \mathcal{T}$;
(ii) $O_i \in \mathcal{T},\ \forall i \in I \implies \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$;
(iii) $O_i \in \mathcal{T},\ \forall i \in I$ *fini* $\implies \bigcap_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *sous-ensembles ouverts* de l'*espace topologique* $(X, \mathcal{T})$.

Exemples.
1) $\mathcal{T} = \{\emptyset,\ X\}$: topologie *grossière.*
2) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$: topologie *discrète.*
3) (X, d) espace métrique, $\mathcal{T}$ famille des ouverts pour la métrique d.
4) Sur $X = \{a, b\}$, il y a 4 topologies possibles.
5) L'intersection de toutes les topologies contenant une famille donnée $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X. C'est la topologie engendrée par $\mathcal{F}$.

Définition 1.7. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *métrisable* s'il existe une métrique sur X dont les sous-ensembles ouverts sont les éléments de $\mathcal{T}$.

Exemples.
1) $(X, \mathcal{P}(X))$ est métrisable (prendre la métrique discrète).
2) $C^0([0,1])$ muni de la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable (cf. Exercice 4.1).

Proposition 1.8. *Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ avec X fini, on a:*

$$(X, \mathcal{T}) \text{ métrisable } \iff (X, \mathcal{T}) \text{ discret.}$$

Preuve. $\Longrightarrow$) Soit d une distance sur X qui induit la topologie $\mathcal{T}$. On pose $r := \min\{d(x,y); x \neq y \in X\}$; alors r est positif car X est fini et pour tout $x \in X$, la boule $B(x,r)$ ne contient que le point x. Donc tous les points de X sont ouverts ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{T}$ soit discrète.
$\Longleftarrow$) Prendre la métrique discrète.

Définition 1.9. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. La partie $\mathcal{T}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$ de $\mathcal{P}(A)$ est appelée *topologie induite* par $\mathcal{T}$ sur A. Pour vérifier que $\mathcal{T}_A$ forme bien une topologie, il suffit d'employer les formules

$$\bigcup (O_i \cap A) = (\bigcup O_i) \cap A \quad \text{et} \quad \bigcap (O_i \cap A) = (\bigcap O_i) \cap A.$$

Terminologie. Les notions qui font explicitement référence à la distance d'un espace métrique sont appelées *notions métriques.* Exemples: boules, suites de Cauchy, sous-ensembles bornés, continuité uniforme. Par contre, celles qui ne dépendent que des ouverts de l'espace sont appelées *notions topologiques.* Exemples: ouverts, voisinages, adhérence, continuité, compacité, connexité.

2. Voisinages, suites, fermés, adhérence, intérieur

Définition 2.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit que $V \subseteq X$ est un *voisinage* de x si V contient un ouvert qui contient x. On note $\mathcal{V}_x$ la famille des voisinages de x.

Exemple. Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

Axiomes des voisinages. Soient X un ensemble et $\forall x \in X$ une famille $\mathcal{V}_x$ de parties de X. On dit que $\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ satisfait les *axiomes des voisinages* si, $\forall x \in X$:

(o) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$;

(i) $V \in \mathcal{V}_x \implies x \in V$;

(ii) $V \in \mathcal{V}_x$ et $V' \supseteq V \implies V' \in \mathcal{V}_x$;

(iii) V et $V' \in \mathcal{V}_x \implies V \cap V' \in \mathcal{V}_x$;

(iv) $\forall U \in \mathcal{V}_x$, $\exists V \in \mathcal{V}_x$ tel que $U \in \mathcal{V}_y$, $\forall y \in V$, i.e., U est un voisinage des proches voisins de x.

Lemme 2.2. *Soient X un ensemble et $\forall x \in X$ une famille $\mathcal{V}_x$ de parties de X qui satisfait les axiomes des voisinages. Alors, pour $A \subseteq X$, l'ensemble*

$$A^o = \{y \in A \mid A \in \mathcal{V}_y\}$$

est un voisinage de chacun de ses points et $A^{oo} = A^o$..

Preuve. Soit $x \in A^o$. Puisque $A \in \mathcal{V}_x$, d'après (iv) il existe $U \in \mathcal{V}_x$ tel que $A \in \mathcal{V}_y$, pour tout $y \in U$. Par suite, $U \subseteq A^o$; comme U est un voisinage de x, l'ensemble A^o est un voisinage de x. □

Proposition 2.3. *Soient X un ensemble et $\forall x \in X$ une famille $\mathcal{V}_x$ de parties de X qui satisfait les axiomes des voisinages. On définit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ par*

$$O \in \mathcal{T} \iff \forall x \in O,\ O \in \mathcal{V}_x \iff O^o = O.$$

Alors $\mathcal{T}$ est une topologie et pour tout $x \in X$, la famille des $\mathcal{T}-$voisinages de x est égale à $\mathcal{V}_x$.

Preuve. Notons $\tilde{\mathcal{V}}_x$ la famille des voisinages de x dans $(X, \mathcal{T})$, i. e. $V \in \tilde{\mathcal{V}}_x \iff \exists O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subseteq V$. On a $\mathcal{V}_x = \tilde{\mathcal{V}}_x$, $\forall x \in X$, car

1) $V \in \tilde{\mathcal{V}}_x \implies \exists O \subseteq V$ tel que $O \in \mathcal{V}_x \implies V \in \mathcal{V}_x$;

2) $V \in \mathcal{V}_x \implies V^o$ du lemme est un voisinage de chacun de ses points et $x \in V^o$
$\implies V^o \in \mathcal{T}$ et $x \in V^o \subseteq V \implies V \in \tilde{\mathcal{V}}_x$. □

Proposition 2.4. *Soient (X, d) un espace métrique, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et x un élément de X. Les énoncés suivants sont équivalents:*
(a) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ *tel que* $n \geq N \implies d(x, x_n) < \varepsilon$;
(b) $\forall V \in \mathcal{V}_x,\ \exists N > 0$ *tel que* $n \geq N \implies x_n \in V$.

Preuve.
(a) $\implies$ (b): Soit $V \in \mathcal{V}_x$. Par definition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq V$. D'après (a), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, r)$ pour $n \geq N$. Donc $x_n \in V$ dès que $n \geq N$.
(b) $\implies$ (a): Immédiat, car $B(x, r) \in \mathcal{V}_x$, pour tout $r > 0$. □

Notation. Quand (a) ou (b) est vérifiée, on dit que x est *limite* de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; on écrit $x_n \to x$ quand $n \to \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dans un espace topologique, on prend (b) comme définition de la convergence.

Remarque. La limite d'une suite dans un espace métrique est unique. Idem dans un espace topologique séparé (cf. paragraphe 5).

Définition 2.5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble $A \subseteq X$ est *fermé* si son complémentaire $X \setminus A$ est ouvert.

Proposition 2.6. *Dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, on a:*
(i) X et $\emptyset$ sont fermés;
(ii) l'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée;
(iii) la réunion d'une famille finie de fermés est fermée.

Preuve. Découle directement de la définition 1.6 par passage au complémentaires. □

Proposition 2.7. *Soient X un espace métrisable et $A \subseteq X$. Alors: A est fermé si, et seulement si, pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge dans X vers x, on a $x \in A$.*

Preuve. Supposons A fermé et $A \ni x_n \to x$. Si $x \notin A$, alors x appartient à l'ouvert $X \setminus A$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq X \setminus A$. Par suite, $x_n \notin A$ pour n assez grand. Contradiction, donc $x \in A$.
Réciproquement, suposons que toutes les limites de suites de A appartiennent à A et prenons $x \notin A$. Si on ne peut pas trouver de boule $B(x, r)$ contenue dans $X \setminus A$, alors pour tout $n \geq 1$, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. D'où une suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de A avec $d(x_n, x) < 1/n$; donc $x_n \to x$ et $x \in A$. Contradiction, donc une telle boule existe et ainsi $X \setminus A$ est ouvert. □

Définition 2.8. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. *L'adhérence* de A est l'intersection des sous-ensembles fermés de X qui contiennent A. On la note $\bar{A}$. C'est le plus petit fermé de X contenant A. Par suite, A est fermé si, et seulement si, $A = \bar{A}$.

Lemme 2.9. $x \in \bar{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}_x,\ V \cap A \neq \emptyset$.

Preuve. Supposons $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}_x$. Si $V \cap A = \emptyset$, on a aussi $O \cap A = \emptyset$ pour un ouvert contenant x. Donc $X \setminus O$ est un fermé qui contient A; il contient donc aussi $\bar{A}$ et ainsi $x \notin \bar{A}$.
Réciproquement, si $x \notin \bar{A}$, alors $X \setminus \bar{A}$ est un voisinage de x qui ne rencontre pas A.
□

Définition 2.10. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$. L'*intérieur* de A est la réunion des sous-ensembles ouverts de X contenus dans A. On le note A°. C'est le plus grand ouvert de X contenu dans A. Par suite, A est ouvert si, et seulement si, $A^\circ = A$. Comparer avec le Lemme 2.2.

NB. Il découle immédiatement des définitions que

$$A^\circ = X \setminus (X \setminus A)^-, \quad X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}, \quad X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ.$$

Lemme 2.11. $x \in A^\circ \iff A \in \mathcal{V}_x$.

Preuve. Suit de la remarque ci-dessus et du lemme 2.9. □

Proposition 2.12. *Pour A et $B \subseteq X$, les relations suivantes ont lieu:*

$$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \ (\textit{égalité si}\ \ \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset), \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ;$$
$$(A \cap B)^- \subseteq \bar{A} \cap \bar{B} \ (\textit{égalité si}\ \ A^\circ \cup B = A \cup B^\circ = X), \quad (A \cup B)^- = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Preuve. Puisque $A^\circ \cup B^\circ$ est ouvert et contenu dans $A \cup B$ et que $(A \cup B)^\circ$ est le plus grand ouvert contenu dans $A \cup B$, la première relation est démontrée.
Si $x \in A^\circ \cap B^\circ$, il existe des ouverts $U \subseteq A$ et $V \subseteq B$ contenant x. Donc $U \cap V$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et contenant x. D'où $x \in (A \cap B)^\circ$.
Si $x \in (A \cap B)^\circ$, il existe un ouvert $O \subseteq A \cap B$ contenant x. Comme $O \subseteq A$ et $O \subseteq B$, on a $x \in A^\circ \cap B^\circ$.
Les deux dernières relations se déduisent des précédentes par complémentarité. □

Definition 2.13. La *frontière* d'un sous-ensemble A d'un espace topologique X est l'ensemble fermé $\mathrm{Fr}\, A := \bar{A} \setminus A^\circ$ $(= \bar{A} \cap (X \setminus A)^-)$. Donc $x \in \mathrm{Fr}\, A$ si, et seulement si, $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap A$ et $V \setminus A$ sont non vides.

Exemple. $\mathrm{Fr}\, X = \emptyset$.

3. Continuité

Proposition 3.1. *Soient X, Y des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ et $x \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de* X, *on a:* $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$;

(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tel que* $\forall x' \in X,\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$;

(c) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tel que* $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$;

(d) $W \in \mathcal{V}_{f(x)} \implies f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$.

Preuve.
(a) $\implies$ (b): Soit $\varepsilon > 0$ donné. S'il n'existe pas δ comme en (b), pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in X$ avec $d_X(x, x_n) < 1/n$ et $d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Alors $x_n \to x$ et $f(x_n) \not\to f(x)$, ce qui contredit (a).
(b) $\implies$ (c): Evident.
(c) $\implies$ (d): On a $W \in \mathcal{V}_{f(x)} \implies \exists \varepsilon$ tel que $W \supseteq B_Y(f(x), \varepsilon) \implies f^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$. D'après (c), il existe $\delta > 0$ tel que $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$ et donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x.
(d) $\implies$ (a): Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X telle que $x_n \to x$ et $\varepsilon > 0$. On prend $W = B_Y(f(x), \varepsilon)$. Comme $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x, il existe $N > 0$ tel que $x_n \in f^{-1}(W)$ si $n \geq N$, d'après la proposition 2.4. D'où $f(x_n) \in W = B_Y(f(x), \varepsilon)$ si $n \geq N$. □

Défintition 3.2. L'application $f : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est *continue au point* $x \in X$ si (d) a lieu; elle est *continue* si elle est continue en chaque point de X. C'est un *homéomorphisme* si elle est bijective, continue et d'inverse continue.

Exemples.
1) Toute application constante est continue.
2) Si X est discret, alors $f : X \longrightarrow Y$ est continue.
3) Si Y est grossier, alors $f : X \longrightarrow Y$ est continue.
4) L'application $\gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{S}^1$ donnée par $\gamma(t) = e^{it}$ est continue bijective mais son inverse n'est pas continue.

Proposition 3.3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont continues (en x, resp. $f(x)$), alors $g \circ f$ est continue (en x).*

Preuve. Soit $W \in \mathcal{V}_{g\circ f(x)}$; alors $g^{-1}(W) \in \mathcal{V}_{f(x)}$ car g est continue en $f(x)$. Par suite, $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{V}_x$, car f est continue en x. □

Proposition 3.4. *Pour une application $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques, on a:*

f *continue* $\iff \forall O$ *ouvert* $\subseteq Y,\ f^{-1}(O)$ *ouvert* $\subseteq X$

$$\begin{aligned}&\iff \forall F \text{ fermé} \subseteq Y,\ f^{-1}(F) \text{ fermé} \subseteq X\\ &\iff \forall A \subseteq X,\ f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}\ .\end{aligned}$$

Preuve. Première implication $\Longrightarrow$: Soit O ouvert dans Y et $x \in f^{-1}(O)$. Alors $f(x) \in O \in \mathcal{V}_{f(x)}$ car O est un voisinage de chacun de ses points. Comme f est continue, $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}_x$, ce qui montre que $f^{-1}(O)$ est ouvert.
Première implication $\Longleftarrow$: Soit W un voisinage de $f(x)$. Alors W contient un ouvert O qui contient $f(x)$. D'où $f^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(O) \ni x$. Donc $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$, car $f^{-1}(O)$ est ouvert.
La deuxième équivalence est obtenue par passage au complémentaire.
Dernière implication $\Longrightarrow$: Puisque $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est fermé et contient A, il contient $\bar{A}$. Donc $\overline{f(A)} \supseteq ff^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq f(\bar{A})$. Dernière implication $\Longleftarrow$: Soit F fermé dans Y. On prend $A = f^{-1}(F)$. On a $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{ff^{-1}(F)} \subseteq \bar{F} = F$ puisque F est fermé. En prenant l'image réciproque il vient: $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq f^{-1}(F)$, ce qui montre que $f^{-1}(F)$ est fermé. □

Définition 3.5. Soient (X, d) un espace métrique, $\emptyset \neq A \subseteq X$ et $x \in X$. La *distance de x à A* est définie par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)\,.$$

Proposition 3.6. *Avec les notations ci-dessus, on a:*
a) $\forall x, y \in X,\ |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ et donc $d(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue;
b) $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

Preuve. a) Pour tout $z \in A$ on a: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. En prenant la borne inférieure sur z, il vient $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. L'inégalité cherchée en découle en échangeant x et y.
b) Si $d(x, A) = 0$ alors il existe une suite de A qui tend vers x. Donc x est limite d'une suite de $\bar{A}$. Alors $x \in \bar{A}$ d'après la proposition 2.7, car $\bar{A}$ est fermé. Réciproquement, l'ensemble des points à distance nulle de A est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ et il contient A; il contient donc $\bar{A}$. □

Corollaire 3.7. *Si A et B sont des fermés disjoints d'un espace métrique X, alors il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ telle que $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$.*

Définition 3.8. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X. On dit que $\mathcal{T}_1$ est *plus fine que* $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$. De manière équivalente si l'application identique $(X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue.

4. Bases, Systèmes fondamentaux de voisinages

Définition 4.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ est une *base* de la topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$. Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ est une *sous-base* de la topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert de X est réunion d'intersections finies d'ouverts de $\mathcal{A}$.

Remarque. Toute famille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est contenue dans une topologie minimale; c'est l'intersection de toutes les topologies qui contiennent $\mathcal{A}$, appelée topologie *engendrée* par $\mathcal{A}$. La famille $\mathcal{A}$ de départ est une sous-base de cette topologie.

Exemples.
1) $\{]a, b[\mid a,\, b \in \mathbb{Q}\}$ est une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
2) Dans (X, d) métrique, la famille $\{B(x, 1/k)\}_{(x,k)\in X\times\mathbb{N}^*}$ est une base de la topologie de X.
3) $\{\mathbb{R} \setminus \{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ est une sous-base de la topologie $\mathcal{T}_f$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.2. Une topologie est *à base dénombrable* si elle possède une base formée d'un nombre dénombrable d'ouverts. De manière équivalente, si elle possède une sous-base dénombrable. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{T}$ à base dénombrable satisfait le *deuxième axiome de dénombrabilité* ("second countable").

Définition 4.3. Dans un espace topologique, une partie $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{V}_x$ de la famille des voisinages de x est une *base des voisinages* de x ou un *système fondamental de voisinages* de x si $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $\exists U \in \mathcal{U}_x$ tel que $U \subseteq V$. L'espace $(X, \mathcal{T})$ satisfait le *premier axiome de dénombrabilité* si tout point $x \in X$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages ("first countable").

Remarque. Le 2^{e} axiome de dénombrabilité implique le 1^{er}.

Exemple. Les boules de rayons rationnels centrées en x dans un espace métrique forment une base dénombrable des voisinages de x. Donc tout espace métrisable satisfait le 1^{er} axiome de dénombrabilité.

Définition 4.4. Une partie A d'un espace topologique X est *(partout) dense* si $\bar{A} = X$, i.e. $\forall O \in \mathcal{T},\ O \neq \emptyset \implies O \cap A \neq \emptyset$. On dit que X est *séparable* si X contient une partie dénombrable dense.

Proposition 4.5. *Soit X un espace topologique. Si X est à base dénombrable alors X est séparable. La réciproque a lieu quand X est métrisable.*

Preuve. Supposons X à base dénombrable et désignons par $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base de la topologie. On peut suposer $O_n \neq \emptyset$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et choisir $x_n \in O_n$. Alors $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X car tout ouvert non vide de X est réunion non vide de certains des ouverts de la base et contient donc un des x_n.
Réciproquement, soit $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense de X. Alors la famille $\{B(x_n, 1/k)\}_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$, est une base de la topologie de X. En effet: $x \in O$ ouvert $\implies$ $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(x, 1/k) \subseteq O$. Mais il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, 1/2k)$ et, par suite, $x \in B(x_n, 1/2k) \subseteq O$. □

Définition 4.6. Une famille $\{O_i\}_{i\in I}$ d'ouverts d'un espace topologique X est appelée un *recouvrement ouvert de* X si $X = \bigcup_{i\in I} O_i$. Un *sous-recouvrement de* $\{O_i\}_{i\in I}$ est une famille $\{O_j\}_{j\in J}$ avec $J \subseteq I$ et $X = \bigcup_{j\in J} O_j$. L'espace topologique X est un *espace de Lindelöf* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable.

Exemples.
1) Tout sous-espace fermé d'un espace de Lindelöf est un espace de Lindelöf.
2) Un espace discret est de Lindelöf si, et seulement si, il est dénombrable.

Théorème 4.7 (de Lindelöf). *Tout espace topologique à base dénombrable est un espace de Lindelöf.*

Preuve. Soit $\{O_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X et $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base de la topologie de X. Pour tout $i \in I$, il existe $N_i \subseteq \mathbb{N}$ tel que $O_i = \bigcup_{n\in N_i} U_n$. Comme $\bigcup_{i\in I} O_i = X$, on a $\bigcup_{n\in N} U_n = X$, où $N := \bigcup_{i\in I} N_i$. Pour chaque $n \in N$, on choisit $i(n) \in I$ tel que $U_n \subseteq O_{i(n)}$. Alors $X = \bigcup_{n\in N} U_n \subseteq \bigcup_{n\in N} O_{i(n)}$ si bien que $\{O_{i(n)}\}_{n\in N}$ est un sous-recouvrement dénombrable de $\{O_i\}_{i\in I}$. □

Application. Tout sous-espace d'un espace à base dénombrable est un espace de Lindelöf.

5. Séparation

Définition 5.1. Un espace topologique X est:
T_0 si $\forall x \neq y \in X$, $\exists U$ ouvert $\ni x$ tel que $U \not\ni y$ ou $\exists V$ ouvert $\ni y$ tel que $V \not\ni x$;
T_1 si $\forall x \neq y \in X$, $\exists U$ ouvert $\ni x$ tel que $U \not\ni y$;
T_2 si $\forall x \neq y \in X$, $\exists U, V$ ouverts tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$;
T_3 si $\forall x \in X$ et $\forall B$ fermé $\not\ni x$, $\exists U, V$ ouverts tels que $U \ni x$, $V \supseteq B$ et $U \cap V = \emptyset$;
T_4 si $\forall A, B$ fermés disjoints, $\exists U, V$ ouverts tels que $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ et $U \cap V = \emptyset$;
séparé ou *Hausdorff* s'il est T_2;
régulier s'il est T_3 & T_1;
normal s'il est T_4 & T_1.

Remarques.

1) T_3 & $\mathrm{T}_0 \implies \mathrm{T}_2 \implies \mathrm{T}_1 \implies \mathrm{T}_0$.
   En effet, pour $x \neq y$, il existe par exemple O ouvert $\ni x$ mais $y \notin O$, d'après T_0; donc $x \notin (X \setminus O)$ et $y \in (X \setminus O)$ qui est fermé. D'après T_3, il existe U, V ouverts disjoints tels que $x \in U$ et $V \supseteq (X \setminus O) \ni y$. Les deux autres implications sont triviales.
2) X est $\mathrm{T}_1 \iff \forall x \in X$, $\{x\}$ est fermé.
   Il suffit de remarquer que cette dernière propriété est équivalente à: $\forall x \in X$, $X \setminus \{x\}$ est ouvert et que T_1 est équivalente à: $\forall y \in X \setminus \{x\}$ il existe V ouvert tel que $y \in V \subseteq X \setminus \{x\}$.
3) T_4 & $\mathrm{T}_1 \implies \mathrm{T}_3$ & T_2.
   Puisque T_1 implique que les points sont fermés, T_3 et T_2 découlent de T_4.
4) normal $\implies$ regulier $\implies$ séparé.
   Utiliser 3) et 1).
5) $\mathrm{T}_3 \iff \forall x \in O$ ouvert, $\exists U$ ouvert tel que $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq O$.

Exemple. Tout espace métrique est normal. En effet, il est séparé et T_4 provient du corollaire 3.7.

Lemme 5.2. *Soit X' une partie d'un espace topologique X munie de la topologie induite. Alors*
X séparé $\implies$ X' séparé ;
X régulier $\implies$ X' régulier;
X normal et X' fermé de X $\implies$ *X' normal.*

Preuve. Les propriétés T_0 à T_3 passent à X'. Pour T_2: $x' \neq y' \in X' \implies \exists U, V$ ouverts disjoints de X tels que $x' \in U$ et $y' \in V \implies U' := U \cap X'$ et $V' := V \cap X'$ sont des ouverts disjoints de X' avec $x' \in U'$ et $y' \in V'$. Pour T_3: $x' \notin B'$ fermé de $X' \implies \exists B$ fermé de X tel que $B' = B \cap X'$ et donc $x' \notin B \implies \exists U, V$ ouverts

disjoints de X tels que $x' \in U$ et $B \subseteq V \implies U' := U \cap X'$ et $V' := V \cap X'$ sont des ouverts disjoints de X' qui séparent x' et B'.
Dernière implication: On remarque d'abord que tout fermé de X' est un fermé de X. Deux fermés disjoints de X' sont donc aussi deux fermés de X; on les sépare par des ouverts de X. En prenant la trace sur X', on obtient deux ouverts de X' qui séparent les fermés donnés. □

Remarque. La dernière implication du lemme n'a pas lieu pour X' quelconque, cf. exemple 3 après la définition 8.4.

Théorème 5.3. *Si X est Lindelöf et régulier, alors X est normal.*

Preuve. Soient A et B des fermés disjoints de X. Puisque X est régulier, pour tout $x \in A$ [resp. $y \in B$], il existe U_x [resp. V_y] ouvert contenant x [resp. y] tel que $\overline{U}_x \cap B = \emptyset$ [resp. $\overline{V}_y \cap A = \emptyset$]. Alors $\{X \setminus A \cup B\} \cup \{U_x \mid x \in A\} \cup \{V_y \mid y \in B\}$ est un recouvrement ouvert de X. Il existe donc une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de A [resp. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de B] telle que $\bigcup U_n \supseteq A$ où $U_n = U_{x_n}$ [resp. $\bigcup U_{y_n} \supseteq B$ où $V_n = V_{y_n}$]. Soit $U'_n = U_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \bar{V}_k$ [resp. $V'_n = V_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \bar{U}_k$]. On a $U'_n \cap V_k = \emptyset$ pour $k \leq n$ et donc $U'_n \cap V'_k = \emptyset$ pour $k \leq n$. De même, $U'_k \cap V'_n = \emptyset$, pour $k \leq n$. De plus, $\bar{V}_k \cap A = \emptyset$ entraîne $\bigcup U'_n = \bigcup\left(U_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \bar{V}_k\right) \supseteq A$. Les ouverts $\bigcup U'_n$ et $\bigcup V'_n$ conviennent. □

Théorème 5.4 (Lemme d'Urysohn). *Soient A et B deux fermés disjoints dans un espace normal X. Alors il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ telle que $f|_A = 0$ et $f|_B = 1$.*

Preuve. Soit $D = \{\frac{p}{2^q} \mid p \text{ et } q \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des rationnels dyadiques de $[0,\infty[$. Pour $t \in D$, on construit inductivement un ouvert X_t tel que:

$$A \subseteq X_0 \subseteq \bar{X}_0 \subseteq X \setminus B =: X_1, \quad X_t = X \quad \text{si} \quad t > 1.$$

Si X_s est choisi pour $s = p/2^{q-1}$ avec $0 \leq p \leq 2^{q-1}$, on prend, pour $t = \dfrac{2p+1}{2^q}$:

$$\bar{X}_{t-1/2^q} \subseteq X_t \subseteq \bar{X}_t \subseteq X_{t+1/2^q}.$$

De cette manière, on a: $s < t \in D \implies \bar{X}_s \subseteq X_t$.
On définit maintenant $f : X \longrightarrow [0,1]$ par

$$f(x) = \inf\{t \in D \mid X_t \ni x\}.$$

Les deux relations suivantes ont lieu, pour $u,\ v \in [0,1]$:

$$\{x \in X \mid f(x) < v\} = \bigcup_{t\in D, t<v} X_t, \quad \{x \in X \mid f(x) \leq u\} = \bigcap_{t\in D, t>u} X_t.$$

En effet, $f(x) < v \iff \exists t \in D,\ t < v$ avec $x \in X_t$; d'autre part, $f(x) \le u \iff \forall t > u,\ t \in D,\ f(x) < t$ (car D est dense) $\iff \forall t > u,\ t \in D,\ \exists s \in D$ tel que $s < t$ et $x \in X_s \iff \forall t > u,\ t \in D$, on a $x \in X_t$.
Comme $\bigcap_{t>u} X_t = \bigcap_{t>u} \bar{X}_t$ et $]u,v[= [0,v[\cap]u,1] = [0,u[\cap[0,1] \setminus [0,u]$, la continuité de f est démontrée.
Enfin, si $x \in A$ alors $x \in X_0$ et donc $f(x) = 0$; si $x \in B$ alors $x \in X_t \setminus X_1,\ \forall t > 1$ et donc $f(x) = 1$. $\square$

Théorème 5.5 (Urysohn). *Pour un espace topologique X à base dénombrable, on a: X régulier $\iff$ X normal $\iff$ X métrisable.*

Preuve. Les implications $\Leftarrow$ ont déjà été démontrées.
La première implication $\Rightarrow$ découle des théorèmes 4.7 et 5.3.
Dernière implication $\Rightarrow$): Il s'agit de séparer les points et les fermés par une famille dénombrable de fonctions continues. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable des ouverts de X. Pour $x \in X$ et O ouvert contenant x, il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $x \in V \subseteq O$. Par normalité, il existe encore $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq V \subseteq O$. Grâce au lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ telle que $f(\bar{U}) = \{0\}$ et $f(X \setminus V) = \{1\}$; et donc $f(x) = 0$ et $f(X \setminus O) = \{1\}$. Puisque l'ensemble des couples $(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ est dénombrable, on a construit un ensemble dénombrable de fonctions continues $f_n : X \longrightarrow [0,1]$ tel que:

$$(5.1) \quad \forall x \in O \quad \text{ouvert} \quad \subseteq X,\ \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(X \setminus O) = \{1\}.$$

On pose, pour x et $y \in X$:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x) - f_n(y)| 2^{-n}.$$

Il reste à voir que (1) d est une distance, (2) $B(x,r)$ est ouvert $\forall x \in X$, $\forall r > 0$ et (3) $\forall x \in O$ ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq O$.
Si $x \neq y$, on a $x \in X \setminus \{y\}$; d'après (5.1), il existe n tel que $f_n(x) = 0$ et $f_n(y) = 1$. D'où, $d(x,y) \geq 2^{-n}$. L'inégalité triangulaire est immédiate.
Pour (2), soit $y \in B(x,r)$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{1}{2}(r - d(x,y))$. Alors $B(x,r)$ contient l'ensemble $\{z \mid \sum_{n \le k} |f_n(y) - f_n(z)| 2^{-n} < \frac{1}{2}(r - d(x,y))\}$ qui est ouvert car la somme est finie et qui contient y.
Pour (3), soit n l'entier de (5.1) pour x et O donnés. Si $y \notin O$, on a $d(x,y) \geq 2^{-n}$ et donc $y \notin B(x, 2^{-n})$. On prend $r = 2^{-n}$. $\square$

6. Connexité

Définition 6.1. Un espace topologique X est *connexe* s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides, i. e.,

$$U \text{ et } V \text{ ouverts [resp. fermés]}, \ U \cup V = X\,,\ U \cap V = \emptyset \implies U = X \text{ ou } V = X\,,$$

$$\text{ou bien} \quad U \subseteq X \text{ ouvert et fermé} \implies U = X \text{ ou } \emptyset\,.$$

Une partie A de X est *connexe* si l'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe, i.e.

$$U \text{ et } V \text{ ouverts de } X\,,\ U \cup V \supseteq A,\ U \cap V \cap A = \emptyset \implies U \supseteq A \text{ ou } V \supseteq A\,.$$

Proposition 6.2. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$; alors: A est connexe $\iff$ A est un intervalle .*

Preuve. $\Rightarrow$) On utilise la caractérisation suivante (cf. Analyse I):

$$A \text{ est un intervalle} \iff \forall x, y \in A \text{ tels que } x < y\,,\text{ on a } [x,y] \subseteq A\,.$$

Pour $x < y$ éléments de A, on doit avoir $[x,y] \subseteq A$ car si $\xi \in]x,y[\backslash A$ on peut partitionner A en les ouverts $]-\infty,\xi[\cap A$ et $]\xi,\infty[\cap A$.

$\Leftarrow$) Prenons une partition de l'intervalle A en deux ouverts non vides U et V. Soient $x \in U$ et $y \in V$; on peut supposer $x < y$. Posons $\tilde{U} = U \cap [x,y]$ et $\tilde{V} = V \cap [x,y]$. Comme $\tilde{U}$ est non vide et majoré, il a une borne supérieure ξ. Evidemment, $\xi \in [x,y] \subseteq A$. Supposons $\xi \in \tilde{U}$; alors $\xi < y$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[\xi,\xi+\varepsilon[\subseteq \tilde{U}$ car $\tilde{U}$ est ouvert. Donc ξ n'est pas un majorant de $\tilde{U}$. Ainsi $\xi \in \tilde{V}$; il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $]\xi-\varepsilon,\xi] \subseteq \tilde{V}$ car $\tilde{V}$ est ouvert et $\xi \neq x$. Par suite, ξ n'est pas le plus petit des majorants de $\tilde{U}$. Cette contradiction, montre qu'une telle partition de A n'existe pas.
$\square$

Proposition 6.3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.*

Preuve. Soit $V \subseteq f(X)$ un ensemble ouvert et fermé. Il existe donc O ouvert $\subseteq Y$ et F fermé $\subseteq Y$ tels que $V = O \cap f(X) = F \cap f(X)$. Puisque f est continue, $f^{-1}(O)$ est ouvert et $f^{-1}(F)$ est fermé; mais $f^{-1}(O) = f^{-1}(F) = f^{-1}(V)$ car V est contenu dans l'image de f. Alors $f^{-1}(V)$ est ouvert et fermé dans X. Puisque X est connexe, $f^{-1}(V) = \emptyset$ ou X et, par suite, $V = \emptyset$ ou $f(X)$. $\square$

Corollaire 6.4. *$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, X connexe $\implies$ $f(X)$ est un intervalle.*

Application. Soient I et J des intervalles de type ouvert, semi-ouvert ou fermé de $\mathbb{R}$. Si f est une bijection continue de I sur J, alors I et J sont du même type. (Voir Exercices.)

Proposition 6.5. *A connexe $\subseteq X$ et $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ $\implies$ B connexe.*

Preuve. Soient U, V des ouverts de X tels que: $U \cup V \supseteq B$ et $U \cap V \cap B = \emptyset$. Alors $U \cup V \supseteq A$ et $U \cap V \cap A = \emptyset$. Donc $U \supseteq A$ et $V \cap A = \emptyset$, par exemple. Montrons $U \supseteq B$: soit $x \in B$; alors $x \in \bar{A}$. Si $x \in V$, alors V est un voisinage de x et donc $V \cap A \neq \emptyset$. Par suite $x \in U$. $\square$

Proposition 6.6. *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles connexes de X telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Preuve. Soit U une partie ouverte et fermée de $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ et $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$. On peut supposer $a \in U$ en remplaąnt U par son complémentaire. Pour tout $i \in I$, l'ensemble $U_i := U \cap A_i$ est ouvert et fermé dans A_i. Comme A_{i_0} est connexe, $U_{i_0} = A_i$, car $a \in U_i$. Par suite, $U = A$. □

Remarque. La condition $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ peut être remplacée par $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i$, quand $I = \mathbb{N}$.

Définition 6.7. Soit x un point d'un espace topologique X. La *composante connexe* C_x *de* x est le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x.

Remarque. Les composantes connexes de X sont des parties fermées (Proposition 6.5) disjointes de X (Proposition 6.6); elles ne sont pas ouvertes en général.

Exemple. Les composantes connexes de $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ sont les points et $\{0\}$ n'est pas ouvert.

Définition 6.8. Un espace topologique X est *localement connexe* si tout point de X admet une base de voisinages connexes.

Exemple. Le serpent $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \,\text{et}\, |y| \leq 1 \quad \text{ou} \quad x \neq 0 \,\text{et}\, y = \sin(1/x)\}$ est connexe mais non localement connexe car un voisinage de 0 suffisament petit est réunion dénombrable de segments disjoints.

Proposition 6.9. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
- *(a) X est localement connexe;*
- *(b) pour tout ouvert O de X, les composantes connexes de O sont ouvertes;*
- *(c) la topologie de X admet une base d'ouverts connexes.*

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b): Soit O un ouvert de X, $x \in O$ et C_x^O la composante connexe de x dans O. Si y appartient à C_x^O, par (a), il existe un voisinage connexe V de y contenu dans O, car O est un voisinage de y. Alors $C_x^O \cup V$ est connexe (Prop. 6.6); comme $y \in C_x^O \cup V$, on a $C_x^O \cup V \subseteq C_x^O$ par maximalité et donc $V \subseteq C_x^O$.
(b)$\Rightarrow$(c): Il suffit d'écrire $O = \bigcup_{x\in O} C_x^O$.
(c)$\Rightarrow$(a): Pour $x \in X$, la famille $\{O \mid O \text{ ouvert connexe }, O \ni x\}$ est une base des voisinages de x. □

Définition 6.10. Un espace topologique est *connexe par arcs* si $\forall x,\, y \in X$ il existe un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Proposition 6.11. *Un espace topologique X est connexe par arcs si, et seulement si, X est connexe et chaque point de X admet un voisinage connexe par arcs.*

Preuve. Supposons X connexe par arcs. Fixons $a \in X$; alors, pour tout $x \in X$, il existe $\gamma_x : [0,1] \longrightarrow X$ continu tel que $\gamma_x(0) = a$ et $\gamma_x(1) = x$. Puisque $\gamma_x([0,1])$ est connexe (Prop. 6.3), on a $X = \bigcup_{x \in X} \gamma_x([0,1])$ est connexe (Prop. 6.6). L'ensemble X est un voisinage connexe par arcs de chaque point de X.

Réciproquement, soit U l'ensemble des points de X qu'on peut relier à a donné. Alors U est ouvert car si $x \in U$ et si V est un voisinage connexe par arcs de x, tout $y \in V$ peut être relié à a, en transitant par x; donc $V \subseteq U$. Le complémentaire de U est aussi ouvert car si $x \notin U$ et si V est un voisinage connexe par arcs de x, alors $U \cap V = \emptyset$. Comme $U \neq \emptyset$, on doit avoir $U = X$. $\square$

Application. Pour O ouvert de $\mathbb{R}^n$, connexe équivaut à connexe par arcs.

7. Compacité

Définition 7.1. Un espace topologique X est *compact* si
(i) X est séparé;
(ii) tout recouvrement ouvert de X contient un sous-recouvrement fini, i.e., $\forall\{U_i\}_{i\in I}$ famille d'ouverts de X satisfaisant $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, $\exists J$ fini $\subseteq I$ tel que $\bigcup_{i\in J} U_i = X$.

Un sous-ensemble A de X est *compact* si l'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact, i.e., A est séparé et $\forall\{U_i\}_{i\in I}$ famille d'ouverts de X satisfaisant $\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq A$, $\exists J$ fini $\subseteq I$ tel que $\bigcup_{i\in J} U_i \supseteq A$.

Remarque. La condition (ii) est équivalente à
(ii') $\forall\{F_i\}_{i\in I}$ famille de fermés de X satisfaisant $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$, $\forall J$ fini $\subseteq I$, on a $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Exemples. 1) Tout espace infini discret est non compact.
2) Dans $\mathbb{R}^n$, compact équivaut à fermé borné.

Proposition 7.2.
(a) A compact $\subseteq X$ séparé $\Longrightarrow$ A fermé.
(b) A fermé $\subseteq X$ compact $\Longrightarrow$ A compact.

Preuve. (a): Soit $y \in X \setminus A$. Puisque X est séparé, pour tout $x \in A$ il existe U_x voisinage ouvert de x et V_x voisinage ouvert de y disjoints. Commme A est compact, un nombre fini de U_x recouvrent A, soit $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Alors $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ et $V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ séparent A et y. Donc $X \setminus A$ est ouvert.
(b): Tout recouvrement ouvert de A se complète en un recouvrement ouvert de X en ajoutant l'ouvert $X \setminus A$. Par compacité de X on en tire un sous-recouvrement fini. Ce dernier, privé de $X \setminus A$, est un sous-recouvrement fini du recouvrement donné. □

Proposition 7.3. *$f : X \longrightarrow Y$ continue, X compact et Y séparé $\Longrightarrow$ $f(X)$ compact.*

Preuve. L'image réciproque de tout recouvrement ouvert de $f(X)$ est un recouvrement ouvert de X. □

Application. Toute fonction réelle continue sur un espace compact atteint ses bornes, i.e., $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et X compact $\Longrightarrow$ $\exists a, b \in X$ tels que $\sup f = f(a)$ et $\inf f = f(b)$.

Corollaire 7.4. *$f : X \longrightarrow Y$ bijective continue, X compact et Y séparé $\Longrightarrow$ f est un homéomorphisme.*

Preuve. Tout fermé de X est compact; son image par f est compacte, donc fermée dans Y (Prop. 7.2 et 7.3). Ceci montre que f^{-1} est continue. □

Exemple. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow Y$ est continue, injective et Y séparé alors $\gamma([0,1])$ est homéomorphe à $[0,1]$.

Proposition 7.5. *Si X est compact, alors X est normal.*

Preuve. Soit A fermé $\subseteq X$ et $y \in X \setminus A$. Alors A est compact d'après (b) Prop. 7.2. La première partie de la preuve de (a) de cette proposition montre qu'on peut séparer A et y. Donc X est régulier. Le théorème 5.3 s'applique, car X est Lindelöf.
On peut aussi terminer la preuve en recouvrant le fermé B disjoint de A par un nombre fini d'ouverts disjoints d'un voisinage ouvert de A. $\square$

Définition 7.6. Un espace topologique X est *séquentiellement compact* si X est séparé et si toute suite de X admet une sous-suite convergente, i.e., pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X, il existe une suite $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ croissante de $\mathbb{N}$ et $x \in X$ tels que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Remarque. Tout espace métrique séquentiellement compact est *complet*, i.e. toute suite de Cauchy de cet espace est convergente.

Lemme (Nombre de Lebesgue). *Soit X un espace métrique séquentiellement compact. Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, alors il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall x \in X, \exists i \in I \quad \textit{tel que} \quad B(x,r) \subseteq U_i.$$

Preuve. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{\rho > 0 \mid \exists\, i \in I \text{ tel que } B(x, 2\rho) \subseteq U_i\}$ est non vide. Soit ρ_x sa borne supérieure. On a donc, $\forall x \in X$, $\exists\, i \in I$ tel que $B(x,\rho_x) \subseteq U_i$. Il suffit de montrer que $\rho := \inf_x \rho_x$ est non nul et de prendre $r := \rho$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X avec $\rho_{x_n} \to 0$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer $x_n \to x \in X$. Comme ρ_x est > 0 et x_n appartient $B(x, \rho_x/2)$ pour n assez grand, on a $\rho_{x_n} \geq \rho_x/4$. Contradiction. $\square$

Théorème 7.7. *Soit X un espace métrique. Alors*

$$X \textit{ séquentiellement compact} \iff X \textit{ compact.}$$

Preuve.
$\Rightarrow$) Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X et $r > 0$ son nombre de Lebesgue. On choisit $x_0 \in X$; si $B(x_0, r) = X$, on peut recouvrir X par un seul des U_i. Sinon, on choisit $x_1 \in X \setminus B(x_0, r)$. On a donc $d(x_1, x_0) \geq r$. Si $B(x_0,r) \cup B(x_1,r) = X$, on peut recouvrir X par 2 des U_i. Sinon, on choisit $x_2 \in X \setminus (B(x_0,r) \cup B(x_1,r))$. Si ce procédé ne s'arrête pas, on construit ainsi une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $d(x_n, x_j) \geq r$ pour $n > j$. Puisqu'une telle suite n'admet pas de sous-suite convergente, le procédé s'arrête, d'où l'existence d'un sous-recouvrement fini de $\{U_i\}_{i\in I}$.
$\Leftarrow$) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. On pose $F_n := \mathrm{adh}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}, \ldots\}$. Puisque toute intersection finie de ces fermés est non vide, il existe $x \in \bigcap_n F_n$. Comme $x \in F_0$, il existe $n_1 > 0$ tel que $d(x, x_{n_1}) < 1$. Comme $x \in F_{n_1}$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $d(x, x_{n_2}) < 1/n_1$. Par récurrence, on construit n_{k+1} tel que $n_{k+1} > n_k$ et $d(x, x_{n_{k+1}}) < 1/n_k$. D'où l'existence d'une sous-suite convergente de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Théorème 7.8 (Tychonoff). *$X = \prod_{i\in I} X_i$ compact $\iff \forall i \in I,\ X_i$ compact.*

Preuve. $\Rightarrow$) Découle de la proposition 7.3 car $X_{i_0} \cong \{x \in X \mid x_i = a_i,\ \forall i \neq i_0\}$.
$\Leftarrow$) On considère les familles $\mathcal{F}$ de parties de X qui ont la propriété d'intersection finie

$$(\textit{pif}):\ \bigcap_{F\in\mathcal{F}'} F \neq \emptyset \text{ pour toute partie } \mathcal{F}' \textit{ finie} \text{ de } \mathcal{F}.$$

Ces familles forment un ensemble inductif, car si les $\mathcal{F}_i$ ont (*pif*) et sont totalement ordonnées par inclusion, alors $\bigcup \mathcal{F}_i$ a (*pif*).
Il suffit de montrer (d'après (ii')) que si $\mathcal{F}$ a (*pif*), alors $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \bar{F} \neq \emptyset$. D'après le lemme de Zorn, on peut supposer $\mathcal{F}$ maximale.
Pour $i \in I$, la famille $\mathrm{pr}_i(\mathcal{F}) := \{\mathrm{pr}_i(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ satisfait aussi (*pif*), car $\mathrm{pr}_i(\bigcap F) \subseteq \bigcap \mathrm{pr}_i(F)$. Par compacité de X_i, il existe $x_i \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{\mathrm{pr}_i(F)}$. Posons $x := (x_i)_{i\in I}$. A voir: $x \in \bar{F}$, $\forall F \in \mathcal{F}$.
Soit $U_i \in \mathcal{V}_{x_i}$; on a $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \cap F \neq \emptyset$ car $U_i \cap \mathrm{pr}_i(F) \neq \emptyset$ donne l'existence de $y \in F$ avec $y_i \in U_i$. On utilise alors le lemme suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 7.9. *Soit $\mathcal{F}$ maximale satisfaisant (pif). Alors*
(a) F_1 et $F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;
(b) $A \subseteq X$ et $A \cap F \neq \emptyset$, $\forall F \in \mathcal{F} \implies A \in \mathcal{F}$. □

La partie (b) montre $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$; la partie (a) entraîne que les voisinages élémentaires de x appartiennent à $\mathcal{F}$. Donc tout voisinage de x rencontre tout $F \in \mathcal{F}$. □

8. Compacité locale, théorème de Baire

Définition 8.1. Un espace topologique X est *localement compact* si
(i) X est séparé;
(ii) tout point de X admet un voisinage compact.

Remarque. La condition (ii) est équivalente à
(ii') tout point de X admet une base de voisinages compacts.
En effet, soit K un voisinage compact de x et $V \in \mathcal{V}_x$. Il existe donc un ouvert $O \subseteq K \cap V$ qui contient x. Comme K est normal, il existe encore un ouvert U de K tel que: $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq O$. Comme $U = \tilde{U} \cap K = \tilde{U} \cap O$, avec $\tilde{U}$ ouvert de X, on voit que U est un ouvert de X. Puisque $\bar{U}$ est fermé dans K, il est compact. Donc $\bar{U}$ est un voisinage compact de x contenu dans V.

Exemples. 1) Tout espace compact est localement compact.
2) $\mathbb{R}^n$ est localement compact.
3) ℓ^2 n'est pas localement compact.

Théorème 8.2 (de Baire). *Si X est un espace métrique complet ou si X est localement compact, alors la propriété suivante a lieu:*
(B) $\forall n \in \mathbb{N}$, O_n *ouvert dense de* $X \implies \bigcap_n O_n$ *est dense.*

Définition. Un *espace de Baire* est un espace topologique dans lequel (B) a lieu.

Remarque. La propriété (B) est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \text{ fermé de } X \text{ et } {F_n}^\circ = \emptyset \implies (\bigcup_n F_n)^\circ = \emptyset.$$

Preuve du théorème. Il s'agit de montrer que si O est un ouvert non vide, alors $O \cap \bigcap_n O_n$ est non vide.
Cas X métrique complet. On construit par récurrence une suite de boules B_n de rayon $\leq 1/n$ telles que:

$$(*) \qquad \overline{B_{n+1}} \subseteq O_n \cap B_n \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad \overline{B_1} \subseteq O_0 \cap O.$$

L'existence de B_{n+1} provient de $O_n \cap B_n \neq \emptyset$. Les centres des boules B_n forment une suite de Cauchy, de limite x. Alors $x \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{B_n} \subseteq \bigcap_{n\geq 0} O_n \cap O$.
Cas X localement compact. On construit par récurrence une suite d'ouverts $B_n \neq \emptyset$ avec $\overline{B_n}$ compact satisfaisant (*). Existence de B_1: $O_0 \cap O$ contient x_0; par compacité locale, il contient aussi un voisinage compact K de x_0. Pour B_1, on peut prendre n'importe quel voisinage ouvert de x_0 contenu dans K. Les fermés $\overline{B_n}$ ont (*pif*) et ainsi $\bigcap_{n\geq 1} \bar{B}_n \neq \emptyset$. □

Proposition 8.3. *Si* X *est un espace de Baire, alors*
$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n$ *fermé de* X *et* $\bigcup F_n = X \implies \overline{\bigcup_n {F_n}^\circ} = X$.

Preuve. Soit G le fermé $X \setminus \overline{\bigcup {F_n}^\circ}$. Pour tout $k \geq 0$, on a $(F_k \cap G)^\circ = {F_k}^\circ \cap G^\circ \subseteq {F_k}^\circ \cap G = \emptyset$. Donc $\left(\bigcup (F_k \cap G)\right)^\circ = G^\circ = \emptyset$ ou bien $\overline{\bigcup {F_n}^\circ} = X$. □

Applications.
1. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et si, $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$, alors f est continue sur une intersection dénombrable d'ouverts denses de $[0,1]$. En particulier, l'ensemble des points où f est continue est non vide.
2. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, dérivables en aucun point est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $C^0([0,1])$. Il est donc dense dans $C^0([0,1])$.

Définition 8.4. Le *compactifié d'Alexandroff* d'un espace X localement compact est l'ensemble $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ muni de la topologie suivante:

$$\hat{U} \text{ ouvert de } \hat{X} \iff \begin{cases} \hat{U} \text{ ouvert de } X, & \text{si } \infty \notin \hat{U}, \\ \hat{X} \setminus \hat{U} \text{ compact de } X, & \text{si } \infty \in \hat{U}. \end{cases}$$

Exemples.
1. $\widehat{]0,1[}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.
2. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.
3. $X = [0,1] \times \widehat{\mathbb{R}_\delta}$ est compact, donc normal mais contient un sous-espace $X \setminus \{(0,\infty)\}$ qui n'est pas normal. Ici, $\mathbb{R}_\delta$ est la droite réelle munie de la topologie discrète.

Proposition 8.5. $\hat{X}$ *est compact.*

Preuve. $\hat{X}$ est séparé car tout $x \neq \infty$ a un voisinage compact; son intérieur et son complémentaire séparent x et ∞. Soit $\{\hat{U}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $\hat{X}$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $\infty \in \hat{U}_{i_0}$. Alors $\{\hat{U}_i \setminus \{\infty\}\}_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ est un recouvrement ouvert de $\hat{X} \setminus \hat{U}_{i_0}$ qui est compact. D'où l'existence d'un sous-recouvrement fini. □

Remarques. Soit X un espace localement compact.
1. La topololgie induite par $\hat{X}$ sur X est la topologie donnée sur X. En effet, pour tout ouvert $\hat{U}$ de $\hat{X}$, l'ensemble $\hat{U} \cap X = \hat{U} \setminus \{\infty\}$ est un ouvert de X.
2. Le sous-espace X est dense dans $\hat{X}$ si, et seulement si, X n'est pas compact. (Exercice.)

Proposition 8.6. *Un espace topologique est localement compact si, et seulement si, il est homéomorphe à un sous-ensemble ouvert d'un espace compact.*

Preuve. Supposons X localement compact. Alors $X = \hat{X} \setminus \{\infty\}$ et $\{\infty\}$ est fermé. Réciproquement, si X est ouvert dans K compact, alors pour tout $x \in X$, il existe O ouvert de K tel que $x \in O \subseteq \bar{O} \subseteq X$, par normalité. Comme O est un ouvert de X, $\bar{O}$ est un voisinage compact de x dans X. □

Définition 8.7. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est *propre* si
$$L \text{ compact} \subseteq Y \implies f^{-1}(L) \text{ compact.}$$

Proposition 8.8. *Soient X, Y des espaces localement compacts, $f : X \longrightarrow Y$ continue et $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ le prolongement de f défini par $\hat{f}(\infty_X) = \infty_Y$. Alors $\hat{f}$ est continue si, et seulement si, f est propre.*

Preuve. Supposons $\hat{f}$ continue et L compact $\subseteq Y$. Alors $\hat{f}^{-1}(\hat{Y} \setminus L) = \hat{X} \setminus f^{-1}(L)$ est un voisinage de l'infini, donc de la forme $\hat{X} \setminus K$, avec K compact. Si, réciproquement, f est propre, alors $\hat{f}$ est continue à l'infini, donc partout. □

Application. Si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et propre entre espaces localement compacts, alors f est fermée, i.e., l'image par f de tout fermé est fermée. Si elle est en plus bijective, c'est un homéomorphisme.

Remarque. Une application propre n'est pas nécessairement fermée, e.g. l'application identité de $\{0,1\}$ discret dans $\{0,1\}$ grossier.

Tableau récapitulatif

$$\begin{tikzcd}
\text{métrique} \arrow[r, Rightarrow] & \text{normal} \arrow[r, Rightarrow] & \text{régulier} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Hausdorff} \\
\begin{array}{c}\text{métrique}\\ \text{séparable}\end{array} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{Lindelöf}\\ \text{régulier}\end{array} \arrow[u, Rightarrow] & & \\
\begin{array}{c}\text{métrique}\\ \text{compact}\end{array} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{compact} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{localement}\\ \text{compact}\end{array} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \\
\begin{array}{c}\text{métrique}\\ \text{complet}\end{array} \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{Baire} &
\end{tikzcd}$$

9. Espaces quotients, Actions de groupes

Définition 9.1. Soient X un ensemble et R une relation d'équivalence sur X. L'ensemble des classes d'équivalence de X suivant R est noté ${}^{X}\!/_{R}$, $\pi : X \longrightarrow {}^{X}\!/_{R}$ est l'application canonique qui associe à $x \in X$, sa classe $[x] \in {}^{X}\!/_{R}$.
Quand X est muni d'une topologie, la *topologie quotient* sur ${}^{X}\!/_{R}$ est définie par

$$U \text{ ouvert } \subseteq {}^{X}\!/_{R} \iff \pi^{-1}(U) \text{ ouvert } \subseteq X.$$

Rappel. On dit qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est *compatible* avec R si:

$$\forall x, y \in X,\ xRy \implies f(x) = f(y).$$

Dans ce cas, on note $[f] : {}^{X}\!/_{R} \longrightarrow Y$ l'application définie par $[f]([x]) = f(x)$.

Proposition 9.2. *La topologie quotient est l'unique topologie sur* ${}^{X}\!/_{R}$ *telle que*

$$\forall f : X \longrightarrow Y \textit{ compatible avec } R\textit{, on a : } f \textit{ continue } \iff [f] \textit{ continue.}$$

Preuve. On suppose ${}^{X}\!/_{R}$ muni de la topologie quotient. Si f est continue et si $V \subseteq Y$ est ouvert, alors $\pi^{-1}([f]^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ est ouvert et donc $[f]^{-1}(V)$ est ouvert. Si $[f]$ est continue, alors $f = [f]\circ\pi$ l'est car π est continue.
Supposons maintenant que ${}^{X}\!/_{R}$ est muni d'une topologie satisfaisant la condition ci-dessus; notons Z cet espace topologique. L'application identique $Z \longrightarrow {}^{X}\!/_{R}$ est continue car $X \longrightarrow {}^{X}\!/_{R}$ est continue. L'application identique $Z \longrightarrow Z$ est continue, donc la projection canonique $X \longrightarrow Z$ est continue et d'après la première partie, l'application identique ${}^{X}\!/_{R} \longrightarrow Z$ est continue. □

Exemples.
1) $X = [a, b]$; $xRy \iff x = y$ ou $(x = a$ et $y = b)$ ou $(x = b$ et $y = a)$. Alors ${}^{X}\!/_{R}$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.
2) $X = [a, b] \times [-1, 1]$;
$xRy \iff x = y$ ou $(x_1 = a,\ y_1 = b$ et $x_2 = y_2)$ ou $(x_1 = b,\ y_1 = a$ et $x_2 = y_2)$.
Alors ${}^{X}\!/_{R}$ est homéomorphe au cylindre $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$.
3) ${}^{[a, b] \times [-1,\ 1]}\!/_{(a, x_2)\, \sim\, (b, -x_2)}$ est homéomorphe au ruban de Möbius.
4) Pour X quelconque et $A \subseteq X$ on note ${}^{X}\!/_{A}$ le quotient de X par la relation

$$xRy \iff x = y \quad \text{ou} \quad x \text{ et } y \in A.$$

Cas particulier: le cône sur X défini par ${}^{X \times [0, 1]}\!/_{X \times \{1\}}$.

Proposition 9.3. *Soient R et S des relations d'équivalence sur X et Y. Alors l'application canonique* $\phi : {}^{X \times Y}\!/_{R \times S} \longrightarrow {}^{X}\!/_{R} \times {}^{Y}\!/_{S}$ *est continue bijective.*

Preuve. L'application canonique $X \times Y \longrightarrow X/R \times Y/R$ est continue. Elle passe au quotient et ainsi ϕ est continue d'après la proposition 9.2. □

Proposition 9.4. *Soit R une relation d'équivalence sur X. Si R est ouverte (i.e., l'image par $\pi : X \longrightarrow X/_R$ de tout ouvert de X est est ouverte) et si le graphe Γ de R est fermé, alors $X/_R$ est séparé.*

Preuve. Soient $x, y \in X$ tels que $\pi(x) \neq \pi(y)$. Alors $(x, y) \notin \Gamma$ et il existe des ouverts U et $V \subseteq X$ tels que $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$. On en déduit $\pi^{-1}(\pi(U)) \cap \pi^{-1}(\pi(V)) = \emptyset$ car si z est dans l'intersection, il existe $u \in U$ et $v \in V$ avec zRu et zRv et donc uRv. D'où $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$. Comme $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont ouverts, on a séparé $\pi(x)$ et $\pi(y)$. $\square$

Définition 9.5. Soit G un groupe muni d'une topologie. On dit que G est un *groupe topologique* si les applications $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$ et $G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ sont continues. Pour un sous-groupe H de G, le quotient ${}_H\backslash^G$ est le quotient de G par la relation d'équivalence $x \sim y \iff \exists\, h \in H$ tel que $y = hx$.

Exemple. ${}_{\mathbb{Z}^2}\backslash^{\mathbb{R}^2}$ est homéomorphe au tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Définition 9.6. Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. On dit que G *opère* ou *agit* dans X si on a une application continue $\alpha : G \times X \longrightarrow X$, $\alpha(g, x) = g \cdot x$ qui satisfait

$$\forall g, h \in G,\ \forall x \in X : g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x \text{ et } 1 \cdot x = x.$$

On note ${}_G\backslash^X$ le quotient de X par la relation d'équivalence

$$xRy \iff \exists\, g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x.$$

Pour $x \in X$ la classe $[x] = \{y \in X \mid \exists\, g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x\}$ est notée $G \cdot x$; on l'appelle l'*orbite* de x sous l'action de G. La partie $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est un sous-groupe de G appelé *sous-groupe d'isotropie* ou *stabilisateur* de x.

Exemple. $\mathbb{Z}$ agit dans $\mathbb{S}^1$ par $(m, x) \mapsto e^{2i\pi m\xi}x$, avec $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ici, $\mathbb{Z} \cdot x$ est dense dans $\mathbb{S}^1$, pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{Z}_x = \{0\}$.

Remarque. Pour $x \in X$, l'application canonique $[\cdot x] : G/_{G_x} \longrightarrow G \cdot x$ associée à $\cdot x : G \longrightarrow G \cdot x$ est continue bijective.

Lemme 9.7. *Si G opère dans X alors l'application canonique $X \longrightarrow {}_G\backslash^X$ est ouverte.*

Preuve. Si $U \subseteq X$ est ouvert, il s'agit de voir que $\{x \mid \exists\, g \in G \text{ tel que } g \cdot x \in U\}$ est ouvert. Or cet ensemble est égal à $\mathrm{pr}_2(\alpha^{-1}(U))$. $\square$

Proposition 9.8. *Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Alors*

$$ {}_{H}\backslash^{G} \text{ est séparé} \iff H \text{ est fermé.} $$

Preuve. Supposons ${}_{H}\backslash^{G}$ séparé; alors $\pi^{-1}(\pi(e)) = H$ est fermé.
Réciproquement, si H est fermé, l'ensemble $\{(x,y) \in G \times G \mid (x, yx^{-1}) \in G \times H\}$ est fermé, car c'est l'image réciproque de $G \times H$ par $(x,y) \mapsto (x, yx^{-1})$; comme cet ensemble est égal à $\{(x, hx) \mid x \in G,\ h \in H\}$ qui est le graphe de la relation définie par H, la proposition 9.4 s'applique via le lemme 9.7. □

Définition 9.9. Un groupe topologique agit *proprement* dans un espace topologique X si l'application $\beta : G \times X \longrightarrow X \times X$ donnée par $\beta(g,x) = (g \cdot x, x)$ est propre.

Lemme. *Chacune des conditions suivantes est équivalente à la propreté d'une action de G dans X, pour G et X séparés:*
(a) $\forall K, L$ compacts $\subseteq X$, $\{g \in G \mid g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ est compact;
(b) $\forall K$ compact $\subseteq X$, $\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est compact.

Théorème 9.10. *Soient G un groupe topologique localement compact, X un espace topologique localement compact et $x \in X$. Si G agit proprement dans X, alors*
(a) le quotient ${}_{G}\backslash^{X}$ est séparé;
(b) l'application $G \longrightarrow X$ donnée par $g \mapsto g \cdot x$ est propre;
(c) l'orbite $G \cdot x$ est fermée;
(d) l'application $[\cdot x] : {}^{G}/_{G_x} \longrightarrow G \cdot x$ est un homéomorphisme.

Preuve. (a) Le graphe de la relation définie par G est fermé car c'est l'image de l'application β (cf. application de la prop. 8.8). Le lemme 9.7 et la proposition 9.4 permettent de conclure.
(b) L'image réciproque du compact K de X est égale à la première projection de $\beta^{-1}(K \times \{x\})$ qui est compact. Elle est donc compacte.
(c) Découle de (b) et de la proposition 8.8.
(d) Le quotient ${}^{G}/_{G_x}$ est séparé puisque G_x est compact. Donc ${}^{G}/_{G_x}$ est localement compact et on utilise encore l'application de la proposition 8.8. □

10. Compléments sur les espaces métriques

Proposition 10.1. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Preuve. Pour $n \geq 1$, il existe $N(n) \in \mathbb{N}$ et $x_{n1}, \ldots, x_{nN(n)} \in X$ tels que les boules $B(x_{nj}, 1/n)$, pour $1 \leq j \leq N(n)$, recouvrent X. Vérifions que l'ensemble $\{x_{nj} \mid n \geq 1,\ 1 \leq j \leq N(n)\}$ est dense dans X. Soit $O \neq \emptyset$ un ouvert de X; il existe $x_0 \in O$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subseteq O$. Pour $1/n < r$, il existe $j \in [1, N(n)]$ tel que $x_0 \in B(x_{nj}, 1/n)$. Donc $x_{nj} \in B(x_0, 1/n) \subseteq B(x_0, r) \subseteq O$. □

Définition 10.2. Un espace topologique localement compact est *dénombrable à l'infini* s'il est réunion dénombrable de sous-ensembles compacts.

Lemme 10.3. *Pour X espace métrique localement compact et $x \in X$, on pose*

$$r_x = \sup\{r \geq 0 \mid D(x, 2r) \text{ compact } \}\ , \quad \text{où} \quad D(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Alors $D(x, r_x)$ est compact et
a) $\forall x \in X,\ r_x = \infty$ ou $\forall x \in X,\ r_x < \infty$;
b) dans le deuxième cas, on a:

$$|r_x - r_y| \ \leq\ \tfrac{1}{2} d(x, y), \quad \forall x, y \in X\,,$$

et donc la fonction de X dans $\mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto r_x$ est uniformément continue.

Preuve. (a) Si, pour un $a \in X$, $r_a = \infty$ alors $r_x = \infty$, pour tout $x \in X$ car $D(x, r) \subseteq D(a, N)$ pour N assez grand et $D(a, N)$ est compact.
(b) On peut supposer $r_x \geq r_y$. Si $d(x, y) \leq 2r_x$ alors $D(y, 2r_x - d(x, y)) \subseteq D(x, 2r_x)$ et donc $r_y \geq r_x - \frac{1}{2} d(x, y)$. D'où $r_x - r_y \leq \frac{1}{2} d(x, y)$. Lorsque $d(x, y) > 2r_x$, on a évidemment $r_x - r_y < \frac{1}{2} d(x, y)$. Ainsi $|r_x - r_y| \leq \frac{1}{2} d(x, y)$. □

Proposition 10.4. *Soit X un espace métrique et localement compact. Alors X est séparable si, et seulement si, X est dénombrable à l'infini.*

Preuve. Si X est dénombrable à l'infini, la proposition 10.1 entraîne aussitôt que X est séparable. Montrons la réciproque. On peut supposer $r_x < \infty$, pour tout $x \in X$ car sinon, $X = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} D(x, N)$ d'après le lemme 10.3. Soit $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense de X. On pose $r_n := r_{x_n}$. Vérifions $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D(x_n, r_n) = X$. Soit $x \in X$; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < r_x/2$. Comme $|r_n - r_x| \leq r_x/4$ d'après le lemme 10.3, on a $r_n > 3r_x/4$. Donc $x \in D(x_n, r_n)$. □

Théorème 10.5. *Soit X un espace métrique connexe localement compact. Alors X est dénombrable à l'infini.*

Preuve. Soit K un sous-ensemble compact de X. Alors $\bigcup_{x \in K} D(x, r_x)$ est compact. En effet, si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de cette réunion, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément x_n de K tel que $d(x_n, y_n) \leq r_{x_n}$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer $x_n \to x \in K$ et $r_{x_n} \to r_x$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, $d(x_n, x) \leq \varepsilon r_x$ et donc $d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) \leq r_{x_n} + d(x_n, x) \leq r_x + 3d(x_n, x)/2 \leq (1+3\varepsilon/2)r_x$. Par suite, $y_n \in D(x, (1+3\varepsilon/2)r_x)$ qui est compact. Ainsi $y \in D(x, (1+3\varepsilon/2)r_x)$, et comme ε est arbitraire, $y \in D(x, r_x)$.

On pose, pour $x_0 \in X$, $K_0 = D(x_0, r_{x_0})$ et $K_{n+1} = \bigcup_{x \in K_n} D(x, r_x)$. Soit $U := \bigcup_{n \geq 0} K_n$. Alors U est ouvert car $x \in K_n \implies B(x, r_x) \in K_{n+1}$. Montrons que U est aussi fermé: si $x_p \in U$ et $x_p \to x \in X$ alors $d(x, x_p) < r_x/2$ pour p assez grand et donc $d(x, x_p) < r_{x_p}/2 + d(x, x_p)/4$; d'où $d(x, x_p) < 2r_{x_p}/3$. Ceci entraîne que $x \in D(x_p, r_{x_p}) \subseteq U$. Puisque X est connexe, on a $U = X$. $\square$

Proposition 10.6. *Soit X un espace topologique et $C_b(X;\mathbb{R})$ l'espace normé des fonctions réelles continues bornées sur X avec la norme de la convergence uniforme. Alors $C_b(X;\mathbb{R})$ est complet.*

Preuve. C'est l'argument classique à 3 epsilons: soit $f_{n n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de l'espace $C_b(X,\mathbb{R})$. Alors, $\forall x \in$X, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Soit $f(x)$ sa limite. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $|f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$, pour $n, p > N$ et $\forall x \in X$; alors $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ si bien que $\sup|f(x)| \leq \sup|f_n(x)| + \varepsilon$ et donc f est bornée. Pour $x_0 \in X$ et $n > N$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, x_0) < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ car f_n est continue en x_0. D'où

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0|) \leq 3\varepsilon,$$

qui montre la continuité de f. $\square$

Proposition 10.7. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $(\tilde{X},\, \tilde{d})$ tel que X soit isométrique à une partie dense de $\tilde{X}$. Un tel $\tilde{X}$ est unique à isométrie près; c'est le complété de X.*

Remarque. Le complété de X s'identifie au quotient de l'espace des suites de Cauchy sur X par une relation d'équivalence.

Preuve. On plonge X dans $C_b(X,\mathbb{R})$ de la manière suivante: pour $a \in X$ fixé, $x \mapsto \varphi_x(y) = d(x,y) - d(y,a)$. Alors $\varphi_x \in C_b(X,\mathbb{R})$ car $|d(x,y) - d(y,a)| \leq d(x,a)$. On a $|\varphi_x(y) - \varphi_{x'}(y)| = |d(x,y) - d(x',y)| \leq d(x,x')$ et, en fait, $||\varphi_x - \varphi_{x'}|| = d(x,x')$ (en prenant $y = x'$). Comme l'adhérence de $\{\varphi_x \mid x \in X\}$ est un sous-espace complet, c'est le complété de X.

Unicité en exercice. $\square$

11. Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Définition 11.1. Un *chemin (continu)* ou *courbe paramétrée dans* $\mathbb{R}^3$ est une application continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, avec $a < b \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\gamma([a,b])$ s'appelle le *support* de γ.

Remarque. La donnée d'un chemin γ dans $\mathbb{R}^3$ équivaut à la donnée de trois fonctions continues $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemples. Les chemins dans $\mathbb{R}^3$ définis ci-dessous ont tous le même support :
1) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)\,,\ t \in [0, 2\pi]\,;$
2) $\delta(t) = (\cos(-t), \sin(-t), 2\pi - t)\,,\ t \in [0, 2\pi]\,;$
3) $\varepsilon(t) = (\cos t^2, \sin t^2, t^2)\,,\ t \in [0, \sqrt{2\pi}]\,.$

Définition 11.2. Deux chemins $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\delta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont *équivalents* s'il existe $\varphi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ continue bijective telle que $\gamma = \delta \circ \varphi$. Notation: $\gamma \sim \delta$.

Exemple. Les trois chemins de l'exemple précédent sont équivalents. Par contre, les deux chemins suivants dans $\mathbb{R}^2$ ont le même support mais ne sont pas équivalents:
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ et $\delta(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 4\pi]$.

Remarques.
1) Deux chemins équivalents ont le même support.
2) Deux chemins injectifs ayant même support sont équivalents (Exercice 11.1).

Définition 11.3. Une *courbe dans* $\mathbb{R}^3$ est une classe d'équivalence de courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^3$, pour la relation d'équivalence ci-dessus. Tout chemin qui représente une courbe est une *représentation paramétrique* ou une *paramétrisation* de cette courbe.

Définition 11.4. Une *courbe orientée* dans $\mathbb{R}^3$ est une classe d'équivalence de chemins dans $\mathbb{R}^3$ pour la relation
$\gamma \overset{\rightarrow}{\sim} \delta \iff \exists\, \varphi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ continue bijective *croissante* telle que $\gamma = \delta \circ \varphi$.
Une *courbe* C^1 est une classe d'équivalence de chemins C^1 pour la relation
$\gamma \overset{C^1}{\sim} \delta \iff \exists\, \varphi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijective C^1 et d'inverse C^1 telle que $\gamma = \delta \circ \varphi$.

Exemples. Pour les trois chemins C^1 dans $\mathbb{R}^2$ suivants :
$\gamma(t) = (t, 0)\,,\ \delta(t) = (t^2, 0)\,,\ \varepsilon(t) = (1-t, 0), \quad t \in [0,1],$
on a : $\gamma \sim \delta,\ \gamma \overset{C^1}{\not\sim} \delta,\ \gamma \overset{\rightarrow}{\not\sim} \varepsilon,\ \gamma \overset{C^1}{\sim} \varepsilon$.

Remarque. Soit Γ une courbe C^1; si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ et $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ sont deux paramétrisations de Γ, alors il existe $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijective C^1 et d'inverse C^1 telle que $\gamma(s) = \delta(\varphi(s))$, $\forall s \in [a,b]$. Par la règle de dérivation des fonctions composées, il s'ensuit que :

$$\dot\gamma(s) = \dot\varphi(s) \cdot \delta'(\varphi(s)), \quad \forall s \in [a,b].$$

Les vecteurs $\dot\gamma(s)$ et $\delta'(t)$ pour $t=\varphi(s)$ sont donc colinéaires. De plus, puisque $\dot\varphi(s)\neq 0$, $\forall s\in[a,b]$, on a:

$$\dot\gamma(s)=0 \iff \delta'(t)=0\,.$$

Définition 11.5. Soit Γ un courbe C^1 dans $\mathbb{R}^3$. Un point de Γ, représenté par (γ,s), est *régulier* si $\gamma'(s)$ est différent de 0; la droite affine de direction $\dot\gamma(s)$ passant par le point $\gamma(s)$ s'appelle la *tangente* à Γ en ce point. La courbe Γ est *régulière* si tous ses points sont réguliers.

Exemple. Le graphe d'une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1 est le support de la courbe régulière injective dans $\mathbb{R}^2$ paramétrée par $\gamma(t)=(t,f(t)),\quad t\in[a,b]$.

Définition 11.6. Soit Γ une courbe dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$. Pour un partage $\mathcal{P}=\{t_0=a<t_1<\cdots<t_N=b\}$ de $[a,b]$, on désigne par $L(\gamma,\mathcal{P})$ la longueur de la "courbe polygonale" de sommets $\gamma(t_0),\ldots,\gamma(t_N)$: $L(\gamma,\mathcal{P})=\sum_{i=0}^{N-1}||\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})||$; on pose

$$L(\gamma)=\sup L(\gamma,\mathcal{P})\ \in\mathbb{R}_+\cup\{\infty\},$$

où la borne supérieure est prise sur tous les partages possibles de $[a,b]$.
Si δ représente aussi Γ, il est immédiat que $L(\delta)=L(\gamma)$; la longueur de Γ est définie par

$$L(\Gamma)=L(\gamma),\quad \gamma\in\Gamma.$$

On dit que Γ est *rectifiable* si $L(\Gamma)<\infty$.

Exemple. Pour la courbe paramétrée γ (continue mais pas continûment différentiable) dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(0)=(0,0)$ et $\gamma(t)=(t,t\cos\frac{\pi}{t})$ si $0<t\leq 1$, on a $L(\Gamma)=\infty$.

Proposition 11.7. *Soit Γ une courbe C^1 dans $\mathbb{R}^3$. Alors Γ est rectifiable et pour toute représentation paramétrique $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ de Γ, on a :*

$$L(\Gamma)=\int_a^b||\dot\gamma(t)||dt=\int_a^b\sqrt{(\dot\gamma^1(t))^2+(\dot\gamma^2(t))^2+(\dot\gamma^3(t))^2}dt. \tag{11.1}$$

Preuve. Soit $\mathcal{P}=\{t_0=a,\ldots,t_i,\ldots,t_N=b\}$ un partage de $[a,b]$. On a:

$$\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s,\quad \text{d'où}\quad ||\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)||\leq\int_{t_i}^{t_{i+1}}||\dot\gamma(s)||\,\mathrm{d}s.$$

En sommant de 0 à $N-1$, on obtient $L(\gamma,\mathcal{P})\leq\int||\dot\gamma||$ ce qui montre que Γ est rectifiable.

Pour montrer l'égalité (11.1), soit $\varepsilon > 0$. Puisque $||\dot\gamma||$ est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$||\dot\gamma(s) - \dot\gamma(t)|| \le \varepsilon \quad \text{si} \quad |s-t| \le \delta.$$

Prenons une partition $\mathcal{P}$ de maille plus petite que δ. Pour $s \in [t_i, t_{i+1}]$, la relation précédente donne $||\dot\gamma(s)|| \le ||\dot\gamma(t_i)|| + \varepsilon$. D'où

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\dot\gamma(s)||\,\mathrm{d}s \le ||\dot\gamma(t_i)||(t_{i+1}-t_i) + \varepsilon(t_{i+1}-t_i). \tag{11.2}$$

D'autre part, l'identité $\dot\gamma(t_i) = \dot\gamma(t_i) - \dot\gamma(s) + \dot\gamma(s)$ donne en intégrant

$$\dot\gamma(t_i)(t_{i+1}-t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\dot\gamma(t_i) - \dot\gamma(s))\,\mathrm{d}s + \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i).$$

En prenant la norme, il vient

$$||\dot\gamma(t_i)||(t_{i+1}-t_i) \le \varepsilon(t_{i+1}-t_i) + ||\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)||. \tag{11.3}$$

En conjugant (11.2) et (11.3), on obtient

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\dot\gamma(s)||\,\mathrm{d}s \le ||\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|| + 2\varepsilon(t_{i+1}-t_i).$$

Il reste à sommer de 0 à $N-1$ pour arriver à $\displaystyle\int_a^b ||\dot\gamma|| \le L(\gamma, \mathcal{P}) + 2\varepsilon(b-a)$. □

Lemme 11.8. *Soit Γ une courbe régulière et orientée dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Pour $t \in [a,b]$, soit $\psi(t) := \int_a^t ||\delta'(u)||du$. Alors la fonction $\psi : [a,b] \longrightarrow [0, L(\Gamma)]$ est croissante, bijective de classe C^1 et d'inverse C^1; de plus, $\gamma := \delta \circ \psi^{-1}$ est une paramétrisation de Γ qui satisfait*

$$||\dot\gamma(s)|| = 1, \, \forall s \in [0, L(\Gamma)]. \tag{11.4}$$

Preuve. La fonction ψ est croissante car $\delta'(u) \neq 0$, pour tout u. Son image est $[0, L(\Gamma)]$ par définition de $L(\Gamma)$. Comme elle est continûment différentiable, son inverse l'est aussi ([H-W] III.6.8).
En dérivant la relation $\gamma \circ \psi(t) = \delta(t)$ on obtient

$$\dot\gamma(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = \delta'(t)$$

et donc $||\dot\gamma(s)||\psi'(t) = ||\dot\gamma(s)||||\delta'(t)|| = ||\delta'(t)||$, qui montre (11.4). □

Définition 11.9. La paramétrisation γ ci-dessus s'appelle la *paramétrisation normale* de Γ. On réserve traditionnellement la lettre s pour le paramètre de γ; c'est la *longueur d'arc.*

Remarque. Plusieurs auteurs confondent les notions de courbe, chemin, support.

12. Courbure et Torsion

Les courbes considérées dans ce paragraphe sont des courbes de classe C^3 orientées régulières de l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$. La lettre s désigne la longueur d'arc. Si $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est la paramétrisation normale d'une courbe Γ, le vecteur tangent unitaire au point (γ, s) sera noté

$$e_1(s) := \dot{\gamma}(s).$$

Remarque. $\dot{e}_1(s) = 0, \forall s \in [0, L] \iff \Gamma$ est un segment de droite .

Lemme 12.1. *Soit $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 telle que $||\delta(t)|| = 1$, $\forall t \in [a, b]$. Alors $\dot{\delta}(t) \perp \delta(t)$, $\forall t \in [a, b]$.*

Preuve. Il suffit de dériver $\langle \delta(t) \mid \delta(t) \rangle = 1$ pour obtenir $2\langle \dot{\delta}(t) \mid \delta(t) \rangle = 0$ quel que soit $t \in [a, b]$. □

Définition 12.2. Soit Γ une courbe *2-régulière*, i.e., $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$, $\forall s \in [0, L]$. Le vecteur unitaire

$$e_2(s) := \frac{\dot{e}_1(s)}{||\dot{e}_1(s)||} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{||\ddot{\gamma}(s)||}, \quad s \in [0, L],$$

est appelé *vecteur normal unitaire principal à Γ en (γ, s)*. Le nombre positif (> 0) $\rho(s) = ||\dot{e}_1(s)||$ est la *courbure de Γ en (γ, s)*, son inverse $R(s) = 1/\rho(s)$ est le *rayon de courbure de Γ en (γ, s)*. Ainsi

$$\dot{e}_1(s) = \rho(s) e_2(s).$$

Le plan affine de vecteurs directeurs $e_1(s)$, $e_2(s)$ qui passe par $\gamma(s)$ est le *plan osculateur de Γ en (γ, s)*; le cercle centré en $\gamma(s) + R(s)e_2(s)$ et de rayon $R(s)$, situé dans ce plan, s'appelle le *cercle osculateur de Γ en (γ, s)*.

Exemple. Si Γ a pour support le cercle de rayon R centré en 0 dans $\mathbb{R}^2$, i.e., $\gamma(s) = (R\cos(s/R), R\sin(s/R))$, $s \in [0, 2\pi R]$, alors

$$e_1(s) = (-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}), \qquad \dot{e}_1(s) = (-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}) = \frac{1}{R}e_2(s).$$

Le rayon de courbure est constant égal à R ; le cercle osculateur coïncide avec la courbe.

Proposition 12.3. *Une courbe 2-régulière et son cercle osculateur en un point ont un contact d'ordre ≥ 2, i.e., les développements de Taylor de γ et δ, paramétrisation* *normale du cercle osculateur, sont identiques jusqu'à l'ordre 2. Le cercle osculateur est le cercle qui a le meilleur contact avec la courbe.*

Preuve. Soit γ la paramétrisation normale. Il suffit de vérifier l'affirmation en $s = 0$. La paramétrisation normale du cercle osculateur en $(\gamma, 0)$ est

$$\delta(s) = \gamma(0) + \big(R - R\cos(s/R)\big)e_2(0) + R\sin(s/R)e_1(0), \quad \text{où} \quad R = R(0).$$

En dérivant, il vient, avec $\rho = 1/R$:

$$\dot{\delta}(s) = \sin \rho s \; e_2(0) + \cos \rho s \; e_1(0) \quad \text{et} \quad \ddot{\delta}(s) = \rho \cos \rho s \; e_2(0) - \rho \sin \rho s \; e_1(0).$$

Donc $\delta(0) = \gamma(0)$, $\dot{\delta}(0) = e_1(0) = \dot{\gamma}(0)$ et $\dot{\delta}(0) = \rho \; e_2(0) = \dot{\gamma}(0)$. □

Définition 12.4. Pour une courbe 2-régulière Γ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur unitaire

$$e_3(s) := e_1(s) \wedge e_2(s), \quad s \in [0, L],$$

est le *vecteur binormal unitaire à* Γ *au point* (γ, s). La base orthonormée directe $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ de $\mathbb{R}^3$ est appelée *trièdre de Serret-Frenet de* Γ *en* (γ, s).

Lemme-Définition 12.5. *Si* Γ *est 2-régulière et de classe* C^3, *alors* $\forall s \in [0, L]$, $\dot{e}_3(s)$ *est colinéaire à* $e_2(s)$. *La torsion de* Γ *en* (γ, s) *est le nombre réel* $\tau(s)$ *tel que*

$$\dot{e}_3(s) = -\tau(s)e_2(s).$$

Exemple. Les pas-de-vis usuels sont des hélices à torsion positive. En effet, pour $\gamma(s) = (\cos\sqrt{1-h^2}\; s, \sin\sqrt{1-h^2}\; s, hs)$, $0 < h < 1$, $s \in [0, 2\pi]$, on obtient:

$$\rho(s) = 1 - h^2 \text{ et } \tau(s) = h\sqrt{1-h^2}.$$

Remarque. Si $\tau(s)$ est positif, alors Γ quitte le plan osculateur au point (γ, s) du côté indiqué par $e_3(s)$. (Voir théorème 12.11.)

Proposition 12.6. *Pour une courbe 2-régulière* Γ *de classe* C^3 *de torsion* τ*:*

$$\tau(s) = 0,\ \forall s \in [0, L] \iff \Gamma \text{ est plane.}$$

Preuve. Si τ est identiquement nul, alors $\dot{e}_3 = 0$ d'après le lemme-définition 12.5 et donc $e_3(s) = e_3(0)$, $\forall s$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle \gamma(s) - \gamma(0) \mid e_3(s)\rangle = \langle \dot{\gamma}(s) \mid e_3(0)\rangle = 0$. Ceci entraîne que $\langle \gamma(s) - \gamma(0) \mid e_3(s)\rangle$ est constant, donc nul et ainsi $\gamma(s)$ appartient au plan perpendiculaire à $e_3(0)$ passant par $\gamma(0)$.
Réciproquement, si Γ est plane, alors $e_1(s)$ et $e_2(s)$ sont parallèles au plan de Γ et donc $e_3(s)$, qui est unitaire et perpendiculaire à ce plan, est constant. □

Proposition 12.7 (Formules de Serret-Frenet). *Soit Γ une courbe 2-régulière orientée de classe C^3. Alors, avec les notations ci-dessus:*

$$\begin{array}{lll} \dot{e}_1(s) & = & \quad\quad\quad\quad +\rho(s)e_2(s), \\ \dot{e}_2(s) & = -\rho(s)e_1(s) & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad +\tau(s)e_3(s), \qquad s \in [0, L] \\ \dot{e}_3(s) & = & \quad\quad\quad\quad -\tau(s)e_2(s). \end{array}$$

Preuve. Il suffit de vérifier la formule pour $\dot{e}_2$. On a: $\dot{e}_2 = (e_3 \wedge e_1)^{\cdot} = \dot{e}_3 \wedge e_1 + e_3 \wedge \dot{e}_1 = -\tau e_2 \wedge e_1 + e_3 \wedge \rho e_2 = \tau e_3 - \rho e_2$. □

Proposition 12.8. *Soit $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation (quelconque) d'une courbe 2-régulière Γ orientée de classe C^3. Alors la courbure ρ et la torsion τ de Γ sont données par:*

$$\rho(s) = \frac{||\delta'(t) \wedge \delta''(t)||}{||\delta'(t)||^3}, \qquad \tau(s) = \frac{[\delta'(t), \delta''(t), \delta'''(t)]}{||\delta'(t) \wedge \delta''(t)||^2},$$

où $'$ signifie $\dfrac{d}{dt}$ et $s = L(\Gamma|_{[a,t]})$.

Preuve. Soit γ la paramétrisation normale de Γ. Alors $\delta(t) = \gamma(\varphi(t)) = \gamma(s)$, $\forall t \in [a, b]$. En dérivant, on trouve

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= \varphi'(t)\dot{\gamma}(s) = \varphi'(t)e_1(s), \\ \delta''(t) &= \varphi''(t)\dot{\gamma}(s) + {\varphi'}^2(t)\ddot{\gamma}(s) = \varphi''(t)e_1(s) + {\varphi'}^2(t)\rho(s)e_2(s), \\ \delta'''(t) &= \varphi'''(t)\dot{\gamma}(s) + 3\varphi''(t)\varphi'(t)\ddot{\gamma}(s) + {\varphi'}^3(t)\dddot{\gamma}(s) = \big(\varphi'''(t) - {\varphi'}^3(t)\rho^2(s)\big)e_1(s) \\ &\quad + \big(3\varphi''(t)\varphi'(t)\rho(s) + {\varphi'}^3(t)\dot{\rho}(s)\big)e_2(s) + {\varphi'}^3(t)\rho(s)\tau(s)e_3(s). \end{aligned}$$

De la première ligne, on tire $||\delta'|| = \varphi'$. D'où $\delta'(t) \wedge \delta''(t) = {\varphi'}^3(t)\rho(s)e_3(s)$ et

$$[\delta'(t), \delta''(t), \delta'''(t)] = \langle {\varphi'}^3(t)e_3(s) \mid {\varphi'}^3(t)\rho^2(s)\tau(s)e_3(s)\rangle = {\varphi'}^6(t)\rho^2(s)\tau(s).$$

Les formules annoncées en découlent. □

Corollaire 12.9. *La courbure et la torsion ne dépendent pas de l'orientation.*

Théorème 12.10. *Soient $0 < \rho$ et τ deux fonctions continues sur $[0, L]$. Alors il existe un courbe orientée, unique à isométrie de $\mathbb{R}^3$ près, de courbure ρ, torsion τ et longueur L.*

Preuve. Les formules de Serret-Frenet sont un système différentiel linéaire d'ordre 1 pour les 3 fonctions inconnues e_1, e_2 et e_3 à valeurs vectorielles. Ce système a une

solution unique définie pour $s \in [0, L]$ dès que $e_1(0)$, $e_2(0)$ et $e_3(0)$ sont donnés. On suppose qu'il forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
Définissons $\varepsilon_1 = e_2 \wedge e_3$, $\varepsilon_2 = e_3 \wedge e_1$ et $\varepsilon_3 = e_1 \wedge e_2$. Alors

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{e}_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge \dot{e}_3 = -\rho e_1 \wedge e_3 = \rho\varepsilon_2 \\
\dot{\varepsilon}_2 &= \dot{e}_3 \wedge e_1 + e_3 \wedge \dot{e}_1 = -\tau e_2 \wedge e_1 + e_3 \wedge \rho e_2 = -\rho\varepsilon_1 + \tau\varepsilon_3 \\
\dot{\varepsilon}_3 &= \dot{e}_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge \dot{e}_2 = \rho e_2 \wedge e_2 + e_1 \wedge (-\rho e_1 + \tau e_3) = -\tau\varepsilon_2 .
\end{aligned}$$

Donc ε_1, ε_2 et ε_3 vérifient le même système différentiel que e_1, e_2 et e_3 avec les mêmes conditions initiales. Par unicité, on a $\varepsilon_j = e_j$. On en déduit $e_1 \perp e_2$, $e_2 \perp e_3$ et $e_3 \perp e_1$. Finalement, $\langle e_1, e_1\rangle^{\cdot} = 2\langle \dot{e}_1, e_1\rangle = 2\langle \rho e_2, e_1\rangle = 0$ montre que e_1 est unitaire. Idem pour e_2 et e_3. On considère alors $\gamma(s) := \int_0^s e_1(u)\,du$. C'est la paramétrisation normale d'une courbe de courbure ρ et torsion τ, d'après les formules de Serret-Frenet. Pour vérifier l'unicité à isométrie près, soit γ et δ deux paramétrisations à courbure ρ et torsion τ. Par une isométrie T, on amène $\delta(0)$ sur $\gamma(0)$ et le trièdre de Serret-Frenet de δ en 0 sur celui de γ en 0. Par unicité des solutions du système donné par les formules de Serret-Frenet on en déduit $\gamma = T \circ \delta$. □

Théorème 12.11 (Etude locale d'une courbe). *En négligeant les termes d'ordre supérieurs à 3, la paramétrisation normale d'une courbe 2-régulière Γ de classe C^4 a l'expression suivante dans le repère $(\gamma(0); e_1(0), e_2(0), e_3(0))$:*

$$s \longmapsto \left(s - \rho^2(0)s^3/3!,\ \rho(0)s^2/2 + \dot{\rho}(0)s^3/3!,\ \rho(0)\tau(0)s^3/3!\right), \qquad s \geq 0.$$

D'où les projections dans les plans de référence.

Preuve. Il suffit de dériver:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= e_1, \\
\ddot{\gamma} &= \rho e_2, \\
\dddot{\gamma} &= \dot{\rho} e_2 + \rho \dot{e}_2 = -\rho^2 e_1 + \dot{\rho} e_2 + \rho\tau e_3
\end{aligned}$$

et de remplacer dans la formule de Taylor.
En négligeant s^3 devant s et s^2, on obtient les approximations suivantes des projections de la courbe

$$\begin{aligned}
\text{sur le plan osculateur:}\quad & x_2 = \frac{\rho(0)}{2} x_1^2, \quad \text{parabole,} \\
\text{sur le plan normal:}\quad & x_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\tau(0)}{\sqrt{\rho(0)}} x_2^{3/2}, \quad \text{"cusp",} \\
\text{sur le plan rectifiant:}\quad & x_3 = \frac{1}{6}\rho(0)\tau(0)x_1^3, \quad \text{cubique.}
\end{aligned}$$ □

13. Propriétés globales des courbes planes

Théorème 13.1 (de Jordan). *Soit Γ une courbe plane, fermée et simple. Alors le support de Γ sépare le plan en deux composantes connexes: l'une bornée appelée intérieur de Γ, l'autre non bornée appelée extérieur de Γ.* □

Remarque. Une courbe fermée simple sur un tore ne le sépare pas nécessairement.

Théorème 13.2 (Inégalité isopérimétrique). *Soit Γ une courbe plane C^1 régulière par morceaux, fermée et simple. Si L est la longueur de Γ et A désigne l'aire de l'intérieur de Γ, alors*

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

L'égalité a lieu si et seulement si Γ est un cercle.

Preuve d'après Schmidt. Soit γ la paramétrisation normale de Γ; on pose

$$a = \inf_{s\in[0,L]} \gamma^1(s), \quad b = \sup_{s\in[0,L]} \gamma^1(s).$$

Quitte à faire une translation le long du premier axe de coordonnées, on peut supposer que

$$a = -R \quad \text{et} \quad b = R.$$

Pour chaque $s \in [0, L]$, on choisit

$$\sigma^2(s) = \pm\sqrt{R^2 - {\gamma^1}^2(s)}$$

de sorte que σ^2 soit continue et que $\sigma := (\gamma^1, \sigma^2)$ paramètre le cercle de rayon R centré à l'origine.
D'après la formule de Green-Riemann:

$$\begin{aligned} A + \pi R^2 &= \int_\gamma x^1 dx^2 - \int_\sigma x^2 dx^1 \\ &= \int_0^L (\gamma^1(s)\dot\gamma^2(s) - \sigma^2(s)\dot\sigma^1(s))ds = \int_0^L (\sigma^1(s)\dot\gamma^2(s) - \sigma^2(s)\dot\gamma^1(s))ds. \end{aligned}$$

L'intégrant est le produit scalaire des vecteurs $(\sigma^1(s), \sigma^2(s))$ et $(\dot\gamma^2(s), -\dot\gamma^1(s)) = \pm e_2(s)$ de normes R et 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient:

$$A + \pi R^2 \leq \int_0^L R\, ds = LR.$$

La fonction $\xi \mapsto \pi\xi^2 - L\xi + A$ prend donc des valeurs positives ($|\xi|$ grand) et négative ou nulle ($\xi = R$). Par suite, l'équation $\pi\xi^2 - L\xi + A = 0$ a une solution réelle au moins et donc

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Si on a égalité, alors les vecteurs $(\gamma^1(s), \sigma^2(s))$ et $(\dot\gamma^2(s), -\dot\gamma^1(s))$ sont colinéaires pour tout s; en particulier

$$\gamma^1(s) = \pm R\dot\gamma^2(s), \quad \forall s \in [0,1].$$

Par dérivation, il en découle $\ddot\gamma^2 = \pm(1/R)\dot\gamma^1$. Comme d'autre part, $\ddot\gamma(s) = \rho(s)e_2(s)$ $= \pm\rho(s)(\dot\gamma^2(s), -\dot\gamma^1(s))$, on obtient

$$\rho(s) = 1/R = \text{cst}.$$

Par suite (Exercice 12.10), Γ est un cercle, puisque c'est une courbe fermée simple. □

Définition 13.3. Soit Γ une courbe orientée de classe C^2 régulière de $\mathbb{R}^2$; on note $s \mapsto \gamma(s)$ la paramétrisation normale de Γ. La *courbure algébrique de* Γ *en* (γ, s) est le nombre réel $\kappa(s)$ défini par

$$\dot e_1(s) = \kappa(s)e_2^+(s),$$

où $(e_1(s), e_2^+(s))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Bien entendu, $\rho(s) = |\kappa(s)|$.

Proposition 13.4. *Si Γ est une courbe fermée orientée de classe C^2 régulière de $\mathbb{R}^2$, alors il existe un entier m tel que*

$$\int_\Gamma \kappa \; ds = 2\pi m.$$

Preuve. Soit ε_1, ε_2 la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On définit $\theta : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 par

$$e_1(s) = \cos\theta(s)\varepsilon_1 + \sin\theta(s)\varepsilon_2.$$

Alors $\dot e_1(s) = -\dot\theta(s)\sin\theta(s)\varepsilon_1 + \dot\theta(s)\cos\theta(s)\varepsilon_2 = \dot\theta(s)e_2^+(s)$. Par conséquent, $\kappa(s) = \dot\theta(s)$, $\forall s$ et alors

$$\int_0^L \kappa(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^L \dot\theta(s)\,\mathrm{d}s = \theta(L) - \theta(0) = m2\pi.\Box$$

Corollaire 13.5. *Pour une courbe fermée Γ de classe C^2 régulière de $\mathbb{R}^2$, on a:*

$$\int_\Gamma \rho \; ds \geq 2\pi.$$

L'égalité n'a lieu que si Γ est convexe.

14. Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Définition 14.1. Une *surface* de $\mathbb{R}^3$ est une sous-variété C^1 de dimension 2.

Rappel. Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ et $x \in S$. Alors il existe un voisinage ouvert W de x dans $\mathbb{R}^3$ tel que $W \cap S = \phi(U)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est C^1 régulière, i.e. $\dfrac{\partial \phi}{\partial u^1}(u^1, u^2)$ et $\dfrac{\partial \phi}{\partial u^2}(u^1, u^2)$ sont linéairement indépendants, injective et d'inverse continue.
On dit que ϕ est une *paramétrisation locale de* S au voisinage de x. L'application $\phi^{-1} : W \cap S \longrightarrow U$ s'appelle une *carte locale* de S au voisinage de x; les fonctions $(\phi^{-1})^1$ et $(\phi^{-1})^2$ sont des *coordonnées locales* de S au voisinage de x.

Exemple. Pour la sphère $S = \mathbb{S}^2$ et $x = (1,0,0)$, la longitude et la latitude sont des coordonnées locales car $\phi(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^2)$ est une paramétrisation locale. De même, x^2 et x^3 sont des coordonnées locales, car $\psi(x^2, x^3) = (\sqrt{1-(x^2)^2-(x^3)^2}, x^2, x^3)$ est une paramétrisation locale.

Remarque. Soient ϕ et ψ deux paramétrisations de S en x, avec $\phi(U) = \psi(V)$. Alors $\varphi = \phi^{-1} \circ \psi$ est un difféomorphisme de V sur U. En effet, ϕ et ψ sont des restrictions à $\mathbb{R}^2$ de difféomorphismes $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ d'ouverts $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$; donc $\phi^{-1} \circ \psi = \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{\psi}|_{\mathbb{R}^2}$. Par suite le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} \phi'(u)$ de $\mathbb{R}^3$ est indépendant de la paramétrisation ϕ d'une surface S en $x = \phi(u)$. C'est l'espace tangent à S en x, noté T_xS. On a évidemment $T_xS = \mathbb{R}\dfrac{\partial \phi}{\partial u_1}(u) + \mathbb{R}\dfrac{\partial \phi}{\partial u_2}(u)$.

Lemme 14.2. *L'espace tangent T_xS est formé par l'ensemble des vecteurs tangents en x aux courbes C^1 tracées sur S:* $T_xS = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : [0,1] \longrightarrow S,\ \gamma(0) = x\}$.

Définition 14.3. La *première forme fondamentale* d'une surface S au point x est la restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ à T_xS : $I_x : T_xS \times T_xS \longrightarrow \mathbb{R}$, $I_x(\xi, \eta) = \langle \xi \mid \eta \rangle$. Si u^1, u^2 sont des coordonnées locales sur S près de x, la forme I_x est déterminée par

$$g_{ij}(u) = \langle \frac{\partial \phi}{\partial u^i}(u) \mid \frac{\partial \phi}{\partial u^j}(u) \rangle, \quad i,\ j = 1,\ 2.$$

Proposition 14.4. *Soit Γ une courbe C^1 tracée sur une surface S paramétrée par ϕ. Alors*

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum g_{ij}(\sigma(t)) \frac{\mathrm{d}\sigma^i}{\mathrm{d}t}(t) \frac{\mathrm{d}\sigma^j}{\mathrm{d}t}(t)}\ \mathrm{d}t$$

où $\phi \circ \sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paramètre Γ.

Preuve. La formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \sigma) = (\frac{\partial \phi}{\partial u^1} \circ \sigma) \frac{\mathrm{d}\sigma^1}{\mathrm{d}t} + (\frac{\partial \phi}{\partial u^2} \circ \sigma) \frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}t}.$$

D'où $||\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \sigma)||^2 = \sum (g_{ij} \circ \sigma) \dfrac{\mathrm{d}\sigma^i}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}\sigma^j}{\mathrm{d}t}$. □

Notation. Si s est la longueur d'arc sur Γ, on a $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \sum g_{ij}\circ\sigma \, \frac{\mathrm{d}\sigma^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\sigma^j}{\mathrm{d}t}$ ce qui suggère la notation $\mathrm{d}s^2 = \sum g_{ij}\,\mathrm{d}u^i \ \mathrm{d}u^j$.

Définition 14.5. Soient S une surface différentiable de $\mathbb{R}^3$ et K une partie compacte assez petite de S. On définit l'*aire* de K par

$$\operatorname{aire}(K) := \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{vol}\,\{x + tn(x) \mid x \in K,\ 0 \le t \le \varepsilon\}/\varepsilon,$$

où $n(x)$ est un vecteur normal unitaire à S en x qui dépend continûment de x.

Proposition 14.6. *Soit $\phi \in C^2$ une paramétrisation locale de S et $K \subset \operatorname{Im}\phi$. Alors*

$$\operatorname{aire}(K) = \iint_{\phi^{-1}(K)} \left|\left|\frac{\partial\phi}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial u^2}\right|\right| \, du^1 du^2 = \iint_{\phi^{-1}(K)} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\; du^1 du^2.$$

Preuve. L'épaississement de K est l'image de $\phi^{-1}(K) \times [0,\varepsilon]$ par l'application $\tilde\phi$: $(u^1,u^2,t) \mapsto \phi(u) + tn(\phi(u))$, où $n\circ\phi = \partial_1\phi \wedge \partial_2\phi/||\partial_1\phi\wedge\partial_2\phi||$. Par la formule du changement de variables, son volume est égal à

$$\int_0^\varepsilon \iint_{\phi^{-1}(K)} |J(u,t)|\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}t$$

où J est le déterminant jacobien de $\tilde\phi$. Comme $\frac{\partial\tilde\phi}{\partial u^j} = \frac{\partial\phi}{\partial u^j} + t\frac{\partial(n\circ\phi)}{\partial u^j}$ et $\frac{\partial\tilde\phi}{\partial t} = n\circ\phi$, on a $J(u,t) = [\frac{\partial\phi}{\partial u^1}, \frac{\partial\phi}{\partial u^2}, n\circ\phi] + O(t)$. Après intégration en t, le volume vaut

$$\varepsilon \iint_{\phi^{-1}(K)} \left|\left|\frac{\partial\phi}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial u^2}\right|\right| \, du^1 du^2 + O(\varepsilon^2).$$

Le résultat en découle après division par ε. □

Définition 14.7. La *métrique de longueur* entre deux points x et y d'une surface connexe S est définie par

$$d(x,y) = \inf\{L(\gamma)\},$$

où γ parcourt les courbes C^1 par morceaux tracées sur S reliant x à y.

Lemme 14.8. *La métrique de longueur sur une surface S est équivalente à la distance induite sur S par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$.*

Preuve. Soit $a \in S$. On doit montrer que pour $x \in S$:

$$d(x,a) \to 0 \iff ||x - a|| \to 0.$$

L'inégalité $||x-y|| \leq d(x,y)$ donne $\Longrightarrow$. Pour vérifier l'implication inverse, on peut supposer, après une isométrie de $\mathbb{R}^3$ que $a=0$ et $T_aS=\{x^3=0\}$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $0\in\mathbb{R}^2$, un nombre $\varepsilon>0$ et une fonction $f\in C^1(U)$ tels que

$$S\cap U\times]-\varepsilon,\varepsilon[=\{(x^1,x^2,f(x^1,x^2))\mid (x^1,x^2)\in U\}.$$

Pour $(x^1,x^2)\in U$, soit $\gamma:[0,1]\to S$ donnée par $\gamma(t)=(tx^1,tx^2,f(tx^1,tx^2))$. En appliquant (11.1), il vient:

$$L(\gamma)=\int_0^1\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+[\partial_1 f(tx^1,tx^2)x^1+\partial_2 f(tx^1,tx^2)x^2]^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de majorer le crochet par $C||(x^1,x^2)||$, où C^2 est une borne pour $(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2$ sur U. Donc $\sqrt{1+C^2}||(x^1,x^2)||$ majore $L(\gamma)$. En prenant la borne inférieure sur tous les chemins dans S reliant $a=0$ et x, on obtient

$$d(x,a)\leq\sqrt{1+C^2}||x||,\ \text{pour } x\in U\times]-\varepsilon,\varepsilon[. \qquad \square$$

15. Géodésiques

Définition 15.1. Une *géodésique* sur une surface S est une courbe régulière sur S dont la normale principale, en chaque point où la courbure est non nulle, est normale à la surface.

Exemple. Sur une sphère, les géodésiques sont les arcs de grands cercles.

Définition 15.2. Les *symboles de Christoffel* d'une surface paramétrée par ϕ sont définis par

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jkl} &= \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^j \partial u^k} \mid \frac{\partial \phi}{\partial u^l} \rangle = \frac{1}{2}\{\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\} \\
\Gamma^i_{jk} &= \sum_l \Gamma_{jkl} g^{li}\ , \quad \text{où} \ \ (g^{ij}) \text{ désigne la matrice inverse de } \ (g_{ij}).
\end{aligned}$$

Proposition 15.3. *Soit ϕ une paramétrisation locale de S. Alors $\gamma = \phi \circ \sigma$ est une paramétrisation à vitesse constante d'une géodésique si, et seulement si,*

$$\ddot{\sigma}^i + \sum_{jk} \Gamma^i_{jk} \dot{\sigma}^j \dot{\sigma}^k = 0, \quad \textit{pour} \ \ i = 1,\, 2. \tag{15.1}$$

Preuve. Quand la géodésique $\gamma : [0, \lambda] \to \mathbb{R}^3$ est paramétrée par la longueur d'arc ou un de ses multiples, la condition de la définition 15.1 est équivalente à

$$\ddot{\gamma}(t) \quad \text{colinéaire à} \quad n(\gamma(t)),\ \forall t \in [0, \lambda],$$

c'est-à-dire:

$$\langle \ddot{\gamma}(t) \mid (\partial_l \phi)(\sigma(t)) \rangle = 0,\ \forall t \in [0, \lambda] \text{ et } l = 1, 2. \tag{15.2}$$

En utilisant

$$\ddot{\gamma}(t) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^j \partial u^k}(\sigma(t)) \dot{\sigma}^j(t) \dot{\sigma}^k(t) + \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial u^j}(\sigma(t)) \ddot{\sigma}^j(t)$$

et la définition 15.2, la relation (15.2) devient

$$\sum_{j,k} \Gamma_{jkl}(\sigma(t)) \dot{\sigma}^j(t) \dot{\sigma}^k(t) + \sum_j g_{jl}(\sigma(t)) \ddot{\sigma}^j(t) = 0,\ l = 1, 2. \tag{15.3}$$

Il reste à multiplier par g^{il} et à sommer sur l pour obtenir (15.1).
La réciproque est immédiate car (15.1), (15.2) et (15.3) sont tous équivalents à $\ddot{\gamma}$ colinéaire à n. Cette propriété entraîne $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$ qui donne $||\dot{\gamma}||$ constant. □

Proposition 15.4. *Les géodésiques paramétrées à vitesse constante d'une surface S sont les extrémales du problème*

$$\int \sqrt{(\dot\gamma^1)^2 + (\dot\gamma^2)^2 + (\dot\gamma^3)^2} \text{ minimum, pour } \gamma \text{ courbe paramétrée tracée sur } S.$$

Preuve. Soit $L(u, \dot u) = \sum_{j,k} g_{jk}(u)\dot u^j \dot u^k$. Une extrémale du problème $\int L$ (énergie) minimum est une solution des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial u^l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot u^l}\right) = 0, \quad l = 1, 2. \tag{15.4}$$

Comme $\dfrac{\partial L}{\partial u^l} = \sum_{jk} \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\dot u^j \dot u^k$ et $\dfrac{\partial L}{\partial \dot u^l} = \sum_k g_{lk}\dot u^k + \sum_j g_{jl}\dot u^j$, (15.4) s'écrit

$$\sum_{jk} \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j}\dot u^j \dot u^k + \sum_{jk} \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}\dot u^j \dot u^k + 2\sum_j g_{jl}\ddot u^j - \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\dot u^j \dot u^k =$$
$$\sum_{jk}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^l}\right)\dot u^j \dot u^k + 2\sum_j g_{jl}\ddot u^j = 2\sum_{j,k}\Gamma_{jkl}\dot u^j \dot u^k + 2\sum_j g_{jl}\ddot u^j = 0.$$

Ce qui montre que les extrémales de l'énergie sont des géodésiques.
Les extrémale du problème $\int \sqrt{L}$ minimum sont les solutions du système

$$\frac{\partial \sqrt{L}}{\partial u^l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \dot u^l}\right) = \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial u^l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial \dot u^l}\right) = 0, \quad l = 1, 2.$$

Lorsque la paramétrisation est à vitesse constante, on peut simplifier par $\sqrt{L}$ qui est constant et obtenir (15.4). □

Corollaire 15.5. *Soit S une surface différentiable de $\mathbb{R}^3$ et $x \in S$. Alors, $\forall \xi \in T_xS$, il existe une unique géodésique $\gamma_\xi : [0, \varepsilon] \longrightarrow S$ telle que $\gamma_\xi(0) = x$ et $\dot\gamma_\xi(0) = \xi$.*

Remarque. D'après le théorème sur la dépendance des solutions d'un système différentiel vis-à-vis des conditions initiales, on peut dire plus: il existe $r_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que γ_ξ est définie sur $[0, \varepsilon]$, pour tout $\xi \in T_xS$ avec $||\xi|| \leq r_0$ et l'application $B(0, r_0) \times [0, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui envoie (ξ, t) sur $\gamma_\xi(t)$ est différentiable.

Lemme 15.6. *Avec les notations ci-dessus et pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, $0 \leq s \leq 1$, on a:*
$$\gamma_{s\xi}(t) = \gamma_\xi(st), \quad \forall \xi \in T_xS, \ ||\xi|| \leq r_0.$$

Application. Si $||\xi|| \leq \varepsilon r_0$, alors la géodésique γ_ξ est définie sur $[0, 1]$.

Définition 15.7. L'*application exponentielle au point x* est définie par $\exp_x : \{\xi \in T_xS \mid ||\xi|| \leq \varepsilon r_0\} \longrightarrow S$ avec $\exp_x(\xi) = \gamma_\xi(1)$.

Proposition 15.8. *L'application exponentielle au point x est une paramétrisation de S au voisinage de x.*

Preuve. Il suffit de calculer la dérivée de $\exp_x$ en $\xi = 0$ et de montrer qu'elle est de rang 2. Or, par définition de γ_ξ et grâce au lemme 15.6, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{t\xi}(1)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_\xi(t)|_{t=0} = \xi$$

ce qui montre que la dérivée de $\exp_x$ en $\xi = 0$ est l'inclusion de T_xS dans $\mathbb{R}^3$. □

Définition 15.9. Soit $(e_1,\ e_2)$ une base orthonormée de T_xS. L'application du rectangle $]0, r_1[\times]0, 2\pi[$ dans S donnée par $(r, \theta) \mapsto \exp_x(r\cos\theta\, e_1 + r\sin\theta\, e_2)$ est une paramétrisation d'un "voisinage fendu" de x. Les coordonnées (r, θ) sont appelées *coordonnées géodésiques polaires* en x.

Lemme 15.10 (Gauss). *Pour r assez petit, le cercle géodésique $\{\exp_x(\xi) \mid \xi \in T_xS,\ ||\xi|| = r\}$ est perpendiculaire aux rayons géodésiques issus de x.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\frac{\partial}{\partial\theta}\exp_x(r\cos\theta\, e_1 + r\sin\theta\, e_2)$ est perpendiculaire à $\frac{\partial}{\partial r}\exp_x(r\cos\theta\, e_1 + r\sin\theta\, e_2)$. Posons $\phi(r, \theta) = \exp_x(r\cos\theta\, e_1 + r\sin\theta\, e_2)$. Puisque $r \mapsto \phi(r, \theta)$ est une géodésique, $\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi(r, \theta)$ est normal à S. Par suite,

$$\frac{\partial}{\partial r}\langle\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(r, \theta) \mid \frac{\partial}{\partial r}\phi(r, \theta)\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r, \theta) \mid \frac{\partial}{\partial r}\phi(r, \theta)\rangle =$$
$$\langle\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r, \theta) \mid \frac{\partial}{\partial r}\phi(r, \theta)\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}||\frac{\partial}{\partial r}\phi(r, \theta)||^2 = 0$$

Pour $r = 0$, on a $\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(0, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}x = 0$ et le résultat en découle. □

Proposition 15.11. *Les géodésiques d'une surface différentiable de $\mathbb{R}^3$ minimisent localement la distance, i.e., pour tout y assez voisin de x, l'unique géodésique de x à y a pour longueur $d(x, y)$.*

Preuve. On prend un système de coordonnées géodésiques polaires autour de x. Dans ce système, on a $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ et $g_{22} =: J^2$. Pour n'importe quelle courbe paramétrée $\gamma = \phi\circ\sigma$ reliant x à y qui reste dans l'image de ϕ, on a

$$L(\gamma) = \int\sqrt{(\dot\sigma^1)^2 + J^2(\dot\sigma^2)^2} \geq \int\sqrt{(\dot\sigma^1)^2} \geq \int\dot\sigma^1 = r - 0$$

où r est la première coordonnées de y. L'égalité ne peut avoir lieu que si $\dot\sigma^2 = 0$. Si la courbe sort de l'image de ϕ, sa longueur est trivialement plus grande que r. □

Définition 15.12. Une application $f : S \longrightarrow S'$ est une *isométrie* si f est différentiable bijective et conserve la métrique de longueur. On dit que f est une *isométrie locale* si $\forall x \in S$, il existe un voisinage U de x tel que $f\,|_U \colon U \longrightarrow f(U)$ est une isométrie.

Exemples. Un rectangle et un cylindre "ouvert" sont isométriques. Un plan et un cylindre "fermé" sont seulement localement isométriques.

Proposition 15.13. *Une application $f : S \longrightarrow S'$ est une isométrie locale si, et seulement si, $\forall x \in S$, l'application linéaire $\mathrm{d}_x f : T_xS \longrightarrow T_{f(x)}S'$ est une isométrie.*

Preuve. Si $\mathrm{d}_x f$ est une isométrie locale, alors la longueur des courbes est conservée par f, i.e.,

$$\int ||\dot{\gamma}|| = \int || \,\mathrm{d}_{\gamma(t)} f(\dot{\gamma}(t)|| \,\mathrm{d}t = \int ||(f \circ \gamma)\dot{}||.$$

Par suite, la distance de longueur est conservée.
Réciproquement, si f est une isométrie locale, alors pour $\xi \in T_xS$ avec $||\xi|| = 1$ et t assez petit, on a

$$d(\gamma_\xi(t), x) = t = d(f(\gamma_\xi(t), f(x)) = d(f \circ \gamma_\xi(t)), f \circ \gamma_\xi(0))$$

et plus généralement

$$d(f \circ \gamma_\xi(t)), f \circ \gamma_\xi(s)) = |s - t|.$$

Pour $s \leq t$, la géodésique de $f(x)$ à $f \circ \gamma_\xi(s)$ suivie de la géodésique de $f \circ \gamma_\xi(s)$ à $f \circ \gamma_\xi(t)$ donne une courbe qui minimise la distance de $f(x)$ à $f \circ \gamma_\xi(t)$. D'après la Proposition 11.15, on en déduit que $f \circ \gamma_x$ est une géodésique. En dérivant l'identité $\int_0^t ||(f \circ \gamma_\xi)\dot{}(s)|| \,\mathrm{d}s = t$ on obtient $||(f \circ \gamma_\xi)\dot{}(t)|| = 1$ si bien que $|| \,\mathrm{d}_x f(\xi)|| = 1$. $\square$

16. La deuxième forme fondamentale d'une surface

Définition 16.1. Soit Ω un ouvert d'une surface suffisamment différentiable S. Une *orientation* de Ω est une application différentiable $n : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}^2$ telle que $n(x) \perp T_xS$, $\forall x \in \Omega$. Une telle application s'appelle aussi *application de Gauss.* Si une orientation existe, on dit que Ω est *orientable.*

Exemples.
1) Si Ω est assez petit, on peut l'orienter.
2) Le ruban de Möbius n'est pas orientable.

Quand Ω est muni d'une orientation $n : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}^2$, on considère sa différentielle $\mathrm{d}_xn : T_xS \longrightarrow T_{n(x)}\mathbb{S}^2$ en x définie par $\mathrm{d}_xn(\xi) = \dfrac{d}{dt}n(\gamma(t))\,|_{t=0}$ où $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ est telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot\gamma(0) = \xi$. Comme $T_{n(x)}\mathbb{S}^2 = T_xS$, on écrira $\mathrm{d}_xn : T_xS \longrightarrow T_xS$; c'est l'*application de Weingarten.*

Lemme 16.2. *L'application* d_xn *est auto-adjointe, i.e.,* $\langle\, \mathrm{d}_xn(\xi) \mid \eta\rangle = \langle \xi \mid d_xn(\eta)\rangle$, $\forall x \in \Omega$ *et* $\forall \xi, \eta \in T_xS$.

Preuve. La relation est triviale si ξ et η sont colinéaires. En faisant au besoin un changement affine de coordonnées dans le plan (u_1, u_2), on peut supposer que $x = \phi(0)$, $\xi = \partial_1\phi(0)$ et $\eta = \partial_2\phi(0)$. On a $n\circ\phi = \partial_1\phi \wedge \partial_2\phi/\lambda$ où $\lambda = ||\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi||$ et donc

$$\partial_1(n\circ\phi) = \partial_{11}\phi \wedge \partial_2\phi/\lambda + \partial_1\phi \wedge \partial_{12}\phi/\lambda - (\partial_1\lambda)(n\circ\phi)/\lambda^2.$$

Par suite

$$\langle\partial_1(n\circ\phi) \mid \partial_2\phi\rangle = \langle\partial_1\phi \wedge \partial_{12}\phi \mid \partial_2\phi\rangle/\lambda.$$

Un calcul analogue donne

$$\langle\partial_1\phi \mid \partial_2(n\circ\phi)\rangle = \langle\partial_1\phi \mid \partial_{21}\phi \wedge \partial_2\phi\rangle/\lambda.$$

Comme $\mathrm{d}_xn(\xi) = \partial_1(n\circ\phi)(0)$ et $\mathrm{d}_xn(\eta) = \partial_2(n\circ\phi)(0)$, le lemme est démontré. $\square$

Définition 16.3. La *deuxième forme fondamentale* d'une surface orientée S en x est la forme quadratique

$$II_x : T_xS \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ donnée par } \ II_x(\xi) = \langle -\mathrm{d}_xn(\xi) \mid \xi\rangle.$$

Définition 16.4. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow S$ une paramétrisation d'une courbe sur S orientée. La *courbure normale* de γ en t est le nombre $\rho_n(t) = \rho(t)\cos\alpha(t)$ où $\rho(t)$ désigne la courbure de γ en t et $\alpha(t)$ est l'angle entre $n(\gamma(t))$ et la normale principale à γ en t. On a donc $\rho_n(t) = \langle n(\gamma(t)) \mid \ddot\gamma(t)\rangle$.

Proposition 16.5. *Si γ est paramétrée par la longueur d'arc, alors*

$$\rho_n(t) = II_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)), \quad \forall t.$$

Preuve. En dérivant $\langle n(\gamma(t)) \mid \dot\gamma(t)\rangle = 0$, on obtient

$$\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\circ\gamma)(t) \mid \dot\gamma(t)\rangle + \langle n(\gamma(t)) \mid \ddot\gamma(t)\rangle = 0,$$

ce qui donne la relation cherchée. □

Corollaire 16.6 (Meusnier). *La courbure normale d'une courbe tracée sur une surface ne dépend que de la direction du vecteur tangent à la courbe.*

Définition 16.7. Puisque $-\,\mathrm{d}_x n$ est auto-adjointe, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de cet endomorphisme de T_xS. Les valeurs propres (réelles) $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ de $-\,\mathrm{d}_x n$ sont les *courbures principales* de S en x. Ce sont aussi les valeurs extrêmes de $II_x(\xi)$ pour $||\xi|| = 1$, donc les valeurs extrêmes de la courbure normale de S en x. Les directions (orthogonales) données par les vecteurs propres correspondants sont appelées *directions principales.* Les *lignes de courbures* sont des courbes tracées sur S, dont la tangente en chaque point est une direction principale. On défìnfit encore

$$\begin{aligned} K(x) &:= \kappa_1(x)\kappa_2(x) &&= \det(\,\mathrm{d}_x n) && \textit{courbure totale} \text{ ou } \textit{de Gauss} \text{ en } x, \\ H(x) &:= \frac{1}{2}(\kappa_1(x)+\kappa_2(x)) &&= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\,\mathrm{d}_x n) && \textit{courbure moyenne} \text{ en } x. \end{aligned}$$

Remarques.
1. La courbure normale est égale à la courbure d'une section normale.
2. Si $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormée de directions principales de T_xS, alors la courbure normale dans la direction $\cos\theta\ e_1 + \sin\theta\ e_2$ vaut $\cos^2\theta\ \kappa_1 + \sin^2\theta\ \kappa_2$.

Proposition 16.8 (Olinde Rodrigues). *Le chemin γ paramétrise une ligne de courbure si, et seulement si, $\dot\gamma(t)$ est colinéaire* à $\mathrm{d}_{\gamma(t)}n\ (\dot\gamma(t))$, $\forall t$.

Preuve. En effet, γ paramétrise une ligne de courbure si, et seulement si, $\dot\gamma(t)$ est vecteur propre de $-\,\mathrm{d}_{\gamma(t)}n$, c'est-à-dire si $-\,\mathrm{d}_{\gamma(t)}n(\dot\gamma(t)$ est colinéaire $\dot\gamma(t)$. □

Définition 16.9. Un point x d'une surface est un *ombilic* si $\kappa_1(x) = \kappa_2(x)$; c'est un point *planaire* si $\kappa_1(x) = \kappa_2(x) = 0$.

Proposition 16.10. *Soit S une surface connexe dont tous les points sont des ombilics. Alors S est un morceau de sphère ou de plan.*

Preuve. Comme $\mathrm{d}_x n(\xi) = -\kappa(x)\xi$ pour tout $\xi \in T_xS$, on a, pour une paramétrisation locale ϕ de S:

$$\partial_1(n\circ\phi) = -\kappa\partial_1\phi, \quad \partial_2(n\circ\phi) = -\kappa\partial_2\phi.$$

En dérivant, il vient

$$\partial_{12}(n\circ\phi) = -\partial_2\kappa\partial_1\phi - \kappa\partial_{12}\phi = -\partial_1\kappa\partial_2\phi - \kappa\partial_{12}\phi$$

et donc $\partial_2\kappa\partial_1\phi = \partial_1\kappa\partial_2\phi$, ce qui entraîne $\partial_1\kappa = \partial_2\kappa = 0$. Puisque S est connexe, il s'ensuit que κ est constant.
Si κ est nul, alors n est constant et ainsi S est un morceau de plan. Si κ est une constante non nulle, alors le point de $\mathbb{R}^3$ décrit par $x + n(x)/\kappa$ pour $x \in S$ est fixe. Donc S est un morceau de sphère de rayon $1/|\kappa|$ centré en ce point. $\square$

Définition 16.11. Une *direction asymptotique* d'une surface est une direction à courbure normale nulle; une *ligne asymptotique* est une courbe à courbure normale nulle en chaque point.

Exemples.
1)Toute droite sur une surface est une ligne asymptotique.
2) Les parallèles extrêmes sur le tore sont des lignes asymptotiques.

La deuxième forme fondamentale en coordonnées locales.
Soient $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de S et u_1, u_2 un système de coordonnées locales. Alors

$$n(x) = \frac{\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi}{||\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi||}(u), \qquad \begin{array}{l} \partial_1 n =: a_1^1\partial_1\phi + a_1^2\partial_2\phi \\ \partial_2 n =: a_2^1\partial_1\phi + a_2^2\partial_2\phi \end{array},$$

donc $\mathrm{d}_x n$ a pour matrice $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\partial_1\phi,\ \partial_2\phi)$ de T_xS. D'où

$$II_x\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} = -\langle \xi^1\partial_1 n + \xi^2\partial_2 n \mid \xi^1\partial_1\phi + \xi^2\partial_2\phi\rangle =: h_{11}(\xi^1)^2 + 2h_{12}\xi^1\xi^2 + h_{22}(\xi^2)^2 =$$
$$-\, I_x(\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix}\xi^1 & \xi^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}\frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Les coefficients h_{ij} se calculent par

$$h_{ij} = -\langle \partial_i n \mid \partial_j \phi \rangle = \langle n \mid \partial_{ij} \phi \rangle = [\partial_1 \phi, \partial_2 \phi, \partial_{ij} \phi] / \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Les courbures principales sont racines de l'équation

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

et finalement

$$H = \frac{1}{2} \frac{h_{11} g_{22} - 2h_{12} g_{12} + h_{22} g_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}, \qquad K = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \tag{16.2}$$

Remarque. Correspondances de notations:

$$E = g_{11},\ F = g_{12},\ G = g_{22};\quad e = h_{11},\ f = h_{12},\ g = h_{22}.$$

Définition 16.12. L'*indicatrice de Dupin* de S en $x \in S$ est l'union des coniques suivantes: $\{\xi \in T_x S \mid II_x(\xi) = \pm 1\}$. Quatre cas peuvent se présenter:

ellipse	si $K(x) > 0$	: point elliptique,
2 droites	si $K(x) = 0$ et $\mathrm{d}_x n \neq 0$	: point parabolique,
vide	si $K(x) = 0$ et $\mathrm{d}_x n = 0$	: point planaire,
2 hyperboles	si $K(x) < 0$	: point hyperbolique.

Proposition 16.13. *Pour $\delta > 0$ assez petit, l'intersection de S avec un plan parallèle à $x + T_x S$, à distance $\pm\delta^2$, a pour équation*

$$\kappa_1 (\xi^1)^2 + \kappa_2 (\xi^2)^2 = \pm 1 + o(||\xi||^2).$$

Preuve. On peut supposer $x = 0$, $T_0 S = O\xi^1\xi^2$, avec $O\xi^1$ et $O\xi^2$ directions principales. La formule de Taylor à l'ordre 2 donne

$$\phi(\xi^1, \xi^2) = 0 + \partial_1 \phi(0) \xi^1 + \partial_2 \phi(0) \xi^2 + \frac{1}{2} \big(\partial_{11} \phi(0) (\xi^1)^2 + 2\partial_{12} \phi(0) \xi^1 \xi^2 + \partial_{22} \phi(0) (\xi^2)^2 \big) + \dots$$

L'intersection cherchée a pour équation $\phi^3(\xi^1, \xi^2) = \pm\delta^2$. Mais comme $\partial_1 \phi(0)$ et $\partial_2 \phi(0)$ sont horizontaux et que $\partial_{11} \phi^3(0) = \langle \partial_{11} \phi(0) \mid n(0) \rangle = \kappa_1(0)$, $\partial_{12} \phi^3(0) = 0$ et $\partial_{22} \phi^3(0) = \kappa_2(0)$, cette équation devient

$$\kappa_1(0) (\xi^1)^2 + \kappa_2(0) (\xi^2)^2 = \pm 2\delta^2 + o(||\xi||^2).$$

En remplaçant ξ par $\sqrt{2}\delta\xi$, on obtient la relation cherchée.

17. Courbure totale, courbure moyenne

Proposition 17.1. *Soit $x \in S$ surface différentiable de $\mathbb{R}^3$. Alors*

$$|K(x)| = \lim_{V \to \{x\}} \frac{\operatorname{aire}(n(V))}{\operatorname{aire}(V)}$$

où V est un voisinage de x dont le diamètre tend vers 0.

Preuve. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\phi(U) = V$, où ϕ paramétrise S au voisinage de x. On a d'après la Proposition 14.6:

$$\operatorname{aire}(V) = \iint_U ||\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi||, \quad \operatorname{aire}(n(V)) = \iint_U ||\partial_1(n\circ\phi) \wedge \partial_2(n\circ\phi)||.$$

Comme

$$||\partial_1(n\circ\phi) \wedge \partial_2(n\circ\phi)|| = |K\circ\phi| ||\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi|| = \big(|K(x)| + o(\operatorname{diam} V)\big) ||\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi||,$$

la formule est démontrée. □

Définition 17.2. Une *surface réglée* est une surface de $\mathbb{R}^3$ qui admet une paramétrisation de la forme

$$\phi(u^1, u^2) = \alpha(u^1) + u^2\beta(u^1), \ (u^1, u^2) \in I \times \mathbb{R},$$

avec $\alpha,\ \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ différentiables et $||\beta|| = 1$.

Exemples. 1) Plans, cylindres ($\dot\beta = 0$), cônes.
2) La surface engendrée par les tangentes à une courbe: $\beta = \dot\alpha$.
3) Hélicoïde : $(u^1, u^2) \mapsto (\sinh u^2 \cos u^1, \sinh u^2 \sin u^1, au^1)$.

Terminologie. Les droites de direction β d'une surface réglée sont les *génératrices*; la courbe paramétrée par α est appelée *directrice*. Quand $[\alpha', \beta, \beta'] = 0$ on dit que la surface est *développable*.

Proposition 17.3. *La courbure totale d'une surface réglée est négative ou nulle.*

Preuve. Puisque $\phi(u) = \alpha(u^1) + u^2\beta(u^1)$ est une paramétrisation de la surface réglée, on a $\partial_{22}\phi = 0$. Donc $K = -h_{12}^2/(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$ est négatif ou nul. □

Definition 17.4. Une *surface minimale* est une surface à courbure moyenne nulle.

Proposition 17.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et D un ouvert borné tel que $\bar{D} \subset U$. Alors la paramétrisation $\phi^0 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une extrémale de la fonctionnelle $\phi \mapsto$* aire *$\phi(D)$ si, et seulement si, la surface $\phi^0(D)$ est minimale.*

Preuve. On considère les surfaces voisines de $\phi^0(D)$; elles sont paramétrées par

$$\phi = \phi^0 + sf(n^0 \circ \phi^0)$$

où $s \in [-1, 1]$ et $f : D \to \mathbb{R}$ est différentiable. En dérivant, on obtient

$$\partial_i \phi = \partial_i \phi^0 + s\partial_i f(n^0 \circ \phi^0) + sf\partial_i(n^0 \circ \phi^0).$$

Les coefficients de la première forme fondamentale de $\phi(D)$ sont donc

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \partial_i \phi^0 \mid \partial_j \phi^0 \rangle + s\langle \partial_i \phi^0 \mid f\partial_j(n^0 \circ \phi^0) \rangle + s\langle f\partial_i(n^0 \circ \phi^0) \mid \partial_j \phi^0 \rangle + O(s^2) \\ &= g^0_{ij} - 2sfh^0_{ij} + O(s^2), \end{aligned}$$

puisque $\langle \partial_i \phi^0 \mid \partial_j(n^0 \circ \phi^0) \rangle = -h^0_{ij}$. On en déduit, avec $G^0 = g^0_{11} g^0_{22} - (g^0_{12})^2$:

$$\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{G^0} - sf(g^0_{11} h^0_{22} + g^0_{22} h^0_{11} - 2g^0_{12} h^0_{12})/\sqrt{G^0} + O(s^2).$$

D'après (16.2), on en déduit que la surface $\phi^0(D)$ est une extrémale si, et seulement si,

$$\int_D f H^0 \sqrt{G^0} = 0$$

quel que soit f, donc ssi $H^0 = 0$. □

Theorème 17.6 (theorema egregium de Gauss). *La courbure totale d'une surface de classe C^3 ne dépend que de sa première forme fondamentale. Plus précisément*

$$K = \frac{1}{g_{11}}(\partial_2 \Gamma^2_{11} - \partial_1 \Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}).$$

Preuve. On décompose les vecteurs $\partial_{ij}\phi$ dans la base $\partial_1\phi$, $\partial_2\phi$, $n \circ \phi$:

$$\partial_{ij}\phi = x^1_{ij}\partial_1\phi + x^2_{ij}\partial_2\phi + y_{ij}(n \circ \phi).$$

La relation $\langle \partial_{ij}\phi \mid n \circ \phi \rangle = h_{ij}$ donne $y_{ij} = h_{ij}$; les produits scalaires avec $\partial_k \phi$ donnent

$$\Gamma_{ijk} = \langle \partial_{ij}\phi \mid \partial_k \phi \rangle = x^1_{ij} g_{1k} + x^2_{ij} g_{2k},$$

qui se résout en

$$x^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}.$$

On a montré:

$$\partial_{ij}\phi = \sum_k \Gamma^k_{ij}\partial_k\phi + h_{ij}(n\circ\phi).$$

Quand la surface est de classe C^3, on obtient en dérivant

$$\begin{aligned}\partial_l\partial_{ij}\phi &= \sum_k \partial_l\Gamma^k_{ij}\partial_k\phi + \Gamma^k_{ij}\partial_{lk}\phi + \partial_l h_{ij}(n\circ\phi) + h_{ij}\partial_l(n\circ\phi)\\ &\equiv \sum_k \big(\partial_l\Gamma^k_{ij} + \sum_p \Gamma^p_{ij}\Gamma^k_{lp} + h_{ij}a^k_l\big)\partial_k\phi \ (\bmod n\circ\phi)\end{aligned}$$

En prenant le coefficient de $\partial_2\phi$ dans les deux membres de la relation $\partial_2\partial_{11}\phi = \partial_1\partial_{12}\phi$ on trouve

$$\partial_2\Gamma^2_{11} + \sum_p \Gamma^p_{11}\Gamma^2_{2p} + h_{11}a^2_2 = \partial_1\Gamma^2_{12} + \sum_p \Gamma^p_{12}\Gamma^2_{1p} + h_{21}a^2_1$$

Il reste à employer (16.1) qui donne

$$h_{11}a^2_2 - h_{21}a^2_1 = -Kg_{11}$$

pour conclure. □

Application 17.7. La courbure de Gauss d'une surface vaut
a) en coordonnées géodésiques polaires ($g_{11} = 1,\ g_{12} = 0, g_{22} =: J^2$):

$$-\frac{\partial_{11}J}{J}$$

car dans ce cas
$\Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^2_{11} = 0,\ \Gamma^1_{12} = 0,\ \Gamma^2_{12} = (\partial_1 J)/J,\ \Gamma^1_{22} = -J(\partial_1 J),\ \Gamma^2_{22} = (\partial_2 J)/J.$
b) en coordonnées orthogonales ($g_{11} =: I^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} =: J^2$):

$$-\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\Big(\partial_1\frac{\partial_1 g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} + \partial_2\frac{\partial_2 g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\Big) = -\frac{1}{IJ}\Big(\partial_1\frac{\partial_1 J}{I} + \partial_2\frac{\partial_2 I}{J}\Big).$$

Theorème 17.8 (Bonnet). *Une surface de $\mathbb{R}^3$ est déterminée à un déplacement près par ses deux premières formes fondamentales.* □

18. Théorème de Gauss-Bonnet et courbure géodésique

On considère une surface *orientée* S de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal unitaire n.

Définition 18.1. Un *domaine régulier* R de S est une partie compacte de S dont le bord ∂R est formé d'un nombre fini de courbes C^2 régulières simples ne se coupant pas. Le bord de R, paramétré par γ, est orienté de sorte que $\nu = n \wedge \dot{\gamma}$ pointe vers l'intérieur de R. Un domaine régulier est *simple* s'il est homéomorphe à un disque.

Théorème 18.2 (Gauss). *Soit R un domaine simple contenu dans l'image d'une paramétrisation de S tel que ∂R est réunion de N géodésiques $\gamma_1, \dots, \gamma_N$. Alors*

$$\iint_R K\,dA + \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 2\pi,$$

où θ_i est l'angle extérieur ($\in [-\pi, \pi]$) entre le vecteur tangent final de la géodésique γ_{i+1} et le vecteur tangent initial de γ_{i+1}.

Preuve. On suppose que le domaine est contenu dans l'image de l'application exponentielle et on travaille en coordonnées géodésiques polaires, donc $K = -\frac{1}{J}\partial_{11} J$, où $J^2 = g_{22}$. Voir le théorème 18.6 pour lever cette restriction. En chaque point régulier du bord de R, soit φ l'angle que ∂R fait avec le rayon géodésique, variant continûment. Si $\gamma = \phi \circ \sigma$ paramétrise le bord de R parcouru à vitesse 1, on a:

$$\cos\varphi = 1 \cdot \dot{\sigma}^1 + J^2 \cdot 0 \cdot \dot{\sigma}^2 = \dot{\sigma}^1, \qquad \text{d'où} \quad \ddot{\sigma}^1 = -\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

D'autre part, puisque ∂R est géodésique, on a aussi par (15.1):

$$\ddot{\sigma}^1 + \Gamma^1_{22}(\dot{\sigma}^2)^2 = 0$$

si bien que $\ddot{\sigma}^1 = J(\partial_1 J)(\dot{\sigma}^2)^2$. De là, on déduit, grâce à $(\dot{\sigma}^1)^2 + J^2(\dot{\sigma}^2)^2 = 1$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\ddot{\sigma}^1}{\sin\varphi} = -\frac{J(\partial_1 J)(\dot{\sigma}^2)^2}{\sqrt{1-(\dot{\sigma}^1)^2}} = -\frac{J(\partial_1 J)(\dot{\sigma}^2)^2}{J\dot{\sigma}^2} == -(\partial_1 J)\dot{\sigma}^2.$$

Intégrons en employant la formule de Green-Riemann:

$$\begin{aligned}\iint_R K\,\mathrm{d}A &= -\iint_{\phi^{-1}(R)} (\partial_{11} J)\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = -\int_{\partial\phi^{-1}(R)} (\partial_1 J)\,\mathrm{d}u^2 \\ &= -\int_{\partial\phi^{-1}(R)} (\partial_1 J)\dot{\sigma}^2\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \dot{\varphi}_j\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(t_{j+1}) - \varphi_j(t_j) \\ &= \varphi_N(t_{N+1}) - \varphi_1(t_1) - \theta_2 - \cdots - \theta_N = 2\pi - \sum_1^N \theta_j,\end{aligned}$$

car $\varphi_{j+1}(t_{j+1}) - \varphi_j(t_{j+1}) = \theta_{j+1}$ quand $1 \le j < N$ et $\varphi_1(t_1) - (\varphi_N(t_{N+1}) - 2\pi) = \theta_1$.
□

Exemple. Si R est un triangle géodésique, on a

$$\iint_R K\,dA + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi, \qquad \text{donc} \qquad \iint_R K\,dA = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi$$

où $\varphi_i = \pi - \theta_i$ est l'angle intérieur. On en déduit des formules pour l'aire des triangles géodosiques sur une surface à courbure constante.

Définition 18.3. Pour une courbe γ tracée sur S, paramétrée par la longueur d'arc, le vecteur $\nu = n \wedge \dot\gamma$ est appelé vecteur normal unitaire tangentiel à γ. La *courbure géodésique* κ_g de γ est définie par

$$\ddot\gamma = \rho_n n + \kappa_g \nu, \ \text{i.e.,} \quad \kappa_g = [n, \dot\gamma, \ddot\gamma].$$

Lemme 18.4. *En coordonnées géodosiques polaires, on a :* $\kappa_g = (\partial_1 J)\dot\sigma^2 + \dot\varphi$, *où* φ *est l'angle entre le rayons géodésique et* $\dot\gamma$*.*

Preuve. On dérive deux fois $\gamma = \phi \circ \sigma$:

$$\dot\gamma = \dot\sigma^1 \partial_1 \phi + \dot\sigma^2 \partial_2 \phi, \quad \ddot\gamma = \sum_k (\ddot\sigma^k + \textstyle\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dot\sigma^i \dot\sigma^j) \partial_k \phi + \displaystyle\sum_{i,j} h_{ij} \dot\sigma^i \dot\sigma^j\, n.$$

La composante tangentielle de $\ddot\gamma$ est donc $\kappa_g \nu = \sum_k \big(\ddot\sigma^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dot\sigma^i \dot\sigma^j\big) \partial_k \phi$. Cette expression montre que la courbure géodésique ne dépend que de la première forme fondamentale.

En coordonnées géodésiques polaires, on a déjà vu la relation $\dot\sigma^1 = \cos\varphi$. Comme le vecteur ν fait un angle de $\varphi + \pi/2$ avec le rayon géodésique, on a, puisque $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = 0$ et $\Gamma^1_{22} = -J(\partial_1 J)$:

$$\langle \kappa_g \nu \mid \partial_1 \phi \rangle = \kappa_g \cos(\varphi + \pi/2) = \ddot\sigma^1 - J(\partial_1 J)(\dot\sigma^2)^2.$$

La relation $(\dot\sigma^1)^2 + J^2 (\dot\sigma^2)^2 = 1$ donne encore $\dot\sigma^2 = \dfrac{1}{J} \sin\varphi$, si bien que

$$-\kappa_g \sin\varphi = -\dot\varphi \sin\varphi - (\partial_1 J)\dot\sigma^2 \sin\varphi. \square$$

Théorème 18.5 (Gauss-Bonnet local). *Soit* R *un domaine simple contenu dans l'image d'une paramétrisation de* S*. Alors*

$$\iint_R K\,dA + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^N \theta_i = 2\pi.$$

Preuve. Il suffit d'ajouter le terme correctif dans la preuve du théorème 18.2. $\square$

Définition 18.6. Une *triangulation* d'un domaine régulier est une famille finie de triangles (domaine simple à 3 sommets) $\mathcal{T} = \{T_j\}$ telle que $R = \bigcup T_j$ et si $T_j \cap T_k \neq \emptyset$ alors $T_j \cap T_k$ est un sommet, un côté ou un triangle.

Fait. *Tout domaine régulier admet une triangulation.*

Théorème 18.6 (Gauss-Bonnet global). *Soit R un domaine régulier de S. Alors*

$$\iint_R K\,dA + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

où $\chi(R)$ est la caractéristique d'Euler de R, c'est-à-dire le nombre de sommets, moins le nombre de côtés, plus le nombre de triangles d'une triangulation de R.

Preuve. On choisit une triangulation $\mathcal{T} = \{T_j\}_{1\leq j\leq n}$ assez fine pour pouvoir appliquer le théorème 18.5 dans chaque triangle. En sommant sur j, on obtient

$$\sum_1^n \iint_{T_j} K\,dA + \sum_1^n \int_{\partial T_j} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{3} \theta_{jk} = 2\pi n.$$

Introduisons les angles intérieurs $\varphi_{jk} := \pi - \theta_{jk}$. Ainsi $\sum_{j,k}\theta_{jk} = 3n\pi - \sum_{j,k}\varphi_{jk}$. Les somnmets de $\mathcal{T}$ sont de trois types: sommets intérieurs, sommets de ∂R (existants avant la triangulation) et sommets situés sur ∂R ajoutés par la triangulation (nouveaux). En un sommet, on a

$$\sum_{j,k}\varphi_{jk} = 2\pi,\ \pi - \theta_i,\ \pi$$

suivant le type. Soit C_{int} [resp. C_{bd}] le nombre de cotés intérieurs [resp. contenus dans ∂R] et S_{int} [resp. S_{bd}] le nombre de sommets intérieurs [resp. situés dans ∂R]. Puisque chaque côté intérieur est commun à deux triangles et que ∂R est une courbe fermée, on a:

$$2C_{int} + C_{bd} = 3n \quad \text{et} \quad C_{bd} = S_{bd}.$$

D'après ce qui précède,

$$\sum_{j,k}\varphi_{jk} = 2\pi S_{int} + \pi(S_{bd} - N) + N\pi - \sum\theta_i = \pi(2S_{int} + S_{bd}) - \sum\theta_i,$$

$$\sum_{j,k}\theta_{jk} = 3n\pi - \pi(2S_{int} + S_{bd}) + \sum\theta_i = \pi(2C_{int} + C_{bd} - 2S_{int} - S_{bd}) + \sum\theta_i$$

$$= \pi(2C_{int} + 2C_{bd} - 2S_{int} - 2S_{bd}) + \sum\theta_i.$$

La formule est démontrée. □

Corollaire 18.5. *La caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation.*

Exemple. Sur le tore, l'intégrale de la courbure de Gauss est nulle.

Index