

## ANALYSE II RÉELLE 2007-08

### TABLE DES MATIÈRES

1. Espaces normés, espaces métriques . . . . .	2
2. Boules, ouverts, fermés, adhérence . . . . .	6
3. Espaces métriques complets, théorème du point fixe . . . . .	10
4. Espace des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ , métrique de Hausdorff . . . . .	16
5. Fractals, méthode IFS . . . . .	18
6. Applications différentiables . . . . .	21
7. Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	30
8. Théorème des fonctions implicites . . . . .	33
9. Théorème d'inversion locale, sous-variétés . . . . .	38
10. Calcul des variations . . . . .	41
11. Intégrales multiples . . . . .	45
12. Formule du changement de variables . . . . .	48
13. Intégrales curvilignes dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	53
14. Intégrales de surface dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	58
15. Formes différentielles de degré 1 . . . . .	64
16. Formes différentielles de degré supérieur . . . . .	67
17. Formule de Stokes générale . . . . .	70
18. Équations différentielles, généralités . . . . .	73
19. Existence et unicité locales . . . . .	79
20. Solutions approchées, méthode d'Euler . . . . .	83
21. Équations différentielles linéaires . . . . .	85
22. Équations linéaires à coefficients constants . . . . .	89
23. Dépendance des paramètres et conditions initiales . . . . .	94
24. Stabilité . . . . .	96
Références . . . . .	101
Index . . . . .	102

### 1. Espaces normés, espaces métriques

**Définition 1.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Une *norme* sur  $E$  est une application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les propriétés suivantes ont lieu, pour tous  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

- a)  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  ;
- b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogénéité) ;
- c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

Le couple  $(E, \| \cdot \|)$  est un *espace normé*.

**Remarque 1.2.** L'inégalité triangulaire entraîne l'inégalité

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

#### Exemples 1.3.

1) Quand  $E = \mathbb{R}^n$ , les expressions suivantes, pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  :

$$\|x\|_2 := \left( \sum_1^n x_j^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \quad \|x\|_1 := \sum_1^n |x_j|$$

définissent des normes.

2) Si  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace normé et  $X$  un ensemble, soit

$$\mathcal{B}(X, E) := \left\{ f : X \rightarrow E \mid \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty \right\}$$

l'espace des fonctions bornées de  $X$  dans  $E$ . Alors l'application  $\| \cdot \|_\infty : \mathcal{B}(X, E) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$  est une norme sur  $\mathcal{B}(X, E)$ . C'est la *norme uniforme*.

3) Si  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace normé et si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , alors la restriction de  $\| \cdot \|$  à  $F$  est une norme sur  $F$ . Cas particulier, l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$  muni de la norme uniforme comme sous-espace de  $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ .

4) Si  $(E, \| \cdot \|_E)$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  sont des espaces normés, alors  $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$  définit une norme sur  $E \times F$ .

5) Sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , les expressions  $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$  et  $\|f\|_2 := \left( \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$  définissent des normes, grâce au lemme suivant.

**Lemme 1.4.**  $0 \leq f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  et  $\int_0^1 f = 0 \implies f = 0$ .

*Preuve.* Si  $f$  n'était pas nulle, il existerait  $t_0 \in [0, 1]$  tel que  $f(t_0) > 0$ . Puisque  $f$  est continue, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$t \in [0, 1] \text{ et } |t - t_0| < \delta \implies f(t) > f(t_0)/2.$$

Comme l'un des intervalles  $]t_0 - \delta, t_0]$  ou  $[t_0, t_0 + \delta[$  est contenu dans  $[0, 1]$ , on aura, dans le premier cas :

$$\int_0^1 f(t) dt \geq \int_{t_0 - \delta}^{t_0} f(t) dt \geq \delta f(t_0)/2 > 0,$$

donc l'intégrale de  $f$  n'est pas nulle. Idem dans le deuxième cas.  $\square$

**Remarque 1.5.** Si  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$ , le nombre  $d(x, y) := \|x - y\|$  est une mesure de l'écart entre  $x$  et  $y$ . La fonction  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  jouit entre autres des propriétés suivantes :

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  et  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  ;
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie) ;
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

**Définition 1.6.** Soit  $X$  un ensemble ; une *distance* ou *métrique* sur  $X$  est la donnée d'une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait les trois propriétés de la Remarque (1.5). Le couple  $(X, d)$  est un *espace métrique*.

### Exemples 1.7.

- 1) Tout espace normé est un espace métrique par la Remarque (1.5).
- 2) Si  $A \subset X$  et si  $d$  est une distance sur  $X$ , la restriction de  $d$  à  $A \times A$  est une distance sur  $A$  (métrique ou distance induite).
- 3) Pour  $X$  quelconque, la fonction  $d$  définie par  $d(x, y) := 1$  si  $x \neq y$  et  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$ , est une métrique sur  $X$  (métrique discrète).
- 4) La fonction définie dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  par  $d(x, y) := \|x\|_2 + \|y\|_2$  si  $x \neq y$  et  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$ , définit une distance sur  $\mathbb{R}^2$  (distance postale ou SNCF).

**Définition 1.8.** Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans un espace métrique  $(X, d)$  et  $x \in X$ . On dit que la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  *converge vers*  $x$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ . On écrit :

$$x_n \rightarrow x \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Cela signifie très précisément

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

### Exemples 1.9.

1) Dans  $(\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , on a

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ quand } n \rightarrow \infty &\iff f_n \rightarrow f \text{ uniformément quand } n \rightarrow \infty \\ &\implies f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

2) Dans  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ , on a  $f_n \rightarrow f$  quand  $n \rightarrow \infty$  si, et seulement si,  $f_n$  converge vers  $f$  en moyenne. Cela n'implique pas  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Définition 1.10.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques,  $a \in X$ ,  $b \in Y$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  *admet la limite*  $b$  *en*  $a$  si

$$(1.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d_X(x, a) < \delta \text{ et } x \neq a \implies d_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

Il n'est pas nécessaire que  $f$  soit définie au point  $a$ .

NOTATION :  $\lim_a f = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  ou  $f(x) \rightarrow b$  quand  $x \rightarrow a$ .

L'application  $f$  est *continue en  $a$*  si  $\lim_a f = f(a)$ , i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

L'application  $f : X \rightarrow Y$  est *continue* si elle est continue en tout point de  $X$ .

La proposition suivante montre que dans un espace métrique, les suites permettent de caractériser les limites et donc la continuité.

**Proposition 1.11.** *Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques,  $a \in X$ ,  $b \in Y$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application. Alors  $\lim_a f = b$  si, et seulement si, pour toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X \setminus \{a\}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ . Cas particulier :  $f$  est continue en  $a$  ssi  $x_n \rightarrow a$  quand  $n \rightarrow \infty \implies f(x_n) \rightarrow f(a)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

*Preuve.* Supposons  $\lim_a f = b$  et  $x_n \rightarrow a$ . Alors pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que (1.1) a lieu. Puisque  $x_n \rightarrow a$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $d_X(x_n, a) < \delta$  si  $n \geq N$ . Donc  $d_Y(f(x_n), b) < \varepsilon$ , si  $n \geq N$ .

Pour la réciproque, supposons  $\lim_a f \neq b$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $x \neq a$  qui satisfait  $d_X(x, a) < \delta$  et  $d_Y(f(x), b) \geq \varepsilon$ . On choisit successivement  $\delta = 1/n$ , pour  $n \geq 1$ . D'où une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $X \setminus \{a\}$  qui tend vers  $a$  mais telle que son image  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne tend pas vers  $b$ .  $\square$

**Définition 1.12.** Deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sur un espace vectoriel  $E$  sont *équivalentes* s'il existe  $c > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \forall x \in E.$$

Deux distances  $d_1$  et  $d_2$  sur un ensemble  $X$  sont *uniformément équivalentes* s'il existe  $c > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y), \forall x, y \in X.$$

Deux distances  $d_1$  et  $d_2$  sur un ensemble  $X$  sont *équivalentes* si, pour toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et pour tout  $a \in X$  :

$$x_n \rightarrow a \text{ dans } (X, d_1) \text{ quand } n \rightarrow \infty \iff x_n \rightarrow a \text{ dans } (X, d_2) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

En d'autres termes,  $d_1$  et  $d_2$  sont équivalentes si, et seulement si, les deux applications identité  $(X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  et  $(X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$  sont continues.

### Exemples 1.13.

1) Les distances  $d_1(x, y) := |x - y|$  et  $d_2(x, y) := |x - y|/(1 + |x - y|)$  sur  $\mathbb{R}$  sont équivalentes mais pas uniformément équivalentes.

2) Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

Par suite les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1.14.** *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

*Preuve.* On choisit une base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$ . Pour tout  $x \in E$  on décompose  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . On en déduit une application linéaire  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\phi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ , qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Puisque toute norme sur  $E$  définit une norme sur  $\mathbb{R}^n$  via  $\phi$ , et que deux normes sur  $E$  sont équivalentes ssi leurs images sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$ , il suffit de vérifier le résultat pour  $E = \mathbb{R}^n$ .

Soit donc  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . L'inégalité triangulaire et l'homogénéité donnent, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\|x\| = \left\| \sum x_j e_j \right\| \leq \sum |x_j| \|e_j\| \leq M \|x\|_1,$$

où  $M := \max_j \|e_j\|$  et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Pour obtenir une inégalité en sens inverse, on introduit  $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$ . C'est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . La fonction  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $N(x) := \|x\|$ , est continue puisque

$$\|x - y\| \leq M \|x - y\|_1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Elle atteint donc son minimum  $m \geq 0$  sur  $S$ . Comme  $0 \notin S$ , ce minimum est positif. Prenons  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Alors  $x/\|x\|_1$  appartient à  $S$  et donc  $\|x/\|x\|_1\| \geq m$ . En multipliant par  $\|x\|_1$ , il vient

$$\|x\| \geq m \|x\|_1.$$

Puisque cette dernière inégalité est aussi valable si  $x = 0$ , on a montré l'équivalence de  $\|\cdot\|$  et de  $\|\cdot\|_1$ . Le théorème en découle. □



**Exercice 1.1.**

a) Soit  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  un fonction bornée. Vérifier

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} f(x,y) = \sup_{x \in A} (\sup_{y \in B} f(x,y)).$$

Par contre,

$$\inf_{x \in A} (\sup_{y \in B} f(x,y)) \neq \sup_{x \in A} (\inf_{y \in B} f(x,y)).$$

b) Pour  $f$  et  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions bornées, montrer l'inégalité

$$\sup_A (f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g.$$

Pourquoi l'égalité n'a pas lieu et quelle est l'inégalité correspondante pour inf ?

**Exercice 1.2.** Soit  $\mathcal{P}$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour  $f \in \mathcal{P}$  définie par  $f(x) = \sum_1^n a_k x^k$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_k \in \mathbb{R}$ , on pose

$$\|f\| := \sum_1^n |a_k|.$$

a) Vérifier que l'expression ci-dessus définit une norme sur  $\mathcal{P}$ .

b) Établir l'inégalité  $\|f\|_\infty \leq \|f\|$ ,  $\forall f \in \mathcal{P}$ .

c) Si  $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ , constater que la suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tend uniformément vers 0, mais que  $\|f_n\|$  tend vers l'infini. En déduire que les normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes sur  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 1.3.** On définit une suite de fonctions  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $\mathcal{C}([0, 1])$  par

$$g_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{nx} & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calculer  $\|g_n\|_\infty$ ,  $\|g_n\|_1$ ,  $\|g_n\|_2$  et  $\|g_{n+k} - g_n\|_\infty$ ,  $\|g_{n+k} - g_n\|_1$ ,  $\|g_{n+k} - g_n\|_2$ , pour  $n$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Étudier la convergence de la suite  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  muni de ces trois normes.

## 2. Boules, ouverts, fermés, adhérence

**Définition 2.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $a \in X$  et  $r > 0$ . La *boule (ouverte)* de centre  $a$  et rayon  $r$  est le sous-ensemble suivant de  $X$  :

$$B(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

Un sous-ensemble  $U$  de  $X$  est *ouvert* si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall a \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subseteq U.$$

### Exemples 2.2.

- 1) Dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne, les boules sont les boules euclidiennes.
- 2) Dans un espace métrique discret  $X$ , on a :  $B(a, r) = \{a\}$  si  $r \leq 1$  et  $B(a, r) = X$  si  $r > 1$ . Tout sous-ensemble d'un espace métrique discret est ouvert.
- 3) Pour  $a \in X$  quelconque, le complémentaire  $X \setminus \{a\}$  est ouvert car il contient  $B(x, d(a, x))$ , si  $x \in X \setminus \{a\}$ .
- 4) La boule  $B(a, r)$  est ouverte.

**Lemme 2.3.** Dans tout espace métrique  $X$ , l'ensemble vide et l'espace entier  $X$  sont ouverts; toute réunion d'ouverts est ouverte; toute intersection finie d'ouverts est ouverte.

*Preuve.* Vérifions la troisième affirmation. Soient  $U_1, \dots, U_k$  des ouverts de  $X$  et  $x$  un point de  $U_1 \cap \dots \cap U_k$ . Il existe  $r_1, \dots, r_k > 0$  tels que  $B(x, r_1) \subseteq U_1, \dots, B(x, r_k) \subseteq U_k$ . Avec  $r := \min_{1 \leq j \leq k} r_j$ , on a  $B(x, r) \subseteq B(x, r_j) \subseteq U_j$  pour  $1 \leq j \leq k$  et donc  $B(x, r) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_k$ .  $\square$

**Définition 2.4.** Un sous-ensemble  $F$  d'un espace métrique  $X$  est *fermé* si son complémentaire  $X \setminus F$  est ouvert. L'*adhérence* d'un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est le sous-ensemble

$$\bar{A} := \{x \in X \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

L'inclusion  $A \subseteq \bar{A}$  est évidente.

**Exemples 2.5.**

- 1) Pour tout  $x \in X$ , le singleton  $\{x\}$  est fermé.
- 2) Les "boules fermées"  $\{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$  sont fermées.
- 3) Dans  $\mathbb{R}$  muni de la métrique usuelle,  $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .
- 4) Si  $X = \mathbb{R}$ , l'adhérence de  $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  est égale à  $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ .
- 5) Si  $X = \mathbb{R}_+^*$ , l'ensemble  $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  est fermé.

**Proposition 2.6.** *Pour tout sous-ensemble  $A$  d'un espace métrique  $X$ , on a :*

- 1)  $A$  est fermé  $\iff \overline{A} = A$  ;
- 2)  $\overline{A}$  est l'ensemble des points limites de  $A$ , i.e.,

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{il existe une suite } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } A \text{ telle que } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\}.$$

*Preuve.* 1) Si  $A$  est fermé, alors  $X \setminus A$  est ouvert. Par suite, pour tout  $x \notin A$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subseteq X \setminus A$ . Donc  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ . On a montré  $x \notin A \implies x \notin \overline{A}$ . Par définition,  $x \notin \overline{A}$  signifie qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ . Donc  $B(x, r)$  est contenu dans  $X \setminus \overline{A}$  et ainsi  $X \setminus \overline{A}$  est ouvert. On a montré que  $\overline{A}$  est fermé. La réciproque en découle.

2) Si  $x \in \overline{A}$ , il est facile de construire une suite de  $A$  qui tend vers  $x$  en prenant  $r = 1/n$  dans la définition 2.4. Réciproquement, la limite  $x$  d'une suite convergente de  $A$  appartient à  $\overline{A}$  car toute boule centrée en  $x$  contient un élément de  $A$  (en fait une infinité).  $\square$

**Proposition 2.7.** *Soient  $X, Y$  deux espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$  une application.*

*Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $f$  est continue ;
- (ii) pour tout  $V$  ouvert de  $Y$ ,  $f^{-1}(V)$  est un ouvert de  $X$  ;
- (iii) pour tout  $F$  fermé de  $Y$ ,  $f^{-1}(F)$  est un fermé de  $X$ .

*Preuve.* (i)  $\implies$  (ii) : Si  $x \in f^{-1}(V)$  alors  $f(x) \in V$  qui est ouvert. Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$ . Par continuité de  $f$  en  $x$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$ . On a montré  $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$ .

(ii)  $\implies$  (i) : Pour  $\varepsilon > 0$  donné, la boule  $B(x, \varepsilon)$  est ouverte. Donc  $f^{-1}(B(x, \varepsilon))$  est ouverte et contient  $x$ . Elle contient donc  $B(x, \delta)$  et par suite,  $f(B(x, \delta)) \subseteq B(x, \varepsilon)$  qui démontre la continuité de  $f$  au point  $x$ .

(ii)  $\iff$  (iii) :  $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ .  $\square$

**Définition 2.8.** Pour des entiers  $n \geq 0$  et  $0 \leq k \leq n$ , on définit le  $k$ -ième polynôme de Bernstein d'ordre  $n$  par

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si  $f$  est une fonction réelle sur  $[0, 1]$ , le  $n$ -ième polynôme de Bernstein de  $f$  est le polynôme  $B^n f$  défini par

$$B^n f(x) := \sum_0^n f(k/n) B_k^n(x), \quad x \in [0, 1].$$

**Lemme 2.9.** *Les propriétés suivantes ont lieu pour  $j, n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$  :*

- 1)  $B_j^n(x) \geq 0$ ,  $\sum_0^n B_k^n(x) = 1$  ;
- 2)  $\sum_0^n \frac{k}{n} B_k^n(x) = x$  ;
- 3)  $\sum_0^n \frac{k^2}{n^2} B_k^n(x) = x^2 + \frac{1}{n} x(1-x)$ .

*Preuve.* 1) Puisque  $x$  et  $1-x$  sont positifs ou nuls dans  $[0, 1]$  la première relation a lieu. La deuxième découle de la formule du binôme :

$$\sum_0^n B_k^n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

2) C'est un calcul :

$$\begin{aligned} \sum_0^n \frac{k}{n} B_k^n(x) &= \sum_0^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_1^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_0^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} = x. \end{aligned}$$

3) Idem en plus long :

$$\begin{aligned} \sum_0^n \frac{k^2}{n^2} B_k^n(x) &= \sum_0^{n-1} \frac{(j+1)(n-1)!}{nj!(n-1-j)!} x^{j+1} (1-x)^{n-j} \\ &= \sum_1^{n-1} \frac{(n-1)!}{n(j-1)!(n-1-j)!} x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} + \frac{x}{n} \\ &= \frac{x}{n} \sum_0^{n-2} \frac{(n-1)(n-2)!}{i!(n-2-i)!} x^{i+1} (1-x)^{n-2-i} + \frac{x}{n} = \frac{x^2(n-1)}{n} + \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.10. WEIERSTRASS.** *Si  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ , alors la suite  $\{B^n f\}_{n \in \mathbb{N}}$  des polynômes de Bernstein de  $f$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .*

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f$  est uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$(2.1) \quad x, y \in [0, 1] \text{ et } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$



Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , la majoration suivante a lieu :

$$|f(x) - B^n f(x)| = |f(x) - \sum_0^n f(k/n) B_k^n(x)| \leq \sum_0^n |f(x) - f(k/n)| B_k^n(x)$$

On partage la dernière somme en deux : les termes pour lesquels  $|x - k/n|$  est inférieur à  $\delta$  et ceux pour lesquels  $|x - k/n| \geq \delta$ . Il vient

$$|f(x) - B^n f(x)| \leq \sum_{|x-k/n| < \delta} |f(x) - f(k/n)| B_k^n(x) + \sum_{|x-k/n| \geq \delta} |f(x) - f(k/n)| B_k^n(x).$$

D'après (2.1) et (i) du Lemme 2.9, la première somme est majorée par  $\varepsilon$ .

Dans la deuxième somme, on a  $1 \leq \frac{1}{\delta^2}(x - k/n)^2$  ; elle est donc majorée par

$$S_2 := \sum_{k=0}^n 2\|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2} (x - k/n)^2 B_k^n(x).$$

Il reste à développer  $(x - k/n)^2$  et à utiliser le Lemme 2.9 pour calculer  $S_2$  :

$$S_2 = \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} (x^2 - 2xx + x^2 + \frac{1}{n})x(1-x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n\delta^2} \frac{1}{4} = \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Quand  $n$  est plus grand que  $\frac{\|f\|_\infty}{2\varepsilon\delta^2}$ , la somme  $S_2$  est majorée par  $\varepsilon$ .

On a montré

$$|f(x) - B^n f(x)| \leq 2\varepsilon \text{ si } n \geq \frac{\|f\|_\infty}{2\varepsilon\delta^2} \text{ et } x \in [0, 1],$$

d'où la convergence uniforme de  $B^n f$  vers  $f$ .

□



**Exercice 2.1.** Soit  $M(2, 2, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des  $2 \times 2$ -matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Puisque cet ensemble est en bijection avec  $\mathbb{R}^4$ , on le munit de la métrique euclidienne. Pour tout  $i = 0, 1, 2$ , on considère les ensembles :

$$\Sigma^i = \{A \in M(2, 2, \mathbb{R}) \mid \text{rang}(A) = i\}$$

- a) Dire si les ensembles  $\Sigma^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , sont ouverts, fermés ou ni l'un, ni l'autre.
- b) Trouver leurs adhérences.

**Exercice 2.2.** Définissons :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2/x_1 & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , décrire l'ensemble  $f^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon[)$  et en déduire que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Exercice 2.3.** Les applications suivantes :

$$I : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

$$ev_0 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto f(0)$$

sont-elles continues, lorsqu'on prend sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  la norme  $\| \cdot \|_\infty$  ? la norme  $\| \cdot \|_1$  ?

**Exercice 2.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On définit

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \forall x, y \in X.$$

Vérifier que  $d'$  est une distance sur  $X$ . Observer que  $d'$  est bornée sur  $X$  ; elle n'est donc pas uniformément équivalente à  $d$  en général. Néanmoins, elle est équivalente à  $d$ .

**Exercice 2.5.** Dans un espace normé  $(E, \| \cdot \|)$ , on considère l'ensemble  $B = B(0, 1) := \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$  et on définit l'application  $\phi : B \rightarrow E$  par  $\phi(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}$ .

Montrer que  $\phi$  est bijective continue. Calculer son inverse  $\phi^{-1}$  et vérifier qu'elle est continue.

Tracer le graphe de  $\phi$  pour  $(E, \| \cdot \|) = (\mathbb{R}, | \cdot |)$ .

**Exercice 2.6.** Montrer que, dans un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$ , l'adhérence de la boule ouverte  $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$  est l'ensemble  $\{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$ . Trouver un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}$  tel que, si on le munit de la métrique induite par la valeur absolue, l'affirmation analogue est fautive ; c'est-à-dire qu'il existe  $a \in X$  et  $r > 0$  tels que l'adhérence de  $B(a, r)$  est strictement incluse dans  $\{x \in X \mid |x - a| \leq r\}$ .

**Exercice 2.7.** Soit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  est non vide, on définit la *distance de  $x$  à  $A$*  par

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Montrer les propriétés suivantes :

(1) la fonction  $x \mapsto d(x, A)$  est continue en vérifiant l'inégalité

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X ;$$

(2)  $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$  ;

(3) si  $A$  est fermé, il existe  $a \in A$  tel que  $d(x, a) = d(x, A)$ .

**Exercice 2.8.** Soit  $B_k^n$  le  $k$ -ième polynôme de Bernstein de degré  $n$ . Trouver ses extrema sur  $[0, 1]$  et esquisser son graphe.

### 3. Espaces métriques complets, théorème du point fixe

**Définition 3.1.** Une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans un espace métrique  $(X, d)$  est une *suite de Cauchy* si  $d(x_n, x_p) \rightarrow 0$  quand  $n, p \rightarrow \infty$ , i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x_p) < \varepsilon \text{ si } n, p \geq N_\varepsilon.$$

L'espace  $(X, d)$  est *complet* si toute suite de Cauchy de  $X$  converge (dans  $X$ ), i.e., pour toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de Cauchy de  $X$ , il existe un élément  $x \in X$  tel que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

### Exemples 3.2.

- 1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
- 2) L'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est complet. L'intervalle  $]0, 1[$  n'est pas complet.

**Remarque 3.3.** Tout espace métrique peut être complété dans le sens suivant : si  $(X, d)$  est un espace métrique, il existe un espace métrique complet  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  et une injection  $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$  tels que  $\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$ , pour tous  $x, y \in X$  et  $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$ . On peut réaliser  $\tilde{X}$  comme espace quotient de l'espace de toutes les suites de Cauchy de  $X$  par la relation d'équivalence

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \iff d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Voir [12] pour le passage de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{R}$ .

**Lemme 3.4.** *Toute suite de Cauchy d'un espace normé est bornée, c'est-à-dire pour toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$ , il existe  $M > 0$  tel que  $\|x_n\| \leq M$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Preuve.* Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|x_p - x_N\| < 1$  si  $p \geq N$ .

Soit  $M' := \max\{\|x_j\| \mid 0 \leq j \leq N\}$ . Alors

$$\|x_p\| \leq \|x_p - x_N\| + \|x_N\| \leq 1 + M', \text{ pour } p \geq N,$$

donne  $\|x_n\| \leq M' + 1 =: M$ , pour  $n \geq 0$ . □

**Théorème 3.5.** *Soit  $X$  un ensemble et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors l'espace normé  $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p), \|\cdot\|_\infty)$  est complet. Plus généralement, l'espace  $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est complet si  $E$  est complet.*

*Preuve.* Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ . Pour  $x \in X$  et  $n, p \in \mathbb{N}$ , l'inégalité

$$\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \|f_n - f_p\|$$

montre que la suite  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $X$ . Puisque  $X$  est complet, elle admet une limite désignée par  $f(x)$ . Ceci définit une application  $f : X \rightarrow E$ . Il reste à montrer que  $f$  est bornée et que c'est la limite de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Puisque toute suite de Cauchy est bornée, il existe  $M > 0$  tel que  $\|f_n\| \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Étant donné  $x \in X$ , puisque  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$ , dépendant *a priori* de  $x$ , tel que  $\|f_n(x) - f(x)\| < 1$ . Donc

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x)\| < 1 + \|f_n\| \leq 1 + M.$$

Comme  $x$  était quelconque,  $f$  est bornée.

Étant donné  $\varepsilon$ , il existe par définition  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|f_n - f_p\| < \varepsilon \text{ si } n, p \geq N.$$

Donc quel que soit  $x \in X$  :

$$\|f_n(x) - f_p(x)\| < \varepsilon \text{ si } n, p \geq N.$$

En faisant tendre  $p$  vers l'infini, on obtient

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N, \forall x \in X,$$

et, par suite,  $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ , si  $n \geq N$ . □

**Proposition 3.6.** *Soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^l$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Alors l'espace des fonctions continues  $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p), \|\cdot\|_\infty)$  est complet.*

*Preuve.* Il suffit de montrer que  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  est fermé dans  $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p), \|\cdot\|_\infty)$ . Soit donc  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  qui converge vers  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$  il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|f - f_N\| < \varepsilon.$$

Comme  $f_N$  est uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|f_N(x) - f_N(y)\| < \varepsilon, \text{ si } x, y \in K \text{ et } \|x - y\| < \delta.$$

L'inégalité triangulaire permet de conclure

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(y)\| + \|f_N(y) - f(y)\| < 3\varepsilon,$$

si  $x, y \in K$  et  $\|x - y\| < \delta$ . □

**Proposition 3.7.** MÉTHODE DE NEWTON. *Soit  $f : [a - r, a] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable qui satisfait :*

$$f(a - r) < 0, \quad f(a) > 0, \quad 0 < f' \text{ croissante.}$$

*Alors l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$ , pour  $x \in [a - r, a]$ , est la limite de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 := a.$$

*Preuve.* Elle est identique à la preuve de la méthode de Newton simplifiée donnée ci-dessous. □

**Proposition 3.8.** MÉTHODE DE NEWTON SIMPLIFIÉE. *Sous les mêmes hypothèses, l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$ , pour  $x \in [a - r, a]$ , est la limite de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$(3.1) \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(a)}, \quad x_0 := a.$$

*Preuve.* Soit  $\omega \in [a - r, a]$  l'unique solution de  $f(x) = 0$ . Montrons par récurrence

$$\omega \leq x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

C'est vrai pour  $n = 0$ . Supposons-le vrai pour  $n$ . Le théorème des accroissements finis donne  $\xi \in ]\omega, x_n[$  tel que

$$f(x_n) = f(\omega) + f'(\xi)(x_n - \omega).$$

Donc  $f(x_n) = f'(\xi)(x_n - \omega) \leq f'(a)(x_n - \omega)$ , et alors

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(a)} \geq \omega.$$

Puisque  $f(x_n) \geq 0$  par définition de  $\omega$ , on en déduit

$$x_{n+1} \leq x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Soit  $x$  la limite de la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante minorée. On a, par continuité de  $f$  :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{f'(a)} = x - \frac{f(x)}{f'(a)},$$

donc  $f(x) = 0$  et  $x = \omega$ . □

**Proposition 3.9.** Soit  $f : [a - r, a + r] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable qui satisfait

$$f'(a) \neq 0, \quad \left| 1 - \frac{f'(x)}{f'(a)} \right| \leq q < 1, \quad \forall x \in [a - r, a + r], \quad \left| \frac{f(x)}{f'(a)} \right| < r(1 - q).$$

Alors  $f$  a un unique zéro  $\omega$  dans  $[a - r, a + r]$ . De plus,  $\omega$  est la limite de la suite (3.1) avec  $x_0$  quelconque et la majoration

$$|x_n - \omega| \leq \frac{q^n}{1 - q} \left| \frac{f(x_0)}{f'(a)} \right|, \quad n \in \mathbb{N}$$

permet d'estimer la vitesse de convergence. Quand  $x_0 = a$ , on a :

$$|x_n - \omega| \leq r q^n.$$

**Théorème 3.10.** THÉORÈME DU POINT FIXE. Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet,  $T : X \rightarrow X$  une application contractante, i.e., il existe  $q \in [0, 1[$  tel que

$$(3.2) \quad d(T(x), T(y)) \leq q d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Alors  $T$  a un unique point fixe  $\omega \in X$ .

De plus, pour tout  $x \in X$ , on a  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)$ , où  $T^n$  est le  $n$ -ième itéré de  $T$ , et la vitesse de convergence est contrôlée par

$$(3.3) \quad d(\omega, T^n(x)) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(T(x), x).$$

*Preuve.* L'unicité découle de (3.2) puisque si  $\omega$  et  $\omega'$  sont des points fixes de  $T$ , on en déduit

$$d(\omega, \omega') = d(T(\omega), T(\omega')) \leq q d(\omega, \omega').$$

Si  $d(\omega, \omega')$  était non nul, on aurait  $1 \leq q$ ; donc  $\omega = \omega'$ .

Pour vérifier l'existence, soit  $x \in X$ . On définit une suite de  $X$  en posant  $x_0 := x$  et  $x_{n+1} := T(x_n)$ . Les inégalités suivantes ont lieu :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^n d(x_1, x_0)$$

et donc

$$(3.4) \quad \begin{aligned} d(x_{n+p+1}, x_n) &\leq d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (q^{n+p} + \cdots + q^n) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $X$ . Soit  $\omega$  sa limite. Quand on fait tendre  $p$  vers l'infini dans (3.4), on obtient (3.3).  $\square$

**Exemple 3.11.** ÉQUATION DE FREDHOLM. Étant données deux fonctions continues  $G : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  on cherche une fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  solution de l'équation intégrale

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 G(x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Si  $\|G\|_\infty < 1$ , le problème a une solution.

**Proposition 3.12.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet,  $T : X \rightarrow X$  une application et  $N \in \mathbb{N}$ . Si  $T^{\circ N}$  est contractante, alors  $T$  a un unique point fixe  $\omega$  et  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{\circ n} x$ , quel que soit  $x \in X$ .

*Preuve.* Puisque  $T^{\circ N}$  est contractante, le théorème 3.10 du point fixe donne l'existence de  $\omega \in X$  tel que  $T^{\circ N} \omega = \omega$ . En appliquant encore  $T$ , on en déduit  $T(T^{\circ N} \omega) = T^{\circ N}(T\omega) = T(\omega)$ . Par suite,  $T(\omega)$  est aussi un point fixe de  $T^{\circ N}$ , donc  $T(\omega) = \omega$  par unicité.

Pour montrer la dernière affirmation, soit  $n$  un entier  $\geq 0$ . Il existe  $l$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que

$$n = lN + k, \quad \text{avec } 0 \leq k \leq N - 1.$$

La majoration (3.3) donne

$$d(\omega, T^{\circ(nl+k)} x) = d(\omega, T^{\circ(nl)}(T^{\circ k}(x))) \leq \frac{q^l}{1-q} d(T^{\circ(N+k)}(x), T^{\circ k}(x)).$$

Comme  $l = [n/N]$  tend vers l'infini si  $n$  tend vers l'infini, on a montré  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{\circ n} x$ .  $\square$

**Exemple 3.13.** ÉQUATION DE VOLTERRA. Étant données deux fonctions continues  $G : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  l'équation intégrale

$$f(x) = g(x) + \int_0^x G(x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

a une unique solution dans  $\mathcal{C}([0, 1])$ .



**Exercice 3.1.** Considérons la suite de fonctions continues  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 0$ , définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ nx - n/2 + 1 & \text{si } 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Esquisser le graphe de ces fonctions. Montrer que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans l'espace  $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ . Montrer que si cette suite possède une limite  $f$  dans  $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ , alors  $f(x) = 0$  si  $0 \leq x < 1/2$  et  $f(x) = 1$  si  $1/2 \leq x \leq 1$ . En déduire que  $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_1)$  n'est pas complet.

N.B. L'implication :  $f_n \rightarrow f$  en norme 1 entraîne  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour  $x \in [0, 1]$  est fausse. Par contre, si  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur un intervalle  $[a, b] \subseteq [0, 1]$ , alors  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour  $x \in [a, b]$ .

**Exercice 3.2.** Soit  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ . Comme on le devine sur son graphe, ce polynôme possède une racine près de  $a = 2$ . Calculer cette racine à l'aide de la méthode de Newton simplifiée à 2 décimales près.

INDICATION : Vérifiez que l'on peut prendre  $r = \frac{1}{4}$  et  $q = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 3.3.** Soit  $f(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ . Trouver les points fixes de  $f$ . Pour chaque point fixe  $\omega$  dire s'il existe un voisinage  $V$  tel que si  $x \in V$ , les itérés  $f^n(x)$  convergent vers  $\omega$  ou non. Représenter graphiquement ces itérés.

INDICATION : Utiliser le théorème des accroissements finis.

Même question pour  $f(x) = 2x(1-x)$ .

**Exercice 3.4.** Trouver les solutions de l'équation intégrale :

$$f(x) = x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

par itérations successives, en partant de la fonction  $f_0 = 0$ .

**Exercice 3.5.** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, admettant une dérivée continue. Supposons que  $f(\omega) = \omega$  et  $|f'(\omega)| < 1$ , pour un  $\omega \in ]a, b[$ . Utiliser le théorème des accroissements finis pour en déduire l'existence de  $r > 0$  tel que  $[\omega - r, \omega + r] \subset ]a, b[$  et tel que le théorème du point fixe s'applique à  $f|_{[\omega-r, \omega+r]}$ . Montrer que si  $|f'(\omega)| > 1$  un tel  $r > 0$  n'existe pas.

**Exercice 3.6.** Soit  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire ayant pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ . Montrer que  $A$  n'est pas contractante mais trouver  $N$  tel que  $A^{\circ N}$  soit contractante.

#### 4. Espace des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ , métrique de Hausdorff

Dans ce paragraphe,  $\mathbb{R}^n$  est muni de la distance euclidienne.

**Notation 4.1.** Soit  $A$  un sous-ensemble non vide d'un espace métrique  $(X, d)$  et  $r \geq 0$ . L'épaississement d'ordre  $r$  de  $A$  est l'ensemble

$$A_r := \{x \in X \mid d(x, A) \leq r\}, \text{ où } d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

C'est un ensemble fermé de  $X$ , car la fonction donnée par  $x \mapsto d(x, A)$  est continue sur  $X$ , cf. Exercice 2.7.

**Lemme 4.2.** Si  $A$  est un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $r \geq 0$ , alors l'épaississement  $A_r$  est compact.

*Preuve.* Il suffit de voir qu'il est borné et c'est évident. □

**Définition 4.3.** Deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  sont  $r$ -proches si  $A \subseteq B_r$  et  $B \subseteq A_r$ . La distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$  est définie par

$$d_H(A, B) := \min\{r \geq 0 \mid A \subseteq B_r \text{ et } B \subseteq A_r\}.$$

Le minimum est bien atteint, si  $A \subseteq B_r$  pour tout  $r > \rho$ , alors pour tout  $x \in A$ , on a  $d(x, B) \leq r$  pour tout  $r > \rho$  et donc  $d(x, B) \leq \rho$ .

**Lemme 4.4.** Pour  $A$  et  $B$  bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\right\}.$$

*Preuve.* Soit  $\sigma$  le maximum ci-dessus et  $\rho$  le minimum de la définition 4.3. Puisque  $d(x, B) \leq \sigma$  pour tout  $x \in A$ , on a  $A \subseteq B_\sigma$ . De même  $B \subseteq A_\sigma$ . Donc  $\rho \leq \sigma$ .

D'autre part, puisque  $A \subseteq B_\rho$ , on a  $d(x, B) \leq \rho$ , pour tout  $x \in A$ . De même  $d(y, A) \leq \rho$ , pour tout  $y \in B$ . Donc, en prenant les bornes supérieures et le maximum,  $\sigma \leq \rho$ . □

**Proposition 4.5.** La fonction  $d_H$  définie ci-dessus est une distance sur l'espace  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  des sous-ensembles compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ .

*Preuve.* Le fait  $d_H(A, B) \geq 0$  est clair. Si  $d_H(A, B) = 0$  alors  $A \subseteq B_0 = \overline{B} = B$  d'après l'exercice 2.7 et  $B$  est fermé.

La symétrie fait partie de la définition.

Pour  $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  et  $x \in A, y \in B$ , on a :

$$d(x, C) \leq d(x, y) + d(y, C) \leq d(x, y) + d_H(B, C).$$

En prenant la borne inférieure sur  $y \in B$  :

$$d(x, C) \leq d(x, B) + d_H(B, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

Par symétrie

$$d(z, A) \leq d_H(C, B) + d_H(B, A) = d_H(A, B) + d_H(B, C).$$



L'inégalité triangulaire en découle. □

**Proposition 4.6.** *Soit  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $F := \bigcap_0^\infty F_k$  est un compact non vide et  $F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$  au sens de la distance de Hausdorff.*

*Preuve.* Puisque, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  le compact  $F_k$  est non vide, il existe  $x_k \in F_k$ . D'où une suite  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^n$ . En fait, c'est une suite de  $F_0$ , car  $F_k \subseteq F_0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Par compacité de  $F_0$ , cette suite admet une sous-suite convergente  $\{x_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ . Soit  $x := \lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l}$ . Alors  $x \in F_{k_l}$  quel que soit  $l \geq 0$  et ainsi  $x \in F$ . On a montré que  $F$  est non vide. Comme  $F$  est fermé car intersection de fermés, il est compact car contenu dans  $F_0$  qui est borné.

Il reste à montrer que  $F$  est la limite de  $F_k$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N > 0$  tel que  $F_N \subseteq F_\varepsilon$ , où  $F_\varepsilon$  est l'épaississement d'ordre  $\varepsilon$  de  $F$ , car si tel n'était pas le cas, il existerait pour tout  $k$  un élément  $x_k \in F_k \setminus F_\varepsilon$ . Donc  $d(x_k, F) > \varepsilon$ . En raisonnant comme ci-dessus, on trouve une sous-suite de  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $x \in F$ . En passant à la limite, on aura  $d(x, F) \geq \varepsilon$  qui est une contradiction.

Comme l'inclusion  $F \subseteq F_N$  entraîne  $F \subseteq (F_N)_\varepsilon$ , par définition de  $d_H$ , l'inégalité suivante est démontrée :

$$d_H(F, F_N) \leq \varepsilon.$$

□

**Théorème 4.7.** *L'espace métrique  $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), d_H)$  est complet.*

*Preuve.* Soit  $\{K_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ . Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on définit, l'ensemble

$$F_j := \overline{\bigcup_{l=j}^\infty K_l}.$$

Puisqu'il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $d_H(K_l, K_N) < 1$  pour  $l > N_1$ , on a, quel que soit  $j$  :

$$F_j \subseteq K_0 \cup \dots \cup K_N \cup (K_N)_1$$

où le dernier ensemble est l'épaississement d'ordre 1 de  $F_N$ . Donc  $F_j$  est borné ; comme il est aussi fermé, il est compact. La Proposition 4.6 s'applique et donne  $F := \lim_{j \rightarrow \infty} F_j$ . Montrons  $F = \lim_{l \rightarrow \infty} K_l$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  donné. Il existe  $N \geq 0$  tel que  $d_H(K_j, K_l) < \varepsilon$  dès que  $j, l \geq N$ . Par le même raisonnement que ci-dessus, l'inclusion  $F_j \subseteq (K_j)_\varepsilon$  a lieu. D'autre part, la définition de  $F_j$  donne l'inclusion  $K_j \subseteq F_j$ . On a montré

$$d_H(K_j, F_j) \leq \varepsilon \text{ si } j \geq N.$$

Puisque  $\lim_{j \rightarrow \infty} F_j = F$ , pour  $j$  suffisamment grand, on aura  $d_H(F, F_j) \leq \varepsilon$ . D'où

$$d_H(F, K_j) \leq d_H(F, F_j) + d_H(F_j, K_j) \leq 2\varepsilon.$$

□



**Exercice 4.1.** Trouver la distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$  :

- (1)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y + 3)^2 = 9\}$  ;  
 (2)  $A = [0, 1]$ ,  $B$  ensemble de Cantor ;  
 (3)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1 + \frac{1}{n})^2 + y^2(1 - \frac{1}{2n})^2 = 1\}$ ,  
 pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 4.2.** Trouver la limite des suites de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  ci-dessous :

- (i)  $X_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{n}{n-1}x^2 + ny^2 = 1\}$ ,  $n \geq 2$  ;  
 (ii)  $X_n = \{(x, x^n) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $n \geq 0$  ;  
 (iii)  $X_n = \{(x, f_n(x)) \mid x \in [0, 1]\}$  où  $f_n(x) = -nx + 1$  si  $0 \leq x \leq 1/n$ ,  $f_n(x) = 0$  sinon.

**Exercice 4.3.** Soit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - (n-1)x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ (1-x)/(n-1) & \text{si } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

- a) Calculer  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  pour  $x \in [0, 1]$ .  
 b) La convergence de  $f_n$  vers  $f$  est-elle uniforme sur  $[0, 1]$  ?  
 c) Soit  $\Gamma_n$  le graphe de  $f_n$ . Vérifier que  $\Gamma_n$  tend vers le sous-ensemble

$$\Gamma := \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid xy = 0\},$$

quand  $n$  tend vers l'infini, dans l'espace  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  des compacts non vides de  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance de Hausdorff.

## 5. Fractals, méthode IFS

Inventé par Benoît Mandelbrot en 1974, le mot *fractal* désigne un objet qui possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes ;
- il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- il est autosimilaire c'est-à-dire qu'il est semblable à une de ses parties ;
- sa dimension de Hausdorff est non entière et dépasse sa dimension topologique.

Voir <http://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale> d'où est tiré ce qui précède.

Nous nous limiterons aux fractals du type suivant :  $X$  est un sous-ensemble compact non vide de  $\mathbb{R}^n$  pour lequel il existe  $N$  similitudes  $w_1, \dots, w_N$  telles que

$$X = w_1(X) \cup \dots \cup w_N(X).$$

Sur cette définition, on voit immédiatement que  $X$  est un point fixe de l'application

$$T : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \quad T(A) = w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A).$$

**Exemples 5.1.**

1) ENSEMBLE DE CANTOR  $C := \bigcap_0^\infty K_j$  où  $K_0 = [0, 1]$ ,  $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ , et  $K_{j+1}$  se déduit de  $K_j$  en enlevant le tiers de chaque intervalle composant  $K_j$ . On a

$$C = w_1(C) \cup w_2(C)$$

où  $w_1$  est l'homothétie de centre 0 et rapport  $1/3$ ,  $w_2$  est l'homothétie de centre 1 et rapport  $1/3$ .

2) COURBE DE VON KOCH  $K$ . Elle est construite en itérant l'opération élémentaire qui transforme un segment du plan en l'union de son premier tiers, de son troisième tiers et des deux côtés du triangle équilatéral construit sur le tiers central. On commence avec le segment  $[0, 1] \times \{0\}$ . Les quatre similitudes de cet exemple sont définies par :

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{3}x, & w_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, & x &\in \mathbb{R}^2 \\ w_3(x) &= \frac{1}{3}R_{\pi/3}x + (1/3, 0), & w_4(x) &= \frac{1}{3}R_{-\pi/3}(x_1 - 1, x_2) + (2/3, 0), & (x_1, x_2) &\in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

où  $R_\alpha$  désigne la rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'origine.

3) TAPIS DE SIERPINSKI  $S$ . On part du carré unité  $K_0 := [0, 1]^2$ ; on le divise en neuf carrés égaux et on enlève le carré central, ce qui donne un compact  $K_1$ . On recommence l'opération avec chacun des 8 carrés de  $K_1$ . Ainsi de suite et on pose  $S := \bigcap_0^\infty K_n$ .

4) COURBE DE LÉVY. On part du segment  $L_0 := [0, 1] \times \{0\}$  et on le remplace par la réunion  $L_1$  des côtés du triangle rectangle isocèle de base  $L_0$  (donc de sommet  $(1/2, 1/2)$ ). Avec chaque côté de  $L_1$ , on fait la même opération. D'où un sous-ensemble  $L_2$  réunion de quatre segments situés sur un rectangle. On construit ainsi une suite de compacts  $L_n$  de  $\mathbb{R}^2$  et on pose  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ .

**Théorème 5.2.** Soient  $w_1, \dots, w_N$  des applications contractantes de  $\mathbb{R}^n$  de rapports  $q_1, \dots, q_N < 1$ . Alors l'application  $T : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  définie par

$$A \mapsto w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

est contractante de rapport  $\max\{q_1, \dots, q_N\}$ . Il existe donc un unique compact  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $X = w_1(X) \cup \dots \cup w_N(X)$ . De plus, pour tout  $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $X = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(A)$  et si  $A \subseteq X$  on a aussi  $X = \overline{\bigcup_0^\infty T^k(A)}$ .

*Preuve.* Cas  $N = 1$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , la relation

$$d(w_1(x), w_1(y)) \leq q_1 d(x, y), \quad \forall y \in B,$$

entraîne, en prenant la borne inférieure sur  $y \in B$ ,

$$d(w_1(x), w_1(B)) \leq q_1 d(x, B).$$

En prenant la borne supérieure pour  $x \in A$ , avec  $A \in \mathbb{R}^n$  on obtient

$$\sup_{x \in A} d(w_1(x), w_1(B)) \leq q_1 \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Il reste à appliquer le Lemme 4.4 pour obtenir

$$d_H(w_1(A), w_1(B)) \leq q_1 d_H(A, B).$$

Cas  $N = 2$ . Pour  $A, B, C, D \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , on commence par montrer

$$(5.1) \quad d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}.$$

Si  $r$  désigne le membre de droite, la définition de  $d_H$  fournit les quatre inclusions

$$A \subseteq C_r, \quad C \subseteq A_r, \quad B \subseteq D_r, \quad D \subseteq B_r.$$

Par suite  $A \cup B \subseteq C_r \cup D_r$  et  $C \cup D \subseteq A_r \cup B_r$ . En utilisant les identités (Exercice)

$$C_r \cup D_r = (C \cup D)_r \text{ et } A_r \cup B_r = (A \cup B)_r,$$

on obtient  $d_H(A \cup B, C \cup D) \leq r$ , ce qui prouve (5.1).

De (5.1) et du cas  $N = 1$ , on déduit

$$\begin{aligned} d_H(w_1(A) \cup w_2(A), w_1(B) \cup w_2(B)) &\leq \max\{d_H(w_1(A), w_1(B)), d_H(w_2(A), w_2(B))\} \\ &\leq \max\{q_1, q_2\} d_H(A, B). \end{aligned}$$

Le cas général se démontre par récurrence.

Il reste à vérifier la dernière affirmation du théorème.

Quel que soit  $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , d'après le Théorème 4.7 on a

$$X = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=j}^{\infty} T^{\circ k}(A)}.$$

Si, en plus  $A \subseteq X$ , alors  $T^{\circ k}(A) \subseteq T^{\circ k}(X) = X$ , et ainsi

$$X = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=j}^{\infty} T^{\circ k}(A)} \subseteq \overline{\bigcup_{k=j}^{\infty} T^{\circ k}(A)} \subseteq \overline{X} = X.$$

Il s'ensuit que l'égalité a lieu partout. □

**Remarque 5.3.** Ce dernier résultat explique le nom de la méthode de construction de fractals : IFS signifie Iterated Function System.



**Exercice 5.1.** Expliciter les similitudes du plan qui permettent de construire le tapis de Sierpinski (Exemple 5.1, 3)).

**Exercice 5.2.** Pour la courbe de Lévy (Exemple 5.1, 4)), trouver des similitudes contractantes  $w_1$  et  $w_2$  de  $\mathbb{R}^2$  telles que

$$w_1(L) \cup w_2(L) = L.$$

## 6. Applications différentiables

La philosophie du calcul différentiel consiste à approcher une application différentiable par une application linéaire. Dans un premier temps, nous étudions donc les applications linéaires.

**Proposition 6.1.** *Soient  $E$  et  $F$  des espaces normés. Pour une application linéaire  $A : E \rightarrow F$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\exists M > 0$  tel que  $\|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in E$  ;
- (ii)  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$  ;
- (iii)  $A$  est continue.

*Preuve.* (i)  $\implies$  (ii) :  $\|Ax\| \leq M$  pour  $\|x\| \leq 1$ .

(ii)  $\implies$  (i) :  $M := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$  entraîne  $\|Ax\| = \|A \frac{x}{\|x\|}\| \|x\| \leq M\|x\|$  pour  $x \neq 0$ , donc pour tout  $x \in E$ .

(i)  $\implies$  (iii) : Si  $x \rightarrow x_0$ , alors  $Ax \rightarrow Ax_0$  puisque  $\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$ , pour tous  $x, x_0 \in E$ .

(iii)  $\implies$  (ii) : La continuité de  $A$  en 0 donne  $\delta > 0$  tel que  $\|Ax\| \leq 1$  si  $\|x\| \leq \delta$ . Donc  $\|A(\delta x)\| \leq 1$  si  $\|x\| \leq 1$ . Par suite,  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq 1/\delta$ .  $\square$

**Définition 6.2.** L'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  est désigné par  $\mathcal{L}(E, F)$ . L'application  $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $A \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$  est une norme sur  $\mathcal{L}(E, F)$ .

NOTATION.  $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ .

On a, cf. (ii)  $\implies$  (i) ci-dessus :

$$(6.1) \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

**Exemple 6.3.** Soit  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire avec  $E$  et  $F$  des espaces normés. Si  $E$  est de dimension finie, alors  $A$  est continue. En effet, soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  ; pour  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ , on a

$$\|Ax\| = \|x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n\| \leq \sum_1^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|A e_j\| = \|x\|_1 \max_{1 \leq j \leq n} \|A e_j\|.$$

Il reste à appliquer le Théorème 1.14 pour obtenir la condition (i).

**Exemple 6.4.** Soit  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application linéaire. Avec les normes sup on a

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{ji}|,$$

où  $(a_{ji})$  est la matrice de  $A$  par rapport aux bases canoniques.

**Définition 6.5.** Soient  $E$  et  $F$  des espaces normés,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $f : \Omega \rightarrow F$  une application. Pour  $a \in \Omega$  et  $v \in E \setminus \{0\}$ , on dit que  $f$  admet une *dérivée directionnelle*

dans la direction  $v \in E \setminus \{0\}$  au point  $a \in \Omega$  si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \text{ existe.}$$

On la désigne par  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ . Par définition, on a :

$$f(a + tv) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial v}(a)t + o(t), \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

La relation suivante a lieu

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(a), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Quand  $E = \mathbb{R}^n$  et  $e_i$  est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique, on désigne par  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  ou  $\partial_i f(a)$  la dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction  $e_i$  au point  $a$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a).$$

C'est la *dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$*  ou la  *$i$ -ème dérivée partielle de  $f$  au point  $a$* . Pour  $f = {}^t(f_1, \dots, f_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  qui admet  $n$  dérivées partielles au point  $a$ , on obtient une matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

appelée *matrice jacobienne de  $f$  en  $a$* .

**Définition 6.6.** Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie dans un ouvert d'un espace métrique a un *extremum local* en un point  $a \in \Omega$  s'il existe une boule  $B(a, r)$  telle que :

$$f(x) \geq f(a), \forall x \in B(a, r) \text{ (minimum local) ou}$$

$$f(x) \leq f(a), \forall x \in B(a, r) \text{ (maximum local).}$$

**Proposition 6.7.** CONDITION NÉCESSAIRE D'EXTREMUM LOCAL. *Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie dans un ouvert  $\Omega$  d'un espace normé  $E$ . Si  $f$  a un extremum local en  $a \in \Omega$  et si  $f$  admet une dérivée directionnelle dans la direction  $v \in E$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ .*

*Preuve.* Cas d'un maximum local. Puisque  $f(a + tv) - f(a) \geq 0$  pour tout  $t$  assez petit, le signe de  $(f(a + tv) - f(a))/t$  est le signe de  $t$ , quand  $t$  est petit. La limite  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  est nécessairement nulle.  $\square$

**Définition 6.8.** Soient  $E$  et  $F$  des espaces normés,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $f : \Omega \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est *différentiable en*  $a \in \Omega$  s'il existe  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(\|h\|), \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

En d'autres termes,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (f(a+h) - f(a) - Ah) = 0$  ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|f(a+h) - f(a) - Ah\| < \varepsilon \|h\| \text{ quand } \|h\| < \delta.$$

Une telle application est nécessairement unique car si  $B \in \mathcal{L}(E, F)$  a les mêmes propriétés, alors  $(A-B)h = o(\|h\|)$  quand  $h \rightarrow 0$  et donc  $\|A-B\| = 0$ .

NOTATION : L'unique application linéaire  $A$  ci-dessus est désignée par  $df_a$  ou  $f'(a)$ . C'est la *différentielle* ou la *dérivée* de  $f$  au point  $a$ .

Par définition, quand  $f$  est différentiable en  $a$ , on a

$$f(a+h) = f(a) + df_a h + o(\|h\|), \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Donc  $f$  admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions au point  $a$  et

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v), \forall v \in E.$$

Lorsque  $f = {}^t(f_1, \dots, f_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est différentiable au point  $a$ , la matrice de la dérivée  $df_a$  par rapport aux bases canoniques est la matrice jacobienne de  $f$  en  $a$ .

**Remarque 6.9.** Quand  $E = \mathbb{R}$ , l'espace  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$  est canoniquement isomorphe à  $F$  par  $A \mapsto A1$ . L'application linéaire  $df_a$  est identifiée à l'élément  $df_a 1$  de  $F$ . Ce vecteur est désigné aussi par

$$f'(a) \text{ ou } \frac{d}{dt} f(t)|_{t=a}.$$

**Remarque 6.10.** L'existence des dérivées directionnelles dans toutes les directions en un point ne garantit pas la différentiabilité en ce point. Exemple :  $f(x, y) = x^2 y / (x^4 + y^2)$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ . Cf. [HW] p. 303. Mais des conditions supplémentaires de continuité assurent un résultat dans cette direction, cf. Corollaire 6.19.

**Lemme 6.11.** Si  $f : \Omega \rightarrow F$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

*Preuve.* De la Définition 6.8 on déduit

$$f(a+h) = f(a) + O(h) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

□

**Proposition 6.12.** Soient  $f : \Omega_E \rightarrow F$  et  $g : \Omega_F \rightarrow G$ ,  $a \in \Omega_E$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$  et si  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

*Preuve.* La différentiabilité de  $f$  en  $a$  donne :

$$f(a+h) = f(a) + df_a h + o(h), \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

La différentiabilité de  $g$  en  $f(a)$  avec l'accroissement  $df_a h + o(h)$  donne :

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(f(a) + df_a h + o(h)) = g(f(a)) + dg_{f(a)}(df_a h + o(h)) + o(df_a h + o(h)) \\ &= g(f(a)) + dg_{f(a)} \circ df_a h + o(h). \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

L'argument précédent peut être détaillé comme suit. Posons  $b := f(a)$ ,  $M := \|df_a\|$ ,  $N := \|dg_b\|$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $\gamma > 0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df_a h + r(h), \text{ où } \|r(h)\| \leq \varepsilon \|h\|, \text{ si } \|h\| < \gamma, \\ g(b+k) &= g(b) + dg_b k + s(k), \text{ où } \|s(k)\| \leq \varepsilon \|k\|, \text{ si } \|k\| < \delta. \end{aligned}$$

On utilise cette dernière majoration avec  $k := df_a h + r(h)$ , ce qui est permis si  $\|h\| < \delta/(M + \varepsilon)$  puisque

$$\|k\| \leq M\|h\| + \varepsilon\|h\| = (M + \varepsilon)\|h\|.$$

D'où

$$g(f(a+h)) = g(b) + dg_b \circ df_a h + dg_b r(h) + s(k), \text{ si } \|h\| < \min(\gamma, \delta/(M + \varepsilon)).$$

L'affirmation est démontrée car

$$\|dg_b r(h) + s(k)\| \leq N \|r(h)\| + \varepsilon(M + \varepsilon) \|h\| = (N + M + \varepsilon) \|h\|.$$

□

**Exemple 6.13.** Si  $\varphi : ]-1, 1[ \rightarrow E$  est définie par  $\varphi(t) = a + th$ , pour  $a \in E$  et si  $f : E \rightarrow F$  est différentiable en  $a$ , alors

$$\frac{d}{dt} f(a + th)|_{t=0} = df_a h.$$

**Définition 6.14.** Soient  $E$  et  $F$  des espaces normés,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $f : \Omega \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est *différentiable* si elle est différentiable en tout point de  $\Omega$ . Elle est *continûment différentiable* si de plus, l'application dérivée  $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est continue.

NOTATION : L'espace des applications continûment différentiables de  $\Omega$  dans  $F$  est désigné par  $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ .

Quand  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ , la continuité de  $df$  équivaut à la continuité des dérivées partielles  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ .

**Proposition 6.15. INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS.** Soient  $E, F$  des espaces normés,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $f : \Omega \rightarrow F$  une application différentiable. On suppose que  $\Omega$  contient le segment  $[a, b] := \{ta + (1-t)b \mid 0 \leq t \leq 1\}$ . Alors

$$(6.2) \quad \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df_x\| \|b - a\|.$$



*Preuve.* Il suffit de montrer le résultat pour  $g : ] - \alpha, 1 + \alpha[ \rightarrow F$  continue, différentiable dans  $] - \alpha, 1[$ , pour  $\alpha > 0$  assez petit, puisque avec  $\varphi : ] - \alpha, 1 + \alpha[ \rightarrow F$  définie par  $\varphi(t) = a + t(b-a)$  et  $g := f \circ \varphi$ , on a  $g(0) = f(a)$ ,  $g(1) = f(b)$  et  $g'(t) = df_{a+t(b-a)}\varphi'(t) = df_{a+t(b-a)}(b-a)$ .

Si  $\sup_{t \in [0,1]} \|g'(t)\| = \infty$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit  $M := \sup_{t \in [0,1]} \|g'(t)\|$  et prenons  $\varepsilon > 0$ . Soit  $T := \{t \in [0,1] \mid \|g(t) - g(0)\| \leq (M + \varepsilon)t\}$ . Si  $\sup T = 1$ , il existe une suite  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $T$  tendant vers 1 et donc

$$\|g(t_n) - g(0)\| \leq (M + \varepsilon)t_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite, grâce à la continuité de  $g$ , on obtient  $\|g(1) - g(0)\| \leq (M + \varepsilon)$  et donc  $\|g(1) - g(0)\| \leq M$  puisque  $\varepsilon$  est arbitraire.

Supposons que  $\tau := \sup T$  est inférieur à 1. Comme plus haut, on vérifie  $\tau \in T$ . Puisque  $g$  est différentiable au point  $\tau$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\tau + \delta \leq 1$  et

$$\|g(\tau + \delta) - g(\tau)\| \leq \|g'(\tau)\|\delta + \varepsilon\delta \leq (M + \varepsilon)\delta.$$

Combiné avec l'inégalité pour  $\tau$ , cela donne

$$\|g(\tau + \delta) - g(0)\| \leq (M + \varepsilon)(\tau + \delta).$$

Cette dernière inégalité contredit la définition de  $\tau$  si bien que le cas  $\tau < 1$  ne se présente pas. □

**Remarque 6.16.** Une égalité du type

$$f(b) - f(a) = df_{\xi}(b-a), \quad \text{pour un } \xi \in [a, b],$$

n'a pas lieu en général si  $\dim F > 1$ .

**Corollaire 6.17.** *Sous les mêmes hypothèses :*

$$(6.3) \quad \|f(b) - f(a) - df_a(b-a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|df_x - df_a\| \|b-a\|.$$

**Proposition 6.18.** *Étant donnés  $E_1, E_2, F$  des espaces normés, des ouverts  $\Omega_1 \subseteq E_1, \Omega_2 \subseteq E_2$  et une application  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow F$ , on fait les hypothèses suivantes :*

*$\forall a_2 \in \Omega_2$ , l'application  $f(\cdot, a_2) : \Omega_1 \rightarrow F$  définie par  $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$  est différentiable, de dérivée  $d_1 f_{(\cdot, a_2)}$ ,*

*$\forall a_1 \in \Omega_1$ , l'application  $f(a_1, \cdot) : \Omega_2 \rightarrow F$  définie par  $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$  est différentiable, de dérivée  $d_2 f_{(a_1, \cdot)}$ ,*

*les applications  $(a_1, a_2) \mapsto d_1 f_{(a_1, a_2)}$  et  $(a_1, a_2) \mapsto d_2 f_{(a_1, a_2)}$  sont continues dans  $\Omega_1 \times \Omega_2$ .*

*Alors  $f$  est continûment différentiable et  $\forall (a_1, a_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, \forall (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$  :*

$$df_{(a_1, a_2)}(h_1, h_2) = d_1 f_{(a_1, a_2)} h_1 + d_2 f_{(a_1, a_2)} h_2.$$

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . La continuité de  $d_1 f$  et  $d_2 f$  donne  $\delta > 0$  tels que

$$\|d_j f_x - d_j f_y\| < \varepsilon, \quad j = 1, 2 \quad \text{si} \quad \|x - y\| < \delta.$$

D'après le Corollaire 6.17 ou une de ses variantes, quitte à diminuer  $\delta$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - d_1 f(a_1, a_2) h_1\| &< \varepsilon \|h_1\|, \text{ si } \|h_1\| < \delta, \\ \|f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - d_2 f(a_1, a_2) h_2\| &< \varepsilon \|h_2\|, \text{ si } \|h_2\| < \delta. \end{aligned}$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient, quand  $\|h_1\|$  et  $\|h_2\| < \delta$

$$\|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - d_1 f(a_1, a_2) h_1 - d_2 f(a_1, a_2) h_2\| < \varepsilon (\|h_1\| + \|h_2\|).$$

Le résultat en découle.  $\square$

**Corollaire 6.19.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application. Alors  $f$  est continûment différentiable si, et seulement si, toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ , pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$ , existent et sont continues dans  $\Omega$ .*

*Preuve.* La nécessité a déjà été vue.

La suffisance est obtenue par récurrence sur  $n$ . En effet, si toutes les dérivées partielles de  $f$  existent et sont continues, alors pour chaque  $a_n \in \mathbb{R}$ , l'application  $f(\cdot, a_n)$  est différentiable, par hypothèse de récurrence. La Proposition 6.18 donne la différentiabilité de  $f$ .  $\square$

**Remarque 6.20.** La théorie de l'intégrale de Riemann pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles se généralise sans difficulté aux fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles. Pour  $f : [a, b] \rightarrow F$  bornée, où  $F$  est un espace normé complet et  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$  un partage de  $[a, b]$ , on considère des sommes de Riemann de  $f$  :

$$\Sigma(f, \mathcal{P}) := \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j).$$

Notation :  $\|\mathcal{P}\| = \max_{0 \leq j \leq N-1} (x_{j+1} - x_j)$ .

Une fonction  $f$  est *intégrable* si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un partage  $\mathcal{P}$  tel que

$$(6.4) \quad \sum_{j=0}^{N-1} \|f(\xi_j) - f(\eta_j)\| (x_{j+1} - x_j) < \varepsilon, \text{ si } \xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}].$$

L'inégalité  $\|f(\xi_j) - f(\eta_j)\| \leq \|f(\xi_j) - f(\eta_j)\|$  montre que la fonction  $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable.

Si  $\mathcal{P}$  satisfait (6.4) et si  $\mathcal{Q}$  est un partage plus fin que  $\mathcal{P}$ , alors

$$\|\Sigma(f, \mathcal{P}) - \Sigma(f, \mathcal{Q})\| \leq \varepsilon.$$

En effet, si  $[x_j, x_{j+1}] = \cup_{k=l}^{p-1} [y_k, y_{k+1}]$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f(x_j)(x_{j+1} - x_j) - \sum_{k=l}^{p-1} f(y_k)(y_{k+1} - y_k)\| &\leq \sum_{k=l}^{p-1} \|f(x_j) - f(y_k)\| (y_{k+1} - y_k) \\ &\leq \sup_{\xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]} \|f(\xi_j) - f(\eta_j)\| (x_{j+1} - x_j). \end{aligned}$$

Par suite, si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  satisfont (6.4), alors

$$\|\Sigma(f, \mathcal{P}) - \Sigma(f, \mathcal{Q})\| \leq 2\varepsilon.$$

On désigne par  $\int_a^b f$  ou  $\int_a^b f(x) dx$  le vecteur de  $F$  limite d'une suite de Cauchy de sommes de Riemann  $\{\Sigma(f, \mathcal{P}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

L'inégalité du triangle  $\|\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j)\| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \|f(x_j)\|(x_{j+1} - x_j)$  donne

$$(6.5) \quad \left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\| \leq \|f\|_\infty (b - a).$$

Les fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $F$  sont intégrables.

Quand  $F = \mathbb{R}^p$  et  $f = {}^t(f_1, \dots, f_p)$ , on a l'équivalence :

$$f \text{ intégrable} \iff f_l \text{ intégrable pour } 1 \leq l \leq p.$$

De plus,

$$\left( \int_a^b f \right)_l = \int_a^b f_l, \quad l = 1, \dots, p.$$

En effet, (6.4) est équivalente à

$$(6.6) \quad \sum_{l=1}^p \sum_{j=0}^{N-1} |f_l(\xi_j) - f_l(\eta_j)|(x_{j+1} - x_j) < \varepsilon, \text{ si } \xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}].$$

et  $\Sigma(f, \mathcal{P}) = {}^t(\Sigma(f_1, \mathcal{P}), \dots, \Sigma(f_p, \mathcal{P}))$ .

**Proposition 6.21.** Soit  $g : [a, b] \rightarrow F$  une application continue avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $F$  complet. Alors l'application  $G : [a, b] \rightarrow F$  (primitive) définie par  $G(t) = \int_a^t g$  est continue, différentiable sur  $]a, b[$  et satisfait  $G' = g$  sur  $]a, b[$ .

**Corollaire 6.22.** THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL. Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une application continûment différentiable, avec  $\Omega$  ouvert d'un espace normé  $E$  et  $F$  normé complet. Si le segment  $[a, a + h]$  est contenu dans  $\Omega$ , alors on a :

$$f(a + h) = f(a) + \int_0^1 f'(a + th) h dt = f(a) + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial h}(a + th) dt.$$

**Définition 6.23.** On suppose que l'espace  $E$  est un espace euclidien de dimension finie, avec produit scalaire désigné par  $\langle | \rangle$ . Dans ce cas, l'espace  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  des formes linéaires (continues) sur  $E$  s'identifie à  $E$  de la manière suivante : la forme linéaire  $l$  correspond à l'unique vecteur  $\xi \in E$  tel que

$$l(v) = \langle \xi | v \rangle, \quad \forall v \in E.$$

Quand  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une application différentiable, on obtient ainsi pour tout  $a \in \Omega$  un vecteur  $\text{grad } f(a)$  appelé *gradient de  $f$  au point  $a$*  tel que

$$(6.7) \quad df_a(v) = \langle \text{grad } f(a) | v \rangle, \quad \forall v \in E.$$

**Exemple 6.24.** Dans  $\mathbb{R}^n$  avec le produit scalaire usuel, la matrice jacobienne de  $f$  au point  $a$  est la matrice ligne

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

tandis que la matrice du vecteur  $\text{grad } f(a)$  est la matrice colonne transposée de la précédente.



**Exercice 6.1.** Vérifier l'affirmation de la Définition 6.2.

**Exercice 6.2.** Soient  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $B \in \mathcal{L}(F, G)$ , avec  $E, F, G$  des espaces normés. Montrer l'inégalité

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|,$$

où  $B \circ A$  désigne la composition.

**Exercice 6.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $f(0) = 0$ . Montrer qu'il existe  $n$  fonctions  $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  telles que

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i g_i(v_1, \dots, v_n).$$

INDICATION : Utiliser la dérivée de  $f$  suivant le vecteur  $v = (v_1, \dots, v_n)$ .

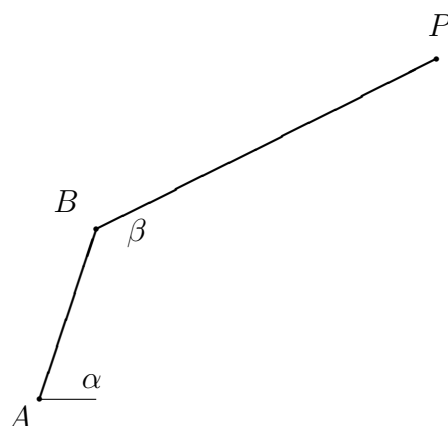
**Exercice 6.4.** Calculer la dérivée de l'application

$$\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G), \quad (A, B) \mapsto B \circ A$$

où  $E, F$  et  $G$  sont des espaces normés. En déduire la dérivée des applications :

$$\mathcal{L}(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(E, E), \quad A \mapsto A \circ A \quad \text{et} \quad A \mapsto A \circ A \circ A.$$

**Exercice 6.5.** La figure ci-dessous représente un système articulé planaire comportant deux bras, de longueur  $a$  et  $b$ . Calculer les coordonnées du point  $P$  en fonction de l'angles  $\alpha$  du premier bras avec une direction fixe et de l'angle  $\beta$  entre les deux bras. Calculer  $\Sigma(f)$ , où  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , est définie par  $f(\alpha, \beta) = P$ . Ici  $\Sigma(f)$  est le lieu des points du plan où la différentielle de  $f$  n'est pas de rang maximal.



**Exercice 6.6.** Esquisser le graphe et trouver la classe de dérivabilité de la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^n & \text{si } x \leq -1, \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^n & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

**Exercice 6.7.** Soit  $E$  l'espace des fonctions continues sur l'intervalle  $[0, 1]$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = 2x(0)^3 - 3x(0)^2$ . Vérifier que  $f$  a un maximum local en 0 et un minimum local en 1 (fonction constantes) quand  $E$  est muni de la norme sup. L'affirmation est fausse quand  $E$  est muni de la norme 1.

**Exercice 6.8.** Pour  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ci-dessous, calculer la différentielle de  $f$  et indiquer les points où elle est de rang plus petit ou égal à 1 :

a)  $f(x, y) = {}^t(x, xy, y^2)$  ; b)  $f(x, y) = {}^t(x \cos y, x \sin y, \sin y^2)$ .

**Exercice 6.9.** Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une application continue et  $a$  un point de  $\Omega$ . On suppose que la différentielle de  $f$  existe en tout  $x$  de  $\Omega$  sauf peut-être  $a$  et que  $\lim df_x$  existe quand  $x$  tend vers  $a$ . Montrer que  $f$  est différentiable. Indication : IAF est vrai pour  $f$  continue, différentiable sur  $]a, b[$ . La réciproque est fausse.

**Exercice 6.10.** Soit  $f$  la fonction sur  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(0, 0) = 0$  et  $f(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$ , quand  $(x, y)$  est différent de 0. Vérifier :

- les dérivées partielles de  $f$  existent et sont bornées, donc  $f$  est continue ;
- toutes les dérivées directionnelles de  $f$  en 0 existent ;
- pour toute  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  différentiable avec  $g(0) = 0$  et  $g'(0)$  non nul, la composée de  $f$  et  $g$  est différentiable ;
- $f$  n'est pas différentiable en 0. Indication : Matrice jacobienne.

## 7. Dérivées d'ordre supérieur

**Définition 7.1.** Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une application, où  $\Omega$  est un ouvert d'un espace normé  $E$  et  $F$  est un espace normé. Pour  $v_1 \in E \setminus \{0\}$ , on suppose que la dérivée directionnelle  $\frac{\partial f}{\partial v_1}$  existe dans  $\Omega$ . Si, pour  $v_2 \in E \setminus \{0\}$ , la dérivée directionnelle  $\frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{\partial f}{\partial v_1} \right)$  existe au point  $a \in \Omega$ , on dit que  $f$  admet une *dérivée directionnelle seconde* selon  $v_2, v_1$  au point  $a$ .

NOTATION :  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_1}(a)$ .

Quand  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  désigne la base canonique, la dérivées directionnelle seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(a)$  est désignée par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \text{ ou } \partial_j \partial_i f(a).$$

**Proposition 7.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert d'un espace normé  $E$ ,  $F$  un espace normé complet et  $f : \Omega \rightarrow F$ . Pour  $v_1, v_2 \in E \setminus \{0\}$ , on suppose que  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_1}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}$  existent et sont continues dans  $\Omega$ . Alors elles sont égales.

*Preuve.* Soit  $a \in \Omega$ ; pour  $t_1$  et  $t_2 \in \mathbb{R}$  assez petits, on définit

$$\Delta_{t_1, t_2}(v_1, v_2) := f(a + t_1 v_1 + t_2 v_2) - f(a + t_1 v_1) - f(a + t_2 v_2) + f(a).$$

D'après le Corollaire 6.22, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Delta_{t_1, t_2}(v_1, v_2) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v_2}(a + t_1 v_1 + s_2 t_2 v_2) t_2 \, ds_2 - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v_2}(a + s_2 t_2 v_2) t_2 \, ds_2 \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}(a + s_1 t_1 v_1 + s_2 t_2 v_2) t_2 \, ds_2 \right) t_1 \, ds_1. \end{aligned}$$

Puisque  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}(a + s_1 t_1 v_1 + s_2 t_2 v_2)$  converge vers  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}(a)$  uniformément pour  $(s_1, s_2)$  dans  $[0, 1]^2$  quand  $(t_1, t_2) \rightarrow 0$ , on a :

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow 0} \frac{\Delta_{t_1, t_2}(v_1, v_2)}{t_1 t_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}(a).$$

De l'égalité  $\Delta_{t_2, t_1}(v_2, v_1) = \Delta_{t_1, t_2}(v_1, v_2)$ , on déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_1}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}(a).$$

□

**Définition 7.3.** Par récurrence, on définit les dérivées directionnelles d'ordre  $k$  d'une application  $f : \Omega \rightarrow F$  selon  $v_k, \dots, v_1 \in E \setminus \{0\}$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si toutes les dérivées directionnelles d'ordre au plus  $k$  de  $f$  existent et sont continues.

NOTATION :  $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$ .

**Proposition 7.4.** Quand  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , l'équivalence suivante a lieu :

$$f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F) \iff \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f \text{ existe et est continue pour } |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k.$$

**Lemme 7.5.** FORMULE DE TAYLOR À UNE VARIABLE. Soit  $\varphi : ]a - r, a + r[ \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur un intervalle à valeurs dans un espace normé complet. Pour  $|h| < r$ , on a :

$$(7.1) \quad \varphi(a + h) = \sum_{l=0}^k \frac{\varphi^{(l)}(a)}{l!} h^l + \frac{h^{k+1}}{k!} \int_0^1 \varphi^{(k+1)}(a + th) (1-t)^k dt.$$

*Preuve.* Par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , c'est le Corollaire 6.22. Supposons la formule vraie pour  $k$  et intégrons par parties. L'intégrale devient

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{k+1} \varphi^{(k+1)}(a + th) (1-t)^{k+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{k+1} \int_0^1 \varphi^{(k+2)}(a + th) h (1-t)^{k+1} dt \\ & = \frac{1}{k+1} \varphi^{(k+1)}(a) + \frac{h}{k+1} \int_0^1 \varphi^{(k+2)}(a + th) (1-t)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Ce qui donne la formule pour  $k + 1$ . □

**Théorème 7.6.** FORMULE DE TAYLOR. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a$  et  $h$  tels que le segment  $[a, a + h]$  est contenu dans  $\Omega$ . Si  $f : \Omega \rightarrow F$  est une application de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  à valeurs dans un espace normé complet  $F$ , alors

$$(7.2) \quad f(a + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) h^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 \partial^\alpha f(a + th) (1-t)^k dt.$$

Dans cette formule,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$  et  $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$ .

*Preuve.* On applique la formule (7.1) à la fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow F$  définie par  $\varphi(t) = f(a + th)$ . Par composition, on sait que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . La dérivée d'ordre  $l$  de  $\varphi$  a l'expression suivante :

$$(7.3) \quad \varphi^{(l)}(t) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_l \leq n} \frac{\partial^l f}{\partial e_{i_1} \dots \partial e_{i_l}}(a + th) h_{i_1} \dots h_{i_l} = \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \frac{\partial^l f}{\partial x^\alpha}(a + th) h^\alpha.$$

La première égalité se montre par récurrence sur  $l$  : puisque  $\frac{d}{dt}f(a+th) = \frac{\partial f}{\partial h}(a+th)$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial^l f}{\partial e_{i_1} \dots \partial e_{i_l}}(a+th)h_{i_1} \dots h_{i_l} &= \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial^l f}{\partial e_{i_1} \dots \partial e_{i_l}}(a+th)h_{i_1} \dots h_{i_l} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{l+1} f}{\partial e_j \partial e_{i_1} \dots \partial e_{i_l}}(a+th)h_j h_{i_1} \dots h_{i_l}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité de (7.3) s'obtient, puisque l'ordre des dérivées n'importe pas, en comptant le nombre de fois qu'apparaît  $h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$  dans  $h_{i_1} \dots h_{i_l}$ , c'est-à-dire le nombre de permutations de  $l$  objets dont  $\alpha_1$  sont égaux à 1,  $\alpha_2$  sont égaux à 2, ...

La formule (7.1) pour  $a = 0$  et  $h = 1$  donne

$$\varphi(1) = \sum_{l=0}^k \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!} + \frac{1}{k!} \int_0^1 \varphi^{(k+1)}(t) (1-t)^k dt.$$

En remplaçant les dérivées de  $\varphi$  par leurs expressions (7.3), on obtient (7.2). □

**Corollaire 7.7.** CONDITION SUFFISANTE D'EXTREMUM. *Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in \Omega$ . Si  $df_a = 0$  et si les valeurs propres de la matrice  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n}$  sont positives, alors  $f$  a un minimum local en  $a$ .*

*Preuve.* On commence par faire un changement linéaire de coordonnées de telle sorte que la matrice hessienne de  $f$  soit diagonale. On désigne par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres.

La formule (7.2) pour  $k = 2$  donne

$$f(a+h) - f(a) = \sum \lambda_j h_j^2 + R(h),$$

où  $\|R(h)\| \leq C\|h\|^3$ , quand  $\|h\| \leq \delta$ . Pour  $\|h\| \leq \min \lambda_j / 2C$ , on a

$$f(a+h) - f(a) \geq \min \lambda_j \|h\|^2 - C\|h\|^3 = (\min \lambda_j - C\|h\|)\|h\|^2 \geq \min \lambda_j \|h\|^2 / 2.$$

□



**Exercice 7.1.** Soient  $f : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : \Omega_p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , deux applications de classe  $\mathcal{C}^2$ , où  $\Omega_n \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $\Omega_p \subseteq \mathbb{R}^p$  sont des ouverts tels que  $f(\Omega_n) \subseteq \Omega_p$ . Pour  $a \in \Omega_n$ , exprimer les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , en fonction des dérivées de  $f$  et  $g$ .

**Exercice 7.2.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y, z) = ax^2e^y + by^2e^z + cz^2e^x, \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$



Vérifier que la différentielle de  $f$  en 0 est nulle et donner une condition sur  $a, b, c$  pour que 0 soit un extremum local de  $f$ .

### 8. Théorème des fonctions implicites

Il s'agit de résoudre un système de  $p > 0$  équations du type

$$f_j(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p) = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

où les inconnues sont  $y_1, \dots, y_p$  et  $x_1, \dots, x_m$  sont des paramètres réels ( $m \geq 0$ ).

**Théorème 8.1.** FONCTIONS IMPLICITES. *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  et  $(a, b)$  un point de  $\Omega$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application continue dont la différentielle partielle  $d_2 f : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  existe et est continue.*

*Si  $f(a, b) = 0$  et si  $d_2 f_{(a,b)}$  est surjective, alors il existe  $r, s > 0$  avec  $\overline{B(a, r)} \times \overline{B(b, s)}$  contenu dans  $\Omega$  et une application  $g : \overline{B(a, r)} \rightarrow \overline{B(b, s)}$  continue tels que*

$$(8.1) \quad \forall (x, y) \in \overline{B(a, r)} \times \overline{B(b, s)}, \text{ on a l'équivalence } f(x, y) = 0 \iff y = g(x).$$

*De plus, si  $f$  est continûment différentiable dans  $\Omega$ , alors  $g$  est continûment différentiable dans  $B(a, r)$  et la formule suivante a lieu :*

$$(8.2) \quad dg_a = -\left(d_2 f_{(a,b)}\right)^{-1} \circ d_1 f_{(a,b)}.$$

*Preuve.* On va appliquer le théorème du point fixe ou la méthode de Newton. Définissons une application  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  par

$$\psi(x, y) := y - \left(d_2 f_{(a,b)}\right)^{-1} f(x, y).$$

Par construction, l'équivalence suivante a lieu, pour  $(x, y) \in \Omega$  :

$$f(x, y) = 0 \iff \psi(x, y) = y.$$

Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$d_2 \psi_{(x,y)} = \mathbf{1}_p - L^{-1} \circ d_2 f_{(x,y)} \text{ où } L := d_2 f_{(a,b)}.$$

Prenons  $q \in ]0, 1[$ . Puisque  $d_2 \psi_{(a,b)} = 0$ , par continuité, il existe  $r_1 > 0$  et  $s > 0$  tels que

$$\|d_2 \psi_{(x,y)}\| \leq q, \text{ pour } (x, y) \in \overline{B(a, r_1)} \times \overline{B(b, s)}.$$

L'inégalité des accroissements finis (Proposition 6.15) donne

$$(8.3) \quad \|\psi(x, y) - \psi(x, y')\| \leq q \|y - y'\|, \text{ pour } (x, y) \text{ et } (x, y') \in \overline{B(a, r_1)} \times \overline{B(b, s)}.$$

La continuité de  $\psi$  donne l'existence de  $r \in ]0, r_1]$  tel que

$$\|\psi(x, b) - \psi(a, b)\| \leq s(1 - q), \text{ pour } x \in \overline{B(a, r)}.$$

En rassemblant ce deux dernières inégalités, on obtient, pour  $(x, y) \in \overline{B(a, r)} \times \overline{B(b, s)}$  :

$$\|\psi(x, y) - \psi(a, b)\| \leq q \|y - b\| + s(1 - q) \leq s.$$

Puisque  $\psi(a, b) = b$ , ceci montre que pour  $x$  fixé dans  $\overline{B(a, r)}$ , l'application  $y \mapsto \psi(x, y)$  envoie la boule  $\overline{B(b, s)}$  dans elle-même. Comme cette application est contractante, elle a un unique point fixe  $g(x)$ . L'équivalence (8.1) est démontrée.

Pour prouver la continuité de  $g$ , il suffit de réinterpréter la preuve ci-dessus. On considère l'espace  $X := \mathcal{C}(\overline{B(a, r)}, \overline{B(b, s)})$  des applications continues de  $\overline{B(a, r)}$  dans  $\overline{B(b, s)}$  muni de la norme sup. Cet espace est complet par la Proposition 3.5. On définit  $\Psi : X \rightarrow X$  par  $\Psi(h)(x) := \psi(x, h(x))$  pour  $h \in X$ . Pour  $h$  et  $h' \in X$ , on a, d'après (8.3) :

$$\begin{aligned} \|\Psi(h) - \Psi(h')\| &= \sup_{x \in \overline{B(a, r)}} \|\psi(x, h(x)) - \psi(x, h'(x))\| \\ &\leq \sup_{x \in \overline{B(a, r)}} q \|h(x) - h'(x)\| = q \|h - h'\|. \end{aligned}$$

Donc  $\Psi$  est contractante. L'unique point fixe de  $\Psi$  est l'application  $g$  trouvée précédemment ; elle est donc continue.

Supposons avoir déjà montré que  $g$  est différentiable. En différentiant  $f(x, g(x)) = 0$ , il vient :

$$d_1 f_{(x, g(x))} + d_2 f_{(x, g(x))} \circ dg_x = 0,$$

et, par suite l'expression (8.2).

La différentiabilité de  $g$  se montre ainsi : Par construction, on a

$$g(a) = b \text{ et } f(a + h, g(a + h)) = 0 \text{ pour } h \text{ petit.}$$

Donc, en utilisant la différentiabilité de  $f$  au point  $(a, b)$  :

$$0 = f(a + h, g(a + h)) = f(a + h, b + g(a + h) - g(a)) = d_1 f_{(a, b)} h + Lk + o(\|h\| + \|k\|),$$

où on a posé  $k := g(a + h) - g(a)$ . On sait, puisque  $g$  est continue, que  $\|k\|$  tend vers 0 si  $\|h\|$  tend vers 0. En fait, on a mieux : la relation

$$(8.4) \quad k = -L^{-1} d_1 f_{(a, b)} h + o(\|h\| + \|k\|),$$

entraîne  $k = o(\|h\|)$ . En revenant à (8.4), on en déduit

$$k = -L^{-1} d_1 f_{(a, b)} h + o(\|h\|),$$

c'est-à-dire la différentiabilité de  $g$  au point  $a$ . □

**Remarque 8.2.** En langage plus géométrique, ce théorème affirme que l'ensemble des zéros de  $f$ , soit  $\{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}$ , est localement le graphe d'une application d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

### Exemples 8.3.

- 1)  $m = 1, p = 1$ . L'équation  $f(x, y) = 0$  est l'équation cartésienne d'une courbe plane.
- 2)  $p = 1$  et donc  $m = n - 1$ . L'équation  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  est l'équation d'une hypersurface dans  $\mathbb{R}^n$ .
- 3)  $p = n - 1$  et donc  $m = 1$ . Les équations  $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0, j = 1, \dots, n - 1$  sont les équations d'une courbe dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 8.4.** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application différentiable, où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Un point  $a \in \Omega$  est un *point critique de  $f$*  si  $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  n'est pas surjective, i.e., de rang inférieur à  $p$ . On dit qu'un point  $a \in \Omega$  est un *point régulier de l'ensemble*  $Z(f) := \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$  des zéros de  $f$  si  $df_a$  est surjective.

**Exemples 8.5.**

- 1) Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a un extremum local en  $a$ , alors  $a$  est un point critique de  $f$ .
- 2)  $n = 3, p = 2, \Omega = \mathbb{R}^3, f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1$ . Ici,  $Z(f)$  est l'intersection d'un cône et d'un cylindre et tous ses points sont réguliers.
- 3)  $n = 2, p = 1, \Omega = \mathbb{R}^2, f(x, y) = xy$ . L'ensemble des zéros de  $f$  est la réunion des axes de coordonnées. Tous les points sont réguliers sauf l'origine.
- 4)  $n = 3, p = 1, \Omega = \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . L'ensemble des zéros de  $f$  est un cône, tous ses points sont réguliers sauf l'origine.

**Définition 8.6.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application continûment différentiable et  $a \in \Omega$  un point régulier de  $Z(f)$ . L'espace tangent à  $Z(f)$  en  $a$  est le sous-espace vectoriel  $\text{Ker } df_a$  de  $\mathbb{R}^n$ . Sa dimension est  $n - p$ .

NOTATION :  $TZ(f)_a$ .

L'espace qu'on dessine pour représenter la situation est l'espace affine  $a + TZ(f)_a$ .

**Lemme 8.7.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application continûment différentiable et  $a \in \Omega$  un point régulier de  $Z(f)$ . Quitte à renuméroter les coordonnées, on peut supposer qu'au voisinage de  $a$ , l'équivalence suivante a lieu :

$$f(x) = 0 \iff x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \text{ et } x'' = g(x'),$$

où  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de  $a'$ .

Avec  $h(x') := (x', g(x'))$ , on a  $TZ(f)_a = \text{Im } dh_{a'}$ .

**Proposition 8.8.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application continûment différentiable et  $a \in \Omega$  un point régulier de  $Z(f)$ . Alors l'espace tangent  $TZ(f)_a$  est constitué des directions limites des droites sécantes passant par  $a$ , i.e.

$$TZ(f)_a = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists x^\nu \in Z(f), \exists t^\nu \in \mathbb{R} \text{ tels que } \lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = a \text{ et } \lim_{\nu \rightarrow \infty} t^\nu(x^\nu - a) = v\}.$$

On en déduit que l'espace tangent à  $Z(f)$  ne dépend que du lieu des zéros de  $f$  et pas de  $f$  elle-même.

*Preuve.* Sans perte de généralité, on peut supposer qu'au voisinage de  $a = (a', a'')$ , l'ensemble  $Z(f)$  est l'image de  $h : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie dans un voisinage  $U'$  de  $a'$  (cf. Lemme 8.7).

Soit  $v \in TZ(f)_a$ . Alors  $v = dh_{a'}v'$ , où  $v = (v', v'')$ . Avec  $x^\nu := (a' + v'/\nu, g(a' + v'/\nu))$ , on a  $f(x^\nu) = 0, x^\nu \rightarrow a$  et

$$x^\nu - a = (v'/\nu, g(a' + v'/\nu) - g(a')) = (v'/\nu, dg_{a'}v'/\nu + o(1/\nu)) \text{ quand } \nu \rightarrow \infty.$$

Donc  $\nu(x^\nu - a) = (v', dg_{a'}v') + o(1)$ , ce qui montre  $\nu(x^\nu - a) \rightarrow v$ .

Réciproquement, si  $v$  est une telle limite, alors

$$0 = f(x^\nu) = f(a) + df_a(x^\nu - a) + o(\|x^\nu - a\|), \nu \rightarrow \infty.$$

Comme  $f(a) = 0$ , on en déduit  $df_a t^\nu(x^\nu - a) = o(\|t^\nu\| \|x^\nu - a\|)$  donc  $df_a v = o(1)$ , c'est-à-dire  $df_a v = 0$ .  $\square$

**Théorème 8.9.** MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE. *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application continûment différentiable et  $a \in \Omega$  un point régulier de  $Z(f)$ . Soit encore  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Si  $\varphi|_{Z(f)}$  a un extremum local au point  $a$ , alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tels que*

$$d\varphi_a = \sum_1^p \lambda_j (df_j)_a \text{ ou } d(\varphi - \sum_1^p \lambda_j f_j)_a = 0.$$

Pratiquement, les  $n + p$  inconnues  $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  satisfont le système de  $n + p$  équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) &= \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), & i &= 1, \dots, n, \\ f_j(a) &= 0, & j &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

**Remarque 8.10.** Dans les exemples, il est souvent plus facile de résoudre un tel système que de paramétrer  $Z(f)$  par  $h$  et chercher un extremum sans contrainte de  $\varphi \circ h$ .

**Remarque 8.11.** On peut aussi dire que le point  $(a, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}^p$  est un point critique de la fonction  $(x, y) \mapsto \varphi(x) - \sum_1^p y_j f_j(x)$ .

*Première preuve.* Sans perte de généralité, on peut supposer qu'au voisinage de  $a = (a', a'')$ , l'ensemble  $Z(f)$  est l'image de  $h : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie dans un voisinage  $U'$  de  $a'$  (cf. Lemme 8.7). Puisque  $\varphi$  a un extremum local en  $a$ , la fonction  $\varphi \circ h$  a un extremum local en  $a'$ . D'après la Proposition 6.7, on en déduit :

$$d\varphi_a \circ dh_{a'} = 0.$$

Puisque  $dh_{a'}(\mathbb{R}^p) = TZ(f)_a$ , on sait que  $d\varphi_a$  est nulle sur  $TZ(f)_a$ . Comme ce dernier sous-espace est égal à  $\text{Ker } df_a$ , on a démontré

$$(8.5) \quad \text{Ker } d\varphi_a \supseteq \text{Ker } df_a.$$

On peut alors définir  $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  telle que  $d\varphi_a = \Lambda \circ df_a$ . En effet, pour tout  $v \in \mathbb{R}^p$  il existe  $u \in \mathbb{R}^n$  tel que  $v = df_a u$ , puisque  $df_a$  est surjective, et on pose  $\Lambda v = d\varphi_a u$ . La définition ne dépend pas du choix de  $u$  d'après (8.5). Les multiplicateurs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  sont les composantes de la forme linéaire  $\Lambda$ .  $\square$

*Deuxième preuve.* On considère l'application  $(\varphi, f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ . Si  $U$  est un voisinage de  $a$  dans lequel  $\varphi(x) \leq \varphi(a)$  (maximum local), alors l'image de  $U$  par  $(\varphi, f)$  ne

rencontre pas  $] \varphi(a), \infty[ \times \{0\}$ . Par suite,  $d(\varphi, f)_a$  n'est pas surjective. En effet, d'après le théorème 8.1 des fonctions implicites, la surjectivité entraînerait que l'équation

$$(\varphi(x), f(x)) = y$$

a une solution pour tout  $y$  voisin de  $(\varphi(a), 0)$ . Donc le rang de  $d(\varphi, f)_a$  est  $p$ , si bien que  $d\varphi_a$  est combinaison linéaire de  $(df_1)_a, \dots, (df_p)_a$ .  $\square$

**Exemple 8.12.** INÉGALITÉ DE HÖLDER. Pour  $p, q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q = 1$ , on a

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x, y \geq 0.$$

Cette inégalité est obtenue en minimisant  $\varphi(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$  sur  $\{xy = C\}$ .



**Exercice 8.1.** En quels points des courbes suivantes il n'est pas possible d'exprimer  $y$  en fonction de  $x$  ou  $x$  en fonction de  $y$  :

$$y^2 + (x^2 - 1)x^2 = 0; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ (x - 1/2)^2 + y^2 - 1/4 = 0; \end{cases} \quad y^2 - x^2(x - 1) = 0.$$

Esquisser ces courbes.

**Exercice 8.2.** On donne un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et deux fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $(x, g(x)) \in \Omega$ , pour tout  $x \in I$ . On fait en outre les hypothèses suivantes :

$$f(x, g(x)) = 0, \forall x \in I \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0, \forall x \in I.$$

Calculer  $g''$ .

Lorsque  $g''(x_0) = 0$ , on dit que  $x_0$  est un *point d'inflexion* de la courbe d'équation  $f(x, y) = 0$ .

Chercher les points d'inflexion des courbes de  $\mathbb{R}^2$  d'équation :

$$y^2 - x^2(x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 - 1 = 0.$$

**Exercice 8.3.** Trouver pour quelles valeurs de  $a$  et  $r$  les zéros de l'application suivante sont tous réguliers :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + (y - a)^2 + z^2 - r^2).$$

RAPPEL : Un point  $(x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(0, 0)$  est *régulier* si  $df_{(x_0, y_0, z_0)}$  est surjective.

**Exercice 8.4.** Esquisser la courbe de  $\mathbb{R}^2$  d'équation

$$x^3 + y^3 - xy = 0 \quad (\text{folium de Descartes})$$

en étudiant ses intersections avec les droites d'équation  $x + y = c$  et en faisant varier  $c$ .

**Exercice 8.5.** Montrer que la courbe de l'espace d'équations

$$x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y + 1/2z - 1 = 0$$

est compacte. Trouver les distances minimales et maximales de ses points à l'origine.

**Exercice 8.6.** Esquisser la courbe  $C$  d'équation

$$y^2 - x(x - 1)(x - 2) = 0.$$

Est-ce que  $C$  est compacte ?

Trouver distance du point  $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$  à la courbe  $C$ .

**Exercice 8.7.** Trouver les valeurs maximales et minimales de la fonction  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$  sur l'ellipsoïde d'équation

$$(x/4)^2 + (y/5)^2 + (z/25)^2 - 1 = 0.$$

Interpréter géométriquement.

**Exercice 8.8.** Calculer la distance minimale des points de la surface d'équation

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$$

à l'origine. Que peut-on dire de la distance maximale à l'origine ?

**Exercice 8.9.** On donne  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Chercher les extrema locaux de  $f$ .

b) Calculer  $\max\{f(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

## 9. Théorème d'inversion locale, sous-variétés

Le théorème des fonctions implicites a la conséquence immédiate suivante.

**Théorème 9.1.** INVERSION LOCALE Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $a \in \Omega$ . Si  $df_a$  est bijective (invertible), alors il existe un ouvert  $U$  de  $\Omega$  contenant  $a$  tel que  $f|_U$  est injective,  $f(U) =: V$  est ouvert et  $(f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus,

$$(d(f|_U)^{-1})_{f(a)} = (df_a)^{-1}.$$

*Preuve.* Soit  $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application définie par  $F(x, y) := f(x) - y$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  et on a  $F(a, f(a)) = 0$ . De plus, puisque  $d_1 F_{(a, f(a))} = df_a$ , cette différentielle partielle est surjective. Le théorème des fonctions implicites s'applique, après avoir remplacé  $x$  par  $y$  et 1 par 2, et donne une application  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  définie au voisinage de  $f(a)$  telle que

$$f(x) = y \iff x = g(y).$$

L'expression de la dérivée de  $g$  découle de  $f \circ g = \mathbf{1}$ .

□

**Remarque 9.2.** La condition sur la dérivée est équivalente à

$$\det df_a \neq 0.$$

**Définition 9.3.** Une application bijective  $f : U \rightarrow V$  où  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  est un *difféomorphisme* si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et d'inverse  $\mathcal{C}^1$ . D'après le théorème 9.1, il suffit que la dérivée de  $f$  soit inversible en chaque point de  $U$ .

**Exemple 9.4.** COORDONNÉES POLAIRES. L'application de  $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$  donnée par  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  est un difféomorphisme.

**Définition 9.5.** Soit  $m$  un entier compris entre 0 et  $n$ . Un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  est une *sous-variété différentiable de dimension  $m$*  si  $\forall a \in X$ , il existe  $r > 0$  et une application  $f : B(a, r) \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que

$$X \cap B(a, r) = Z(f) \text{ et } df_x \text{ est surjective } \forall x \in U.$$

L'entier  $p := n - m$  est appelé la *codimension* de  $X$ .

### Exemples 9.6.

- 1) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  et si tous les points de  $Z(f)$  sont réguliers, alors  $Z(f)$  est une sous-variété de dimension  $n - p$  de  $\mathbb{R}^n$ . C'est le cas où la sous-variété a des équations globales.
- 2) L'ensemble des matrices  $3 \times 3$  à coefficients réels de rang 1 est une sous-variété de dimension 5 de  $\mathbb{R}^9$ . Elle n'est pas de la forme  $Z(f)$  avec  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^4$  de classe  $\mathcal{C}^1$  avec dérivée surjective en chaque point.
- 3) Un cercle dans  $\mathbb{R}^2$  est une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ .
- 4) Le tore d'équation  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0\}$  est une sous-variété de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$ .
- 4) L'équation  $y^2 = x^3$  ne décrit pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  car le sous-ensemble ainsi défini n'est pas localement un graphe près de  $(0, 0)$ .
- 5) Tout ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension 0 et tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $n$ .

**Théorème 9.7.** Les conditions suivantes sont équivalentes pour  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $0 \leq m \leq n$ ,  $p = n - m$  :

- 1)  $X$  est localement le graphe d'une application  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^p$  ;
- 2)  $X$  est localement l'image homéomorphe d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  par une application  $\mathcal{C}^1$  injective à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et dont la différentielle en chaque point est injective ;
- 3)  $X$  est localement l'ensemble des zéros d'une application  $\mathcal{C}^1$  à différentielle surjective d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  ;
- 4) il existe localement sur  $X$  un difféomorphisme d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  qui envoie  $X$  sur un ouvert d'un sous-espace vectoriel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ .

*Preuve.* 1)  $\implies$  2) : La condition 1) signifie que pour  $a = (a', a'') \in X$  il existe  $r', r'' > 0$  et  $g : B(a', r') \rightarrow \mathbb{R}^p$  tels que

$$X \cap B(a', r') \times B(a'', r'') = \{(x', g(x')) \mid x' \in B(a', r')\}.$$

Soit  $h : B(a', r') \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $h(x') := (x', g(x'))$ . Alors  $h$  est injective de classe  $\mathcal{C}^1$ . Puisque l'inverse de  $h$  est la projection  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  restreinte à  $X \cap B(a', r') \times B(a'', r'')$ , elle est continue.

2)  $\implies$  3) : Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  injective, de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $d\varphi_0$  injective et  $0 \in U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Quitte à renuméroter les coordonnées dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut supposer

$$\det \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0.$$

Soit  $\varphi' := (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . On introduit encore  $a = (a', a'') := \varphi(0)$ . D'après le théorème 9.1 d'inversion locale, il existe  $s > 0$  et  $\psi : B(a', s) \rightarrow U$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que  $U_0 := \psi(B(a', s))$  est un voisinage ouvert de 0 et

$$(9.1) \quad \psi(\varphi'(t)) = t \text{ si } t \in U_0.$$

Pour  $m + 1 \leq i \leq n$  et  $x \in B(a', s) \times \mathbb{R}^{n-m}$ , on définit

$$f_i(x) := \varphi_i(\psi(x_1, \dots, x_m)) - x_i;$$

en d'autres termes,  $f(x) = \varphi'' \circ \psi(x') - x''$ . Alors  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $B(a', s) \times \mathbb{R}^{n-m}$  dans  $\mathbb{R}^{n-m}$  et

$$d_2 f_a = -\mathbf{1}_{n-m}.$$

Pour  $t \in U_0$ , on a d'après (9.1)

$$f(\varphi(t)) = \varphi''(\psi(\varphi'(t))) - \varphi''(t) = \varphi''(t) - \varphi''(t) = 0.$$

Par construction de  $f$  :

$$(9.2) \quad \varphi(U_0) = Z(f).$$

On doit encore vérifier que  $\varphi(U)$  est égal à  $Z(f)$  dans un voisinage de  $a$ . Ceci nécessite l'hypothèse  $\varphi$  injective d'inverse continue. On cherche un voisinage  $V$  de  $a$  tel que

$$(9.3) \quad V \cap \varphi(U) = V \cap Z(f).$$

Le point  $a$  n'est pas adhérent à  $\varphi(U \setminus U_0)$ . En effet, si on trouvait une suite  $\{t^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  de  $U \setminus U_0$  telle que  $\varphi(t^\nu) \rightarrow a$ , en prenant  $\varphi^{-1}$ , on en déduirait  $t^\nu \rightarrow \varphi^{-1}(a) = 0$ . Il existe donc un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $V \cap \varphi(U \setminus U_0) = \emptyset$  et donc

$$V \cap \varphi(U) = V \cap \varphi(U_0).$$

De (9.2) on déduit (9.3).

3)  $\implies$  1) : C'est le théorème des fonctions implicites.

3)  $\implies$  4) : Avec les notations du lemme 8.7, on complète  $f_1, \dots, f_p$  par  $f_i(x) := x_i$ , pour  $p + 1 \leq i \leq n$ . L'application complétée a un jacobien non nul en  $a$  et on applique le théorème d'inversion locale 9.1.

4)  $\implies$  3) : Après changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que le difféomorphisme  $(f_1, \dots, f_n)$  envoie localement  $X$  sur  $\{(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)\}$ . Donc  $X$  est localement égal à  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{m+1}(x) = \dots = f_n(x) = 0\}$ . Puisque les formes linéaires



$df_1, \dots, df_n$  sont linéairement indépendantes en  $a$ ,  $df_{m+1}, \dots, df_n$  sont linéairement indépendantes en  $a$ .  $\square$

**Définition 9.8.** Soit  $X$  une sous-variété de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ . Une *paramétrisation locale de  $X$*  est une application  $\varphi : U \rightarrow V$  injective, de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $d\varphi_t$  injective,  $\forall t \in U$ , où  $U$  ouvert  $\subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $V$  ouvert  $\subseteq \mathbb{R}^n$ , telle que  $\varphi(U) = X \cap V$ .

**Exemple 9.9.** L'application  $\varphi : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}$  définie par  $\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$  est une paramétrisation locale du cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ .

L'application  $\psi : ]-1, 1[ \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  donnée par  $\psi(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$  en est une autre.



**Exercice 9.1.** Pour  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  continûment différentiable avec  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , montrer le rang de  $df$  ne peut pas brusquement diminuer, *i.e.*,  $\text{rg } df_x \geq \text{rg } df_a$  pour  $x$  voisin de  $a$ . Ainsi, la fonction  $x \mapsto \text{rg } df_x$  est semi-continue inférieurement.

**Exercice 9.2.** Vérifier que l'application  $] - \pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$  est injective de classe  $\mathcal{C}^1$  et à différentielle injective. Néanmoins, son image n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 9.3.** Les équations suivantes

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ et } x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 1$$

définissent-elles une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  ?

## 10. Calcul des variations

Il s'agit de minimiser ou maximiser une fonctionnelle  $F$  du type suivant :

$$(10.1) \quad F(\varphi) := \int_a^b f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx, \quad \varphi \in \mathcal{C}^1([a, b]), \quad \varphi(a) = A, \quad \varphi(b) = B,$$

On suppose  $f \in \mathcal{C}^0([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  et  $f$  continûment différentiable par rapport aux deux dernières variables, donc  $d_2f$  et  $d_3f$  existent et sont continues sur  $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Les nombres réels  $A$  et  $B$  sont donnés.

### Exemples 10.1.

1) Minimiser la longueur des courbes  $\mathcal{C}^1$  du plan joignant deux points de coordonnées  $(a, A)$  et  $(b, B)$ . Il faut donc minimiser

$$\int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \text{ avec } \varphi(a) = A, \quad \varphi(b) = B.$$

2) Trouver les surfaces de révolution de l'espace d'aire minimale. Ce problème revient à minimiser

$$2\pi \int_a^b |\varphi(x)| \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \text{ avec } \varphi(a) \text{ et } \varphi(b) \text{ donnés.}$$

**Proposition 10.2.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  telle que  $d_2f$  et  $d_3f$  existent et sont continues. Alors la fonctionnelle  $F : \mathcal{C}^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par (10.1) admet une dérivée directionnelle dans toute direction  $\theta \in \mathcal{C}^1([a, b])$  et en tout point  $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$  ; elle a l'expression suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi) = \int_a^b (d_2f_{(x, \varphi(x), \varphi'(x))}\theta(x) + d_3f_{(x, \varphi(x), \varphi'(x))}\theta'(x)) dx.$$

**Remarque 10.3.** En notation traditionnelle, on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y'}(x, \varphi(x), \varphi'(x))$$

pour les dérivées par rapport aux deux dernières variables.

**Lemme 10.4.** LEMME DE DU BOIS-REYMOND. Soit  $h$  une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que

$$\int_a^b h\theta' = 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{C}^1([a, b]) \text{ avec } \theta(a) = \theta(b) = 0.$$

Alors  $h$  est constante.

*Preuve.* Soit  $H(x) = \int_a^x h(t) dt$ . Alors  $H \in \mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $H(a) = 0$  et  $H' = h$ . En remplaçant  $h$  par  $h - \frac{1}{b-a} \int_a^b h$ , ce qui ne change pas la conclusion, on peut supposer  $H(b) = 0$ . Dans ce cas,

$$\int_a^b h^2 = \int_a^b hH' = 0.$$

Ceci entraîne  $h = 0$  par le Lemme 1.4. □

**Proposition 10.5.** EQUATION D'EULER-LAGRANGE. Si  $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  et si la fonctionnelle  $F$  définie par (10.1) a un extremum local en  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$  alors

$$(10.2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x)) = 0.$$

Quand  $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$  et que la dérivée  $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x))$  ne s'annule pas, alors  $\varphi_0$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et satisfait l'équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre

$$(10.3) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}(x, y, y') - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}(x, y, y')y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, y, y') y'' = 0.$$

*Preuve.* La condition nécessaire d'extremum et la Proposition 10.2 donnent

$$\int_a^b (d_2f_{(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x))}\theta(x) + d_3f_{(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x))}\theta'(x)) dx = 0$$

pour toute  $\theta \in \mathcal{C}^1([a, b])$  avec  $\theta(a) = \theta(b) = 0$  puisque dans ce cas,  $\varphi_0 + t\theta$  satisfait les conditions aux limites. Soit  $A$  une primitive de la fonction  $x \mapsto d_2 f_{(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))}$ . Alors, après intégration par parties :

$$\int_a^b (-A(x) + d_3 f_{(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))}) \theta'(x) dx = 0.$$

Le lemme de du Bois-Reymond 10.4 entraîne que la fonction entre parenthèses est constante. Donc  $x \mapsto d_3 f_{(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))}$  est continûment différentiable. La première conclusion s'obtient en dérivant.

Supposons  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Alors, pour  $x \in [a, b]$ ,  $\varphi'_0$  satisfait

$$-A(x) + d_3 f_{(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))} = \text{cste.}$$

Le théorème des fonctions implicites, grâce à la non-nullité de  $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ , permet d'affirmer que  $x \mapsto \varphi'_0(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ; donc  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^2$ . La relation (10.3) s'obtient en explicitant la dérivée figurant dans (10.2).  $\square$

**Corollaire 10.6.** Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , i.e.,  $f$  est indépendante de  $x$ . On suppose que la fonctionnelle  $F$  définie par (10.1) a un extremum local en  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^2([a, b])$ . Alors  $\varphi_0$  satisfait l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$(10.4) \quad f(y, y') - \frac{\partial f}{\partial y'}(y, y') \varphi'_0(x) = \text{cste.}$$

*Preuve.* La relation (10.4) est satisfaite si, et seulement si,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \varphi'_0(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(\varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \varphi''_0(x) \\ & - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}(\varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \varphi'_0(x) - \frac{\partial f}{\partial y'}(\varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \varphi''_0(x) = 0, \end{aligned}$$

donc (10.2) entraîne (10.4).  $\square$

**Remarque 10.7.** Toutes ces conditions nécessaires d'extremum sont loin d'être suffisantes. Il y a des exemples où le minimum de  $F$  n'est pas atteint parmi les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Dans les exemples 10.1 les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange sont :

$$1) \varphi(x) = Cx + D, \quad 2) \varphi_0(x) = C \operatorname{ch}\left(\frac{x}{C} + D\right) \text{ avec } C \text{ et } D \in \mathbb{R}.$$



**Exercice 10.1.** Trouver les extrémales des problèmes suivants :

(a)

$$\int_0^1 (\varphi'(x)^2 + 12x\varphi(x)) dx, \text{ avec } \varphi(0) = 2, \varphi(1) = 3;$$

(b)

$$\int_1^2 \varphi'(x)(1 + x^2\varphi'(x)) \, dx, \text{ avec } \varphi(1) = 3, \varphi(2) = 2.$$

**Exercice 10.2.** Trouver  $\varphi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) > 0$  pour  $x \in [a, b]$ ,  $\varphi_0(a) = A$ ,  $\varphi_0(b) = B$ , qui minimise la fonctionnelle :

$$\varphi \mapsto \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}}{\varphi(x)} \, dx.$$

Cette intégrale représente la longueur de la courbe  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  dans le demi-plan  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  muni de la métrique hyperbolique.

**Exercice 10.3.** Brachystochrone. Minimiser

$$\int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \, dx.$$

**Exercice 10.4.** Minimiser

$$\int_{-1}^1 (y' - 2|x|)^2 \, dx, \quad y(-1) = -1, y(1) = 1,$$

et constater que l'extrémale n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ .

## 11. Intégrales multiples

Ce paragraphe contient des rappels sur les intégrales multiples.

Un *pavé*  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  est un produit de  $n$  intervalles :

$$X = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Le volume  $n$ -dimensionnel de  $X$  est par définition  $\text{vol}_n X := \prod_1^n (b_j - a_j)$ . Un *partage*  $\mathcal{P}$  de  $X$  est un ensemble de sous-pavés de  $X$  sans points intérieurs communs, dont la réunion donne  $X$ . Par exemple :

$$\{[a_1, x_1] \times [a_2, b_2], [x_1, b_1] \times [a_2, b_2]\}, \text{ pour } a_1 < x_1 < b_1,$$

est un partage de  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ .

Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont deux partages de  $X$ , on dit que  $\mathcal{Q}$  est *plus fin* que  $\mathcal{P}$  si tout pavé de  $\mathcal{Q}$  est un sous-pavé d'un pavé de  $\mathcal{P}$ .

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée : La petite et la grande somme de  $f$  relativement au partage  $\mathcal{P}$  de  $X$  sont définies par

$$s(f, \mathcal{P}) := \sum_{P \in \mathcal{P}} (\inf_P f) \text{vol}_n P, \quad S(f, \mathcal{P}) := \sum_{P \in \mathcal{P}} (\sup_P f) \text{vol}_n P.$$

**Définition 11.1.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée sur un pavé  $X$ . L'*intégrale inférieure* [resp. *supérieure*] de  $f$  sur  $X$  est définie par

$$\int_{\underline{\quad}} f := \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) \quad [\text{resp.} \quad \int_{\overline{\quad}} f := \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P})].$$

Quand  $\int_{\underline{\quad}} f = \int_{\overline{\quad}} f$ , on dit que  $f$  est *intégrable* et on désigne cette valeur commune par  $\int f$  ou  $\int_X f$ .

**Proposition 11.2.** La fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  bornée sur un pavé  $X$  est intégrable si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un partage  $\mathcal{P}$  de  $X$  tel que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

**Remarque 11.3.** Cette condition est équivalente à la suivante (cf. (6.4)) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{P} \text{ tel que } \sum_{P \in \mathcal{P}} |f(\xi_P) - f(\eta_P)| \text{vol}_n P < \varepsilon, \text{ si } \xi_P, \eta_P \in P.$$

**Corollaire 11.4.** Si  $f$  est une fonction continue sur un pavé  $X$ , alors  $f$  est intégrable.

**Proposition 11.5.** Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions intégrables sur un pavé  $X$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors les fonctions  $cf$ ,  $f + g$ ,  $|f|$  sont intégrables et

$$\int cf = c \int f, \quad \int (f + g) = \int f + \int g, \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

De plus :

$$f \leq g \implies \int f \leq \int g.$$

**Définition 11.6.** Soit  $Y$  un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$ . Une fonction  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable si la fonction  $\tilde{f}$  qui prolonge  $f$  par 0 à l'extérieur de  $Y$  est intégrable sur un (en fait tout) pavé contenant  $Y$ .

On dit que  $Y$  est *admissible* si la fonction caractéristique de  $Y$ , désignée par  $\mathbf{1}_Y$ , est intégrable. Dans ce cas, on pose

$$\text{vol}_n Y := \int_X \mathbf{1}_Y, \text{ pour } X \text{ pavé } \supseteq Y.$$

Pour  $Y$  borné, on définit un *volume inférieur* et un *volume supérieur* par

$$\underline{\text{vol}}_n Y = \int_{-X} \mathbf{1}_Y, \quad \overline{\text{vol}}_n Y = \int_X \mathbf{1}_Y, \text{ pour } X \text{ pavé } \supseteq Y.$$

**Proposition 11.7.** Soit  $Y$  un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$ . Si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre fini de pavés  $X_1, \dots, X_k$  tels que

$$Y \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_k \text{ et } \sum_1^k \text{vol}_n X_j < \varepsilon,$$

alors  $Y$  est admissible et  $\text{vol}_n Y = 0$ . La réciproque est vraie. Dans ce cas, on dit que  $Y$  est de volume nul.

**Proposition 11.8.** Soit  $Y$  borné dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $Y$  est admissible si, et seulement si,  $\partial B$  est de volume nul.

**Définition 11.9.** Un sous-ensemble  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  est de *mesure de Lebesgue nulle* si, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une suite de pavés  $X_1, \dots, X_k, \dots$  telle que

$$Y \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_k \cup \dots \text{ et } \sum_1^\infty \text{vol}_n X_j < \varepsilon.$$

**Exemples 11.10.**

- 1) L'ensemble  $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  est de mesure nulle, mais il n'est pas admissible, donc pas de volume nul.
- 2) Tout sous-ensemble de volume nul est de mesure nulle.
- 3) Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle.

**Théorème 11.11. LEBESGUE.** Soit  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée définie sur  $Y$  borné de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $f$  est intégrable si, et seulement si, l'ensemble des points où  $f$  n'est pas continue est de mesure nulle.

**Proposition 11.12.** Soit  $0 \leq f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée sur un pavé  $X$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Alors  $f$  est intégrable si, et seulement si, le sous-graphe

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in X \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est admissible. Dans ce cas, on a  $\int f = \text{vol}_n Y$ .

Par suite,  $f$  est intégrable si, et seulement si, son graphe est de volume nul.

**Proposition 11.13. THÉORÈME DE STOLZ.** Soient  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $Y \subset \mathbb{R}^p$  des pavés,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable. Pour  $x \in X$ , on désigne par  $f(x, \cdot) : Y \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction partielle qui à  $y \in Y$  fait correspondre  $f(x, y)$ . Alors les fonctions  $\underline{F}$  et  $\overline{F}$ , définies par

$$\underline{F}(x) := \int_{-Y} f(x, \cdot) \text{ et } \overline{F}(x) := \int_Y f(x, \cdot),$$

sont intégrables et

$$\int_{X \times Y} f = \int_X \underline{F} = \int_X \overline{F}.$$

En particulier, si  $f(x, \cdot)$  est intégrable pour tout  $x \in X$ , alors

$$\int_{X \times Y} f = \int_X \left( \int_Y f(x, y) \, dy \right) dx.$$

**Corollaire 11.14.** Soit  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur le produit de deux pavés. Alors

$$\int_{X \times Y} f = \int_X \left( \int_Y f(x, y) \, dy \right) dx = \int_Y \left( \int_X f(x, y) \, dx \right) dy.$$



**Exercice 11.1.** Montrer que le triangle de Sierpinski est de volume nul.

**Exercice 11.2.** Calculer

$$\int_T e^{-y/x} \, dx \, dy,$$

où  $T$  est le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .

**Exercice 11.3.** Calculer

$$\int_X \frac{\sqrt{x} \, dx \, dy \, dz}{(x + y + z + 1)^3},$$

où  $X = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ .

## 12. Formule du changement de variables

Il s'agit de montrer la formule

$$(12.1) \quad \int_{\phi(X)} g = \int_X (g \circ \phi) |J\phi|,$$

où  $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$  est un difféomorphisme d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X$  est un sous-ensemble admissible de  $\Omega$  et  $g$  une fonction intégrable sur  $\phi(X)$ . Ici,  $J\phi$  désigne le jacobien de  $\phi$ , *i.e.*,

$$J\phi(x) := \det d\phi_x, \text{ pour } x \in \Omega.$$

La formule (12.1) est vraie quand  $n = 1$ . En effet, si  $g$  est continue et  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'égalité

$$(12.2) \quad \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} g(y) dy = \int_a^b g(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

est une conséquence directe du théorème fondamental, puisque si  $G$  est une primitive de  $g$ , alors  $G \circ \phi$  est une primitive de  $(g \circ \phi) \phi'$  et

$$G|_{\phi(a)}^{\phi(b)} = (G \circ \phi)|_a^b.$$

Quand  $\phi$  est un difféomorphisme, il est soit croissant,  $\phi(a) < \phi(b)$  et dans ce cas,  $|J\phi| = \phi'$  donc (12.1) est identique à (12.2), soit décroissant,  $\phi(a) > \phi(b)$  et  $|J\phi| = -\phi'$  donc les deux signes  $-$  de (12.2) se compensent.

Pour  $g = 1$ , (12.1) donne :  $\text{vol } \phi(X) = \int_X |J\phi|$ .

Quand  $\phi$  est linéaire et  $X$  est un pavé, alors  $\phi(X)$  est un parallépipède. Plus généralement, si  $X$  est un parallépipède alors  $\phi(X)$  est un parallépipède.

**Lemme 12.1.** *Soit  $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  une application linéaire et  $X$  un parallépipède. Alors*

$$(12.3) \quad \text{vol } \phi(X) = |\det \phi| \text{vol } X.$$

*Preuve.* Si  $\phi$  n'est pas inversible, alors  $\det \phi = 0$  et  $\phi(X)$  est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension au plus  $n - 1$ , donc  $\phi(X)$  a un volume nul. La formule est vérifiée.

On suppose dorénavant  $\phi$  inversible.

**RAPPEL.** Voir Lang [15]. Toute transformation linéaire inversible de  $\mathbb{R}^n$  est un produit de transformations élémentaires du type suivant :

- a)  $x \mapsto (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$ ,
- b)  $x \mapsto (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$ , avec  $\lambda \neq 0$ ,
- c)  $x \mapsto (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)$ .

Pour chacune des trois transformations élémentaires ci-dessus, montrons plus généralement

$$(12.4) \quad \int_{C(0,s)} g = |\det \phi| \int_{C(0,r)} g \circ \phi,$$



où  $C(0, s) = [-s, s]^n$ , pour  $g : C(0, s) \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable nulle hors de  $\phi(C(0, r)) \subseteq C(0, s)$ . Par composition et puisque  $\det(\phi_1 \circ \phi_2) = \det \phi_1 \det \phi_2$ , la formule (12.4) a lieu pour  $\phi$  linéaire inversible. La formule (12.3) en découle en prenant  $r$  tel que  $X \subseteq C(0, r)$  et  $g = \mathbf{1}_{\phi(X)}$  puisque  $\mathbf{1}_{\phi(X)} \circ \phi = \mathbf{1}_X$ .

a) Ici,  $\phi(C(0, r)) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid -r + y_2 \leq r + y_2, -r \leq y_j \leq r, \text{ pour } j = 2, \dots, n\}$ . La formule du changement de variable à une dimension en posant  $y_1 = x_1 + y_2$  donne :

$$\int_{-s}^s g(y_1, \dots, y_n) dy_1 = \int_{-r+y_2}^{r+y_2} g(y_1, \dots, y_n) dy_1 = \int_{-r}^r g(x_1 + y_2, \dots, y_n) dx_1.$$

D'où

$$\int_{C(0,s)} g = \int_{-r}^r \dots \int_{-r}^r \left( \int_{-r}^r g(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n = \int_{C(0,r)} g \circ \phi.$$

b) Ici,  $\phi(C(0, r)) = [-\lambda r, \lambda r] \times [-r, r]^{n-1}$ , quand  $\lambda > 0$ . Le changement de variable  $y_1 = \lambda x_1$  donne :

$$\begin{aligned} \int_{C(0,s)} g &= \int_{-r}^r \dots \int_{-r}^r \left( \int_{-\lambda r}^{\lambda r} g(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \right) dy_2 \dots dy_n \\ &= \lambda \int_{-r}^r \dots \int_{-r}^r \left( \int_{-r}^r g(\lambda x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n = \det \phi \int_{C(0,r)} g \circ \phi. \end{aligned}$$

c) C'est une application du théorème de Stolz (cf. Proposition 11.13).  $\square$

**Lemme 12.2.** Soit  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $X$  est un ensemble de volume nul dont l'adhérence est contenue dans  $\Omega$ , alors  $\phi(X)$  est de volume nul.

*Preuve.* Travaillons avec la norme sup dans  $\mathbb{R}^n$  pour laquelle les boules sont les pavés cubique ouverts. Nous désignerons par  $C(x, r)$  la boule fermée de centre  $x$  et rayon  $r$ . Puisque  $X$  est de volume nul, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des pavés  $P_1, \dots, P_N$  tels que

$$(12.5) \quad \overline{X} \subseteq \bigcup_1^N P_j \text{ et } \sum_1^N \text{vol } P_j < \varepsilon.$$

Quitte à subdiviser ces pavés, on peut supposer qu'ils sont cubiques.

Puisque  $\overline{X} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \emptyset$ , la fonction  $x \mapsto d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$  est positive et continue. Il existe donc  $\delta > 0$  tel que

$$d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq 2\delta, \text{ pour tout } x \in \overline{X}.$$

Quitte à subdiviser encore, on peut supposer que le rayon de  $P_j$  est inférieur à  $\delta$ , pour tout  $j$ . Par suite, tout  $P_j$  qui rencontre  $\overline{X}$  est contenu dans  $\Omega$ . Après élimination des pavés qui ne rencontrent pas  $\overline{X}$ , on obtient un recouvrement de  $X$  par des pavés cubiques contenus dans  $\Omega$  qui satisfait (12.5).

Pour  $x \in \Omega$  et  $y \in C(x, r) \subseteq \Omega$ , l'inégalité des accroissements finis (Proposition 6.15) donne

$$\|\phi(y) - \phi(x)\| \leq \sup_{\xi \in C(x,r)} \|d\phi_\xi\| \|y - x\|.$$

Par suite, si  $x \in X$  et  $r < \delta$ , l'inclusion suivante a lieu :

$$\phi(C(x, r)) \subseteq C(\phi(x), Mr), \text{ avec } M = \sup_{\xi \in X_{2\delta}} \|d\phi_\xi\|.$$

On en déduit

$$\overline{\text{vol}} \phi(C(x, r)) \leq M^n \text{vol} C(x, r) \text{ et donc } \overline{\text{vol}} \phi(X) \leq M^n \varepsilon.$$

□

**Corollaire 12.3.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application injective de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $J\phi(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Si  $X$  est admissible et si  $\overline{X} \subset \Omega$ , alors  $\phi(X)$  est admissible.*

*Preuve.* D'après le théorème d'inversion locale, on sait que  $\phi$  est ouverte, donc  $\phi$  est un difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $\phi(\Omega)$ . En particulier,  $\phi^{-1}$  est continue. Il s'ensuit que

$$(12.6) \quad \partial\phi(X) = \phi(\partial X).$$

Le Lemme 12.2 donne  $\text{vol} \partial\phi(X) = 0$ .

Comme  $\overline{X}$  est compact,  $\phi(\overline{X})$  est compact et donc  $\phi(X)$  est borné. Il reste à appliquer la Proposition 11.8. □

**Proposition 12.4.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application injective de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $J\phi(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Pour tout  $K$  compact de  $\Omega$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :*

$$(1 - \varepsilon)^{n+1} \sup_C |J\phi| \text{vol} C \leq \underline{\text{vol}} \phi(C) \leq \overline{\text{vol}} \phi(C) \leq (1 + \varepsilon)^{n+1} \inf_C |J\phi| \text{vol} C,$$

pour tout pavé cubique centré dans  $K$  de rayon  $\leq \delta$ .

**Remarque 12.5.** De manière équivalente, puisqu'on sait que  $\phi(C(x, r))$  est admissible quand  $C(x, r)$  est le pavé cubique de centre  $x$  et côté  $2r$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol} \phi(C(x, r))}{\text{vol} C(x, r)} = |J\phi(x)|,$$

uniformément pour  $x$  dans un compact de  $\Omega$ .

*Preuve.* Travaillons avec la norme sup dans  $\mathbb{R}^n$  pour laquelle les boules sont les pavés cubique ouverts. Nous désignerons par  $C(x, r)$  la boule fermée de centre  $x$  et rayon  $r$ .

Il existe  $\delta_0 > 0$  tel que l'épaississement  $K_{\delta_0}$  est contenu dans  $\Omega$ . Soit  $x \in K$ .

Sans perte de généralité, puisque le volume est invariant par translation, on peut supposer  $x = 0 \in \Omega$  et  $\phi(0) = 0$ .

On donne  $\varepsilon > 0$  et on applique le Corollaire 6.17 de l'inégalité des accroissements finis à  $A^{-1} \circ \phi$ , avec  $A := d\phi_0$ . Puisque  $A^{-1} \circ \phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que sa différentielle en 0 est l'identité, il existe  $\delta \in ]0, \delta_0[$  tel que pour  $\|h\| \leq \delta$ , on a :

$$(12.7) \quad \|A^{-1} \circ \phi(h) - h\| < \varepsilon \|h\|.$$

Il en découle

$$\|A^{-1} \circ \phi(h)\| \leq (1 + \varepsilon) \|h\|, \text{ pour } \|h\| \leq r \leq \delta,$$

c'est-à-dire  $(A^{-1} \circ \phi)(C(0, r)) \subseteq C(0, (1 + \varepsilon)r)$ . En appliquant  $A$ , on en déduit

$$\phi(C(0, r)) \subseteq A(C(0, (1 + \varepsilon)r)), \quad r \leq \delta.$$

En prenant le volume et en utilisant le Lemme 12.1 ceci donne

$$\overline{\text{vol}} \phi(C(0, r)) \leq |\det A| \text{vol} C(0, (1 + \varepsilon)r) = |\det d\phi_0| (1 + \varepsilon)^n \text{vol} C(0, r).$$

Une inégalité en sens inverse est obtenue par la considération suivante. De (12.7), on déduit aussi

$$(1 - \varepsilon)r < \|A^{-1} \circ \phi(h)\| \text{ pour } \|h\| = r \leq \delta.$$

Donc  $C(0, (1 - \varepsilon)r) \cap \partial(A^{-1} \circ \phi)(C(0, r)) = \emptyset$ , grâce à (12.6). Puisque 0 appartient à  $(A^{-1} \circ \phi)(C(0, r))$ , un argument de connexité montre que le segment  $[0, h]$  reste dans cet ensemble pour  $\|h\| \leq (1 - \varepsilon)r$ . L'inclusion suivante en découle

$$C(0, (1 - \varepsilon)r) \subseteq A^{-1} \circ \phi(C(0, r)).$$

En procédant comme ci-dessus, on arrive à l'inégalité

$$|\det d\phi_0| (1 - \varepsilon)^n \text{vol} C(0, r) \leq \underline{\text{vol}} \phi(C(0, r)), \quad r \leq \delta.$$

L'inégalité suivante, pour  $x \in K$  et  $C$  cube de centre  $x$  et rayon  $\delta$ ,

$$(1 - \varepsilon)^n |J\phi(x)| \text{vol} C \leq \underline{\text{vol}} \phi(C) \leq \overline{\text{vol}} \phi(C) \leq (1 + \varepsilon)^n |J\phi(x)| \text{vol} C,$$

est démontrée, car on constate qu'un  $\delta$  uniforme peut être choisi pour  $x$  dans  $K$ .

Il reste à utiliser le lemme suivant pour conclure. □

**Lemme 12.6.** *Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\inf_K u > 0$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout cube  $C$  de rayon  $\leq \delta$  avec  $C \cap K \neq \emptyset$ , on a :*

$$(1 - \varepsilon) \sup_{C \cap K} u \leq \inf_{C \cap K} u \leq \sup_{C \cap K} u \leq (1 + \varepsilon) \inf_{C \cap K} u.$$

*Preuve.* On donne  $\varepsilon > 0$ . Par continuité uniforme de  $u$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|u(x) - u(y)| \leq \varepsilon \inf_K u, \text{ pour } x, y \in K \text{ avec } \|x - y\| < \delta.$$

Pour  $C$  comme dans l'énoncé et  $x, y \in C \cap K$ , on aura

$$u(x) \leq u(y) + \varepsilon \inf_K u \leq u(y) + \varepsilon \inf_{C \cap K} u.$$

En faisant varier  $y \in C \cap K$ , il vient

$$u(x) \leq \inf_{C \cap K} u + \varepsilon \inf_{C \cap K} u = (1 + \varepsilon) \inf_{C \cap K} u,$$

donc

$$\sup_{C \cap K} u \leq (1 + \varepsilon) \inf_{C \cap K} u.$$

□

**Théorème 12.7.** FORMULE DU CHANGEMENT DE VARIABLES. *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application injective de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $J\phi(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Si  $X$  est admissible,  $\bar{X} \subset \Omega$  et si  $g : \Phi(X) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction intégrable, alors  $g \circ \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable et on a :*

$$\int_{\phi(X)} g = \int_X (g \circ \phi) |J\phi|.$$

*Preuve.* Il suffit de considérer le cas  $g \geq 0$  en écrivant  $g = g_+ - g_-$  où  $g_+ := \max(g, 0)$  et  $g_- := -\min(g, 0)$ .

Puisque  $X$  est borné et que  $\bar{X}$  est contenu dans  $\Omega$ , il existe  $\delta_0 > 0$  tel que  $\bar{X}_{\delta_0} = X_{\delta_0}$  soit contenu dans  $\Omega$ .

On recouvre  $X$  par un nombre fini de pavés cubiques  $C_1, \dots, C_N$  de rayon  $\delta \leq \delta_0$  tels que  $\text{vol}(C_i \cap C_j) = 0$  si  $i \neq j$ ,  $C_j \cap X \neq \emptyset$ , et donc  $C_j \subseteq X_{\delta_0}$ . Quitte à raffiner, on peut supposer que  $\delta$  est inférieur au  $\delta$  de la Proposition 12.4 pour  $K = X_{\delta_0}$ .

Pour  $g : \phi(X) \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et  $\varepsilon > 0$  donné, on a, grâce à la Proposition 12.4 :

$$\begin{aligned} \int_{\phi(X)} g &\leq \sum_1^N \sup_{\phi(C_i)} g \overline{\text{vol}} \phi(C_i) \leq \sum_1^N (1 + \varepsilon)^{n+1} \sup_{C_i} (g \circ \phi) \inf_{C_i} |J\phi| \text{vol } C_i \\ &\leq \sum_1^N (1 + \varepsilon)^{n+1} \sup_{C_i} [(g \circ \phi) |J\phi|] \text{vol } C_i, \end{aligned}$$

où on a employé encore l'inégalité  $\sup u \inf v \leq \sup[uv]$  pour des fonctions positives ou nulles. [Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $\tilde{x}$  tel que  $\sup u \leq (1 + \alpha)u(\tilde{x})$ ; d'où  $\sup u \inf v \leq (1 + \alpha)u(\tilde{x}) \inf v \leq (1 + \alpha)u(\tilde{x})v(\tilde{x}) \leq (1 + \alpha) \sup uv$ .]

Puisqu'on peut raffiner arbitrairement le recouvrement de  $X$ , en prenant la borne inférieure on obtient

$$\int_{\phi(X)} g \leq (1 + \varepsilon)^{n+1} \int_X (g \circ \phi) |J\phi|,$$

et en laissant varier  $\varepsilon$  il vient finalement

$$\int_{\phi(X)} g \leq \int_X (g \circ \phi) |J\phi|.$$

Cette formule appliquée à  $f := (g \circ \phi) |J\phi|$  au lieu de  $g$ ,  $\phi^{-1}$  au lieu de  $\phi$  et  $\phi(X)$  au lieu de  $X$  donne :

$$\int_X (g \circ \phi) |J\phi| = \int_{\phi^{-1}(\phi(X))} f \leq \int_{\phi(X)} (f \circ \phi^{-1}) |J\phi^{-1}| = \int_{\phi(X)} \frac{g |J\phi| \circ \phi^{-1}}{|J\phi| \circ \phi^{-1}} = \int_{\phi(X)} g.$$

Donc

$$\int_{\phi(X)} g = \int_X (g \circ \phi) |J\phi|,$$

Des arguments symétriques permettent d'obtenir

$$\int_{-X} (g \circ \phi) |J\phi| = \int_{-\phi(X)} g.$$

Par suite

$$\int_{-X} (g \circ \phi) |J\phi| = \int_{-\phi(X)} g \leq \int_{\phi(X)} g = \int_X (g \circ \phi) |J\phi|.$$

On en déduit que  $g$  est intégrable sur  $\phi(X)$  si, et seulement si,  $g \circ \phi$  est intégrable sur  $X$  et la formule du changement de variables a lieu.  $\square$

**Corollaire 12.8.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application injective de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $J\phi(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Si  $X$  est admissible et si  $\bar{X} \subset \Omega$ , alors  $\phi(X)$  est admissible et

$$\text{vol } \phi(X) = \int_X |J\phi|.$$



**Exercice 12.1.** Soit  $Y$  le parallélogramme de sommets  $(1, 2), (3, 3), (4, 5), (2, 4)$ . Trouver l'application affine  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\phi([0, 1]^2) = Y$  et calculer

$$\int_Y e^{y_1 - y_2} dy_1 dy_2.$$

**Exercice 12.2.** Calculer le volume de la boule euclidienne unité de  $\mathbb{R}^3$  en passant aux coordonnées polaires  $x = r \cos \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \cos \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \theta$ .

**Exercice 12.3.** Justifier les formules suivantes, pour  $a > 0$  :

$$\left( \int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 = 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{a/\cos \theta} r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} e^{-a^2/\cos^2 \theta} d\theta.$$

**Exercice 12.4.** Calculer le volume d'un trou cylindrique de rayon  $a$  dans une sphère de rayon  $r$  lorsque

- a) le cylindre est centré,
- b) le centre de la sphère est au bord du cylindre.

### 13. Intégrales curvilignes dans $\mathbb{R}^3$

La notion d'intégrale de Riemann des fonctions de plusieurs variables réelles étant supposée connue, nous voulons définir l'intégrale d'une fonction le long d'une courbe ou d'une surface paramétrée.

**Définition 13.1.** Une *courbe paramétrée* de classe  $\mathcal{C}^k$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une application  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle est  *$\mathcal{C}^k$  par morceaux* ( $\mathcal{C}^k\mathcal{M}$ ) s'il existe un partage  $\{t_0, \dots, t_N\}$  de  $[a, b]$  tel que  $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , pour  $j = 0, \dots, N-1$ .

**Remarque 13.2.** En chaque valeur  $t \in ]a, b[$  (resp.  $[a, b[$ ) du paramètre d'une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, la fonction  $\gamma$  admet une dérivée à gauche (resp. à droite). Ces dérivées sont égales sauf peut-être en  $t_1, \dots, t_{N-1}$ .

**Exemple 13.3.** Une courbe continue affine par morceaux est de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux pour tout entier  $k$ .

**Définition 13.4.** Une courbe paramétrée continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est *rectifiable* s'il existe  $M > 0$  tel que, pour tout partage  $\{a = t_0 < \dots < t_N = b\}$  de  $[a, b]$ ,

$$(13.1) \quad \sum_0^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \leq M.$$

Si tel est le cas, la *longueur*  $L(\gamma)$  de  $\gamma$  est la borne supérieure des sommes de (13.1) prise sur tous les partages de  $[a, b]$ .

Il est immédiat de voir que la longueur ne dépend pas du paramétrage, *i.e.*, si  $\delta := \gamma \circ \varphi$ , avec  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  continue bijective, alors  $L(\delta) = L(\gamma)$ .

**Remarque 13.5.** Une courbe  $\gamma$  est rectifiable si, et seulement si, ses composantes  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sont à variation bornée. Il existe des courbes continues non rectifiables.

**Proposition 13.6.** *Si une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors elle est rectifiable et sa longueur vaut*

$$(13.2) \quad L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

*Preuve.* Il suffit de le montrer pour  $\gamma \in \mathcal{C}^1$ . On donne  $\varepsilon > 0$ . Par continuité uniforme, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \leq \varepsilon$  si  $|s - t| \leq \delta$ . Pour un partage  $\{t_0, \dots, t_N\}$  de  $[a, b]$  de maille  $\leq \delta$ , l'inégalité des accroissements finis (Corollaire 6.17) donne

$$\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) - \gamma'(t_j)(t_{j+1} - t_j)\| \leq \varepsilon(t_{j+1} - t_j), \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Donc

$$(\|\gamma'(t_j)\| - \varepsilon)(t_{j+1} - t_j) \leq \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \leq (\|\gamma'(t_j)\| + \varepsilon)(t_{j+1} - t_j).$$

En sommant sur  $j$ , on obtient

$$\sum_0^{N-1} \|\gamma'(t_j)\| (t_{j+1} - t_j) - \varepsilon(b-a) \leq \sum_0^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \leq \sum_0^{N-1} \|\gamma'(t_j)\| (t_{j+1} - t_j) + \varepsilon(b-a),$$

et si le partage est assez fin pour que la somme de Riemann et l'intégrale diffèrent d'au plus  $\varepsilon$  :

$$\int_a^b \|\gamma'(t_j)\| dt - \varepsilon(b-a+1) \leq \sum_0^{N-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t_j)\| dt + \varepsilon(b-a+1),$$

□

**Définition 13.7.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée rectifiable et  $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors les sommes

$$\sum_0^{N-1} f(\gamma(t_j)) \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|, \text{ où } a = t_0 < \dots < t_N = b,$$

tendent vers une limite quand la maille  $\max(t_{j+1} - t_j)$  du partage tend vers 0. C'est l'intégrale de  $f$  sur  $\gamma$  désignée par

$$\int_{\gamma} f \text{ ou } \int_{\gamma} f(s) \|ds\|.$$

Comme plus haut pour la longueur, cette intégrale ne dépend pas du paramétrage.

**Proposition 13.8.** Si  $f$  est une fonction continue sur  $\gamma([a, b])$  avec  $\gamma$  continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

*Preuve.* Identique à la preuve de la proposition précédente. □

**Exemple 13.9.** CENTRE DE GRAVITÉ D'UN FIL. La position d'un fil d'épaisseur négligeable est décrite par une application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. On désigne par  $\rho(\gamma(t))$  la densité ponctuelle du fil au point  $\gamma(t)$ . Alors les coordonnées du centre de gravité du fil sont

$$\bar{x}_j = \frac{\int_{\gamma} x_j(s) \rho(s) \|ds\|}{\int_{\gamma} \rho(s) \|ds\|}, \quad j = 1, 2, 3.$$

**Définition 13.10.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée rectifiable et  $X : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs continu. Alors les sommes

$$\sum_0^{N-1} \langle X(\gamma(t_j)) | \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) \rangle, \text{ où } a = t_0 < \dots < t_N = b,$$

tendent vers une limite quand la maille  $\max(t_{j+1} - t_j)$  du partage tend vers 0. C'est l'intégrale de  $X$  sur  $\gamma$  désignée par

$$\int_{\gamma} X \text{ ou } \int_{\gamma} \langle X(s) | ds \rangle.$$

Cette intégrale ne dépend pas du paramétrage, mais seulement de l'orientation, *i.e.*, si  $\delta := \gamma \circ \varphi$ , avec  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  continue bijective *croissante*, alors  $\int_{\delta} \langle X(s) \mid ds \rangle = \int_{\gamma} \langle X(s) \mid ds \rangle$ .

**Exemple 13.11.** Le travail d'une force  $X$  le long d'un chemin paramétré par  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^3$  est égal à l'intégrale de  $X$  sur  $\gamma$ .

**Proposition 13.12.** Si  $X$  est un champ de vecteurs continu sur  $\gamma([a, b])$  avec  $\gamma$  continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^3$ , alors

$$\int_{\gamma} \langle X(s) \mid ds \rangle = \int_a^b \langle X(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle dt.$$

**Notation 13.13.** Il est pratique d'utiliser la notation (forme différentielle) suivante

$$\int_{\gamma} \langle X(s) \mid ds \rangle = \int_{\gamma} (X_1(x) dx_1 + X_2(x) dx_2 + X_3(x) dx_3).$$

Le calcul d'une intégrale curviligne se fait donc pratiquement en remplaçant  $x$  par  $\gamma(t)$  et  $dx_j$  par  $\gamma'_j(t) dt$ .

**Exemple 13.14.** Pour  $\gamma(t) = {}^t(\cos t, \sin t, t)$  et  $X(x, y, z) = {}^t(-y, x, 0)$  on trouve

$$\int_{\gamma} \langle X(s) \mid ds \rangle = 2\pi.$$

**Théorème 13.15.** FORMULE DE GREEN-RIEMANN. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $K$  un compact de  $\Omega$  dont le bord  $\partial K$  est une réunion finie de courbes rectifiables, orientées par la normale extérieure. Si  $P$  et  $Q$  sont deux fonctions continûment différentiables sur  $\Omega$ , alors

$$\int_{\partial K} P dx + Q dy = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

*Preuve.* On commence par le cas où  $K$  est l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq f(x)\}, \text{ avec } f \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R}).$$

Le théorème de Stolz et le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral permettent d'écrire

$$- \iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b \left( \int_c^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = - \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, c)] dx.$$

L'intégrale curviligne se calcule aisément puisque les contributions des bords verticaux de  $K$  sont nulles :

$$\int_{\partial K} P dx = \int_a^b P(x, c) dx - \int_a^b P(x, f(x)) dx.$$

On a donc montré

$$(13.3) \quad \int_{\partial K} P dx = - \iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$



Pour montrer l'autre égalité, on introduit la fonction auxiliaire  $U(x, y) := \int_c^y Q(x, \eta) d\eta$ .

Alors  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \int_c^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, \eta) d\eta, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Par suite les dérivées mixtes secondes de  $U$  existent et sont égales à  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ .

La formule de dérivation des fonctions composées donne la relation suivante :

$$\int_{\gamma} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0$$

si  $\gamma$  est une courbe fermée  $\mathcal{C}^1\mathcal{M}$  dans  $\Omega$ . Dans notre cas, on obtient

$$\int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial y} dy = - \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial x} dx.$$

Il reste à appliquer (13.3) avec  $P$  remplacé par  $\frac{\partial U}{\partial x}$  pour obtenir

$$\int_{\partial K} Q dy = \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial y} dy = - \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial x} dx = \iint_K \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} dx dy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Le cas d'un compact

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq g(y), c \leq y \leq d\}, \text{ avec } g \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$$

est démontré par symétrie.

La formule est vraie pour les compacts qu'on peut décomposer en un nombre fini de compacts  $K_1, \dots, K_n$  du type précédent car l'intégrale sur une partie du bord de  $K_j$  non contenue dans  $\partial K$  s'annule avec l'intégrale sur une partie du bord du compact adjacent.

Le cas général est obtenu par approximation cf. [2].

□



**Exercice 13.1.** Calculer les coordonnées du centre de gravité du quart de cercle

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq x, y\}.$$

**Exercice 13.2.** Calculer la masse totale et la longueur du fil situé à l'intersection de la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  et du plan d'équation  $x + z = 0$ , ayant une densité ponctuelle  $\rho(x, y, z) = x^2$ .

**Exercice 13.3.** Calculer le travail de la force  $F(x, y, z) = {}^t(-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$  sur le chemin  $\gamma$  donné par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, \pi]$  (resp.  $t \in [0, 2\pi]$ ).

**Exercice 13.4.** Évaluer l'intégrale  $\int_{\gamma} 2xyz dx + x^2z dy + x^2y dz$ , où  $\gamma$  est une courbe paramétrée joignant  $(1, 1, 1)$  à  $(1, 2, 4)$ .

### 14. Intégrales de surface dans $\mathbb{R}^3$

**Définition 14.1.** Une *surface*  $\Sigma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^3$  est une sous-variété de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$ . Elle est donc définie localement comme l'ensemble des zéros d'une fonction régulière ou comme l'image de  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Cette application  $\phi$  est une paramétrisation locale de  $\Sigma$ . Rappelons les propriétés de  $\phi$ , cf. Théorème 9.7 :

$$\begin{aligned} &\phi \text{ est } \mathcal{C}^1, \text{ injective et } \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow U \text{ est continue,} \\ &\forall (u, v) \in U, \text{ d}\phi_{(u,v)} \text{ est de rang } 2, \text{ i.e., } \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \neq 0. \end{aligned}$$

**Exemple 14.2.** Puisque toute surface  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^3$  est localement le graphe d'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , après renumérotation des coordonnées, on peut supposer  $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ . Dans ce cas,  $\frac{\partial \phi}{\partial u} = {}^t(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial v} = {}^t(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ , si bien que  $\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} = {}^t(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)$ .

**Proposition 14.3.** Soit  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation  $\mathcal{C}^1$  d'un morceau de surface de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $K$  compact de  $U$  dont le bord est une courbe rectifiable, la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol } \phi(K)_\varepsilon}{2\varepsilon}$$

existe, où  $\phi(K)_\varepsilon$  est l'épaississement d'ordre  $\varepsilon$  de  $\phi(K)$ . Cette limite vaut

$$(14.1) \quad \iint_K \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv.$$

C'est, par définition, l'aire de  $\phi(K)$ .

*Preuve.* Soit  $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par  $\Phi(u, v, t) := \phi(u, v) + t\nu(u, v)$  où  $\nu(u, v) := \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|$  (vecteur normal unitaire au morceau de surface). On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v, t) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) + O(t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v, t) = \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) + O(t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u, v, t) = \nu(u, v),$$

quand  $t \rightarrow 0$ . Le jacobien de  $\Phi$  est donc

$$(14.2) \quad J\Phi(u, v, t) = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \nu \right](u, v) + O(t) = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| (u, v) + O(t),$$

où le crochet est mis pour le produit mixte. Le théorème d'inversion locale 9.1 donne l'existence d'un voisinage  $V$  de  $K$  et de  $\varepsilon > 0$  tels que  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $V \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  sur son image.

L'épaississement d'ordre  $\varepsilon$  de  $\phi(K)$  est réunion de  $\Phi(K \times ]-\varepsilon, \varepsilon[)$  et de  $\phi(\partial K)_\varepsilon$ . Comme le volume de ce dernier ensemble est majoré par  $\varepsilon^2 L(\phi(\partial K))$ , on a

$$\text{vol } \phi(K)_\varepsilon = \text{vol } \Phi(K \times ]-\varepsilon, \varepsilon[) + O(\varepsilon^2).$$

La formule du changement de variables (Théorème 12.7) et (14.2) entraînent

$$\text{vol } \Phi(K \times [-\varepsilon, \varepsilon]) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \iint_K \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv dt + O(\varepsilon^2) = 2\varepsilon \iint_K \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv + O(\varepsilon^2).$$

La formule 14.1 est démontrée.  $\square$

**Remarque 14.4.** L'aire ne dépend pas de la paramétrisation.

**Définition 14.5.** Soit  $\Sigma$  un morceau de surface paramétré par  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $L$  un compact de  $\Sigma$ . L'intégrale de  $g$  sur  $L$  est définie par

$$\iint_L g ||d\sigma|| = \iint_{\phi^{-1}(L)} g(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv.$$

L'intégrale ne dépend pas de la paramétrisation, ce qui permet de définir l'intégrale d'une fonction continue sur une surface  $\mathcal{C}^1$  comme la somme finie des intégrales sur des morceaux de surfaces paramétrés disjoints.

**Exemple 14.6.** CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE SURFACE COMPACTE. Les coordonnées du centre de gravité d'une surface compacte  $\Sigma$  sont données par

$$\bar{x}_j = \frac{\iint_{\Sigma} x_j \rho ||d\sigma||}{\iint_{\Sigma} \rho ||d\sigma||}, \quad j = 1, 2, 3,$$

où  $\rho$  est la densité ponctuelle.

**Définition 14.7.** Une surface  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^3$  est *orientable* s'il existe en chaque point de  $\Sigma$  un vecteur normal unitaire qui varie continûment.

Une *orientation* est le choix d'un tel vecteur normal unitaire. Toute surface orientable connexe admet donc deux orientations.

**Exemple 14.8.** Tout morceau de surface paramétré est orientable.

Si  $\Sigma$  est le bord d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  et si, en chaque point de  $\Sigma$ ,  $\Omega$  est situé d'un seul côté de  $\Sigma$ , alors  $\Sigma$  est orientable, par exemple par la normale extérieure.

Le ruban de Möbius (cf. Exercice 17.4) n'est pas orientable.

**Définition 14.9.** Soit  $\Sigma$  une surface  $\mathcal{C}^1$  paramétrée par  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $V$  un champ de vecteurs continu sur  $\Sigma$  et  $L$  un compact de  $\Sigma$ . L'intégrale de  $V$  sur  $L$  est définie par

$$\iint_L \langle V | d\sigma \rangle := \iint_{\phi^{-1}(L)} \langle V(\phi(u, v)) | \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \rangle du dv.$$

Cette intégrale ne dépend pas de la paramétrisation mais seulement de l'orientation. C'est le *flux de  $V$  à travers  $L$* .

On définit l'intégrale d'un champ de vecteurs  $V$  continu sur une surface  $\mathcal{C}^1$  orientée comme la somme finie des intégrales de  $V$  sur des morceaux de surfaces paramétrés disjoints respectant l'orientation.

**Remarque 14.10.**  $\iint_{\Sigma} \langle V | d\sigma \rangle = \iint_{\Sigma} \langle V | \nu \rangle ||d\sigma||$ , où  $\nu$  est le vecteur normal unitaire positif de la surface orientée  $\Sigma$ .

**Notation 14.11.** En notation formes différentielles, l'intégrale du champ  $V$  sur  $\Sigma$  est

$$\iint_{\Sigma} (V_1(x) dx_2 \wedge dx_3 + V_2(x) dx_3 \wedge dx_1 + V_3(x) dx_1 \wedge dx_2).$$

**Définition 14.12.** Pour un champ  $V$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , la *divergence* de  $V$  est la fonction

$$\operatorname{div} V := \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}.$$

**Théorème 14.13.** FORMULE DE GAUSS. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $K$  un compact de  $\Omega$  dont le bord  $\partial K$  est une réunion finie de sous-variétés de dimension 2 orientées par la normale extérieure. Si  $V$  est un champ de vecteurs continûment différentiables sur  $\Omega$ , alors

$$(14.3) \quad \iint_{\partial K} \langle V \mid d\sigma \rangle = \iiint_K \operatorname{div} V.$$

**Remarque 14.14.** Si  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont les composantes de  $V$ , la formule (14.3) s'écrit

$$(14.4) \quad \iint_{\partial K} (P\nu_x + Q\nu_y + R\nu_z) \|\mathrm{d}\sigma\| = \iiint_K \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

où  $\nu$  est le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Omega$ .

*Preuve de (14.4).*

Cas d'un sous-graphe :  $K = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f(x, y)\}$  avec  $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times [c, d])$ .

En intégrant d'abord en  $z$  dans l'intégrale triple, on obtient

$$\iiint_K \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_a^b \int_c^d R(x, y, f(x, y)) dx dy - \int_a^b \int_c^d R(x, y, e) dx dy.$$

Le membre de droite est égal à l'intégrale de  $R\nu_z \|\mathrm{d}\sigma\|$  sur le bord de  $K$  puisque  $\nu_z \|\mathrm{d}\sigma\| = dx dy$  sur le graphe de  $f$ ,  $= -dx dy$  sur le plan  $\{z = e\}$ ,  $= 0$  sur les quatre faces restantes. Ceci règle le cas de  $R$ .

Pour  $x \in [a, b]$  donné, soit  $K_x$  le domaine  $\{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, e \leq z \leq f(x, y)\}$ . La formule de Green-Riemann appliquée à  $K_x$  donne

$$\begin{aligned} \iint_{K_x} \frac{\partial Q}{\partial y} dy dz &= \int_{\partial K_x} Q dz \\ &= \int_e^{f(x, d)} Q(x, d, z) dz - \int_c^d Q(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} dy - \int_e^{f(x, c)} Q(x, c, z) dz. \end{aligned}$$

En intégrant en  $x$ , on obtient

$$\begin{aligned} \iiint_K \frac{\partial Q}{\partial y} dy dz dx &= \int_a^b \int_e^{f(x,d)} Q(x, d, z) dz dx + \int_a^b \int_c^d Q(x, y, f(x, y)) \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy dx \\ &\quad - \int_a^b \int_e^{f(x,c)} Q(x, c, z) dz dx. \end{aligned}$$

Au membre de droite, on reconnaît l'intégrale de  $Q\nu_y \|\mathrm{d}\sigma\|$  sur  $\partial K$ , car sur les faces  $\{z = e\}$ ,  $\{x = a\}$  et  $\{x = b\}$ , la composante  $\nu_y$  est nulle.

La formule est valable pour tout compact de  $\Omega$  qu'on peut décomposer en un nombre fini de sous-graphes.

Le cas général est obtenu par partition de l'unité.  $\square$

**Définition 14.15.** Pour un champ de vecteurs  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on définit le *rotationnel* de  $V$  par

$$\mathrm{rot} V := \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

**Théorème 14.16.** FORMULE DE STOKES. Soit  $\Sigma$  une surface  $\mathcal{C}^2$  orientée de  $\mathbb{R}^3$  et  $K$  un compact de  $\Sigma$  dont le bord  $\partial K$  est une réunion finie de courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux orientées par la normale extérieure, i.e., le trièdre vecteur normal à  $\Sigma$ , vecteur normal extérieur à  $\partial K$ , vecteur tangent à  $\partial K$  est direct. Si  $V$  est un champ de vecteurs continûment différentiable sur un voisinage de  $\Sigma$ , alors

$$(14.5) \quad \int_{\partial K} \langle V \mid \mathrm{d}s \rangle = \iint_K \langle \mathrm{rot} V \mid \mathrm{d}\sigma \rangle,$$

*Preuve.* Cas d'un graphe :  $\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) \mid a < x < b, c < y < d\}$  avec  $f \in \mathcal{C}^2([a, b] \times [c, d])$ . On suppose que le bord de  $K$  est paramétré par  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donc  $\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ . On a

$$\langle V \mid \gamma' \rangle = Px' + Qy' + R(\partial_x f x' + \partial_y f y').$$

Par suite, en désignant par  $K'$  la projection de  $K$  sur le plan  $0_{xy}$ , le membre de gauche de (14.5) est égal à

$$\int_{\partial K'} (P(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y))\partial_x f(x, y)) dx + (Q + R\partial_y f) dy.$$

La formule de Green-Riemann appliquée à  $K'$  donne

$$\begin{aligned} \iint_{K'} &(\partial_x Q + \partial_z Q \partial_x f + \partial_x R \partial_y f + \partial_z R \partial_x f \partial_y f + R \partial_x \partial_y f \\ &\quad - \partial_y P - \partial_z P \partial_y f - \partial_y R \partial_x f - \partial_z R \partial_y f \partial_x f - R \partial_y \partial_x f) dx dy \end{aligned}$$

Après simplification, il reste

$$\iint_{K'} ((\partial_y R - \partial_z Q)(-\partial_x f) + (\partial_z P - \partial_x R)(-\partial_y f) + (\partial_x Q - \partial_y P)(1)) dx dy.$$

On reconnaît le membre de droite de (14.5).

La formule est valable pour tout  $\Sigma$  qu'on peut décomposer en un nombre fini de graphes. Le cas général est obtenu par partition de l'unité.  $\square$

**Proposition 14.17.** *Sous les hypothèses de la formule de Gauss, avec un champ de vecteurs  $V$  et une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a :*

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{grad} f &= \iint_{\partial K} f \, d\sigma, \\ \iiint_K \operatorname{rot} V &= - \iint_{\partial K} V \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

**Corollaire 14.18.** *Pour  $f$  et  $V$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $x \in \mathbb{R}^3$  :*

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x) &= \lim_{K \rightarrow \{x\}} \frac{\iint_{\partial K} f \, d\sigma}{\operatorname{vol} K}, \\ \operatorname{div} V(x) &= \lim_{K \rightarrow \{x\}} \frac{\iint_{\partial K} \langle V \mid d\sigma \rangle}{\operatorname{vol} K}, \\ \operatorname{rot} V(x) &= \lim_{K \rightarrow \{x\}} \frac{- \iint_{\partial K} V \wedge d\sigma}{\operatorname{vol} K}, \end{aligned}$$

où  $K$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $x$  qui tend vers  $\{x\}$  pour la distance de Hausdorff, i.e.,  $\sup_{y \in K} \|x - y\| \rightarrow 0$ .

Ce résultat permet de donner une définition des opérateurs gradient, divergence, rotationnel indépendante du système de coordonnées.

**Corollaire 14.19.** *Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  dont le bord est réunion d'un nombre fini de surfaces  $\mathcal{C}^1$  tel que  $\Omega$  est situé d'un côté de  $\partial\Omega$ , alors*

$$\iint_{\partial\Omega} d\sigma = 0.$$

**Proposition 14.20.** *Soit  $V$  un champ de vecteurs continu sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *il existe  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  telle que  $V = \operatorname{grad} f$  ;*
- (ii) *pour toute courbe  $\gamma$  fermée  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans  $\Omega$ , on a  $\int_{\gamma} \langle V \mid ds \rangle = 0$ .*

*Preuve.* (i)  $\implies$  (ii) : Par définition de  $\operatorname{grad} f$  on a (cf. (6.7))

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df_{\gamma(t)} \gamma'(t) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle, \quad t \in [0, 1].$$

Donc

$$\int_{\gamma} \langle V \mid ds \rangle = \int_0^1 \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0.$$

(ii)  $\implies$  (i) : Dans chaque composante connexe de  $\Omega$ , on définit une fonction  $f$  par

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \langle V \mid ds \rangle,$$

où  $\gamma_x$  est un chemin de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux reliant un point fixé  $x_0$  à  $x$  situé dans  $\Omega$ . La définition est cohérente, *i.e.*, indépendante du chemin choisi, car si  $\tilde{\gamma}_x$  relie aussi  $x_0$  à  $x$ , alors  $\gamma_x$  suivi du chemin  $\tilde{\gamma}_x$  en sens inverse est un chemin fermé sur lequel l'intégrale est nulle.

Pour  $h_1 \in \mathbb{R}$  assez petit et  $x \in \Omega$ , on a :

$$f(x_1 + h_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3) = \int_{\gamma_{x+h_1e_1}} \langle V \mid ds \rangle - \int_{\gamma_x} \langle V \mid ds \rangle = \int_{x_1}^{x_1+h_1} V_1(t, x_2, x_3) dt.$$

Puisque  $V_1$  est continue, ceci montre que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x_1$  égale à  $V_1$ . Il reste à appliquer le corollaire 6.19.  $\square$

Une fonction  $f$  telle que  $V = \text{grad } f$  est appelée un *potentiel* du champ  $V$ . Si un champ admet un potentiel, on dit qu'il dérive d'un potentiel.

**Théorème 14.21.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  dans lequel toute courbe  $\mathcal{C}^1$   $\mathcal{M}$  est le bord d'une surface  $\mathcal{C}^1$  orientable et  $V$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ . Alors l'équivalence suivante a lieu :*

$$V \text{ dérive d'un potentiel} \iff \text{rot } V = 0.$$

*Preuve.*  $\implies$  : Puisque  $V$  est  $\mathcal{C}^1$ , tout potentiel  $f$  de  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Par suite,  $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$  si bien que  $\partial_i V_j = \partial_j V_i$  et  $\text{rot } V = 0$ .

$\impliedby$  : Il suffit de vérifier (ii) de la proposition 14.20. Pour toute courbe fermée  $\gamma$  on sait qu'il existe  $\Sigma$  telle que  $\gamma = \partial \Sigma$  ; la formule de Stokes (14.5) donne

$$\int_{\gamma} \langle V \mid ds \rangle = \iint_{\Sigma} \langle \text{rot } V \mid d\sigma \rangle = 0.$$

$\square$

**Exemple 14.22.** L'espace  $\mathbb{R}^3$  et plus généralement tout ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^3$  satisfait l'hypothèse du théorème.



**Exercice 14.1.** Calculer le flux du champ de vecteurs  $V$  dans  $\mathbb{R}^3$  donné par

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4x_1x_3 \\ -x_2^2 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}$$

à travers le bord du cube  $[0, 1]^3$  orienté par la normale extérieure.

**Exercice 14.2.** On donne  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$\varphi(u, v) = ((R + a \cos u) \cos v, (R + a \cos u) \sin v, a \sin u), \quad 0 < a < R.$$

- Représenter l'image  $T$  de  $\varphi$  et montrer que  $T$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
- Déterminer le plan tangent à  $T$  au point  $\varphi(\pi/4, \pi/3)$ .
- Donner un sous-ensemble rectangulaire  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  minimal tel que  $\varphi(A) = T$ .
- Calculer l'aire de  $T$ .

**Exercice 14.3.** Calculer le flux du champ de vecteurs  $V(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$  à travers le bord du domaine

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

- directement,
- avec la formule de Gauss.

Représenter graphiquement les données.

**Exercice 14.4.** Pour des champs de vecteurs  $U, V$  et une fonction  $f$  différentiables, vérifier les formules :

$$\operatorname{div}(fV) = f \operatorname{div} V + \langle \operatorname{grad} f \mid V \rangle, \quad \operatorname{rot}(fV) = \operatorname{grad} f \wedge V + f \operatorname{rot} V,$$

$$\operatorname{div}(U \wedge V) = \langle \operatorname{rot} U \mid V \rangle - \langle U \mid \operatorname{rot} V \rangle.$$

**Exercice 14.5.** Soit  $V$  un champ de vecteurs continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que  $V$  est invariant par rotation, i.e.,  $V(r(x)) = V(x)$  pour toute rotation  $r$  de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer  $\operatorname{rot} V(0) = 0$ .

**Exercice 14.6.** Pour  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  dans un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , vérifier

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \langle \operatorname{grad} f \mid \operatorname{grad} g \rangle,$$

où  $\Delta g := \operatorname{div} \operatorname{grad} g$ . En déduire la formule de Green

$$\iiint_K (f \Delta g - g \Delta f) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial K} (f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu}) \|\mathrm{d}\sigma\|,$$

où  $K$  est un domaine de  $\Omega$  sur lequel la formule de Gauss s'applique.

## 15. Formes différentielles de degré 1

**Définition 15.1.** Une *forme différentielle de degré 1* sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est une application continue  $\omega : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . De manière équivalente, c'est la donnée en chaque point de  $\Omega$  d'une forme linéaire qui varie continûment.

Notation :  $\Lambda^1(\Omega)$ . L'espace des formes différentielles de degré 1 est un espace vectoriel ; c'est le dual de l'espace des champs de vecteurs continus sur  $\Omega$ .



**Exemple 15.2.** Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $df$  est une forme différentielle de degré 1. Les formes différentielles de degré 1 du type  $df$  sont appelées *formes différentielles exactes*.

En particulier,  $dx_1, \dots, dx_n$  sont des formes différentielles et on a

$$dx_j(e_k) = \delta_{jk}.$$

**Remarque 15.3.** Pour toute forme différentielle  $\omega$  sur  $\Omega$ , il existe  $n$  fonctions continues  $a_1, \dots, a_n$  sur  $\Omega$  telles que  $\omega = \sum_1^n a_j dx_j$ . Ces coefficients sont uniques. Ainsi,  $\Lambda^1(\Omega)$  est un module libre de rang  $n$  sur  $\mathcal{C}^0(\Omega)$ .

**Remarque 15.4.** Soit  $X$  un champ de vecteurs continu sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Alors  $X$  définit une forme différentielle  $\omega$  de degré 1 par

$$\omega_x(\xi) = \langle X(x) | \xi \rangle, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Définition 15.5.** Soit  $f : \Xi \rightarrow \Omega$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$  dans un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $\omega \in \Lambda^1(\Omega)$ . L'*image réciproque de  $\omega$  par  $f$*  est la forme différentielle  $f^*\omega$  définie par

$$f^*\omega_x(v) := \omega_{f(x)}(df_x v), \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

**Exemple 15.6.** Si  $\omega = dg$ , pour  $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  alors  $f^*(\omega) = d(g \circ f)$ . Avec la convention  $f^*g := g \circ f$ , on a donc

$$f^*(dg) = d(f^*g), \quad \text{pour } g \in \mathcal{C}^1(\Omega).$$

**Remarque 15.7.** Il n'est pas possible de définir, sur le même schéma, l'image directe d'un champ de vecteurs  $V$  par une application différentiable  $f$  non bijective. En effet, pour que la formule

$$f_*V(f(x)) = df_x(V(x))$$

ait un sens, il faut que  $f$  soit bijective.

**Proposition 15.8.** Pour une application  $f : \Xi \rightarrow \Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$  dans un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , des formes différentielles  $\alpha, \beta, \omega \in \Lambda^1(\Omega)$ , et des fonction  $b_j, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned} f^*(\alpha + \beta) &= f^*(\alpha) + f^*(\beta), \\ f^*(g\omega) &= f^*g \cdot f^*\omega, \\ f^*(dg) &= d(f^*g), \\ f^*dy_j &= df_j, \\ f^*\left(\sum b_j dy_j\right) &= \sum f^*b_j df_j, \\ (f \circ g)^* &= g^* \circ f^*. \end{aligned}$$

**Définition 15.9.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée rectifiable et  $\omega : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  une forme différentielle de degré 1 continue. Alors, pour  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ , les sommes

$$\sum_0^{N-1} \omega_{\gamma(t_j)}(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)),$$

tendent vers une limite quand la maille  $\max(t_{j+1} - t_j)$  du partage tend vers 0. C'est l'intégrale de  $\omega$  sur  $\gamma$  désignée par  $\int_{\gamma} \omega$ . Cette intégrale ne dépend pas du paramétrage, mais seulement de l'orientation, i.e., si  $\delta := \gamma \circ \varphi$ , avec  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  continue bijective croissante, alors  $\int_{\delta} \omega = \int_{\gamma} \omega$ .

Cette remarque permet de donner un sens à l'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 continue sur une partie compacte d'une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^n$  orientée.

**Proposition 15.10.** Soit  $f : \Xi \rightarrow \Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$  dans un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Xi$  rectifiable, et  $\omega \in \Lambda^1(\Omega)$ . Alors

$$\int_{\gamma} f^* \omega = \int_{f \circ \gamma} \omega.$$

**Proposition 15.11.** Soit  $\omega$  une forme différentielle de degré un sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  une courbe paramétrée  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Alors

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{[a,b]} \gamma^* \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(x)} \gamma'(x) dx.$$

Il faut évidemment d'abord partager  $[0, 1]$  en morceaux sur lesquels  $\gamma$  est  $\mathcal{C}^1$ .

**Remarque 15.12.** La définition de l'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 correspond bien à la Notation 13.13

**Exemple 15.13.** Si  $\omega = u dy$  est une 1-forme sur  $\mathbb{R}$  et si  $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\varphi} u(y) dy = \int_c^d u(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$



**Exercice 15.1.** Calculer l'intégrale de la forme différentielle  $(y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$  sur le cercle d'équations  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , parcouru une fois dans le sens direct.

**Exercice 15.2.** Calculer l'intégrale de la forme différentielle  $x^2 dx + y dy$  sur le bord du domaine  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$ , orienté par la normale extérieure.

**Exercice 15.3.** Pour  $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  donnée par  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , calculer  $f^*\omega$ , où

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

**Exercice 15.4.** Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée rectifiable dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Montrer la relation

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

où  $n(\gamma, 0)$  est l'indice de  $\gamma$  par rapport à l'origine, *i.e.*, le nombre de tours que  $\gamma$  fait autour de l'origine.

**Exercice 15.5.** Dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ , on donne la forme différentielle

$$\omega := \frac{2(x^2 - y^2 - 1) dy - 4xy dx}{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 2y^2}.$$

Observer que  $\omega$  peut s'écrire  $\frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}$  pour deux fonctions  $f$  et  $g$  convenables.

Intégrer  $\omega$  sur un petit cercle centré en  $(\pm 1, 0)$  orienté positivement. En déduire l'intégrale de  $\omega$  sur  $\gamma$  définie par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

## 16. Formes différentielles de degré supérieur

Une forme différentielle de degré  $p$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est une application continue de  $\Omega$  dans l'espace vectoriel normé  $\mathcal{A}^p(\mathbb{R}^n)$  des formes multilinéaires alternées sur  $\mathbb{R}^n$ . Puisque cet espace admet une base formée des  $n!/p!(n-p)!$  éléments

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, \text{ pour } i_1 < \cdots < i_p \in [1, n].$$

nous adopterons la définition suivante.

**Définition 16.1.** Une *forme différentielle de degré*  $p \geq 1$  sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  est une expression du type

$$\sum a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

où la somme porte sur tous les multi-indices  $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$  tels que  $1 \leq i_k \leq n$  et les coefficients  $a_{i_1, \dots, i_p}$  sont des fonctions continues sur  $\Omega$ . L'espace des formes différentielles de degré  $p$  sur  $\Omega$  est désigné par

$$\Lambda^p(\Omega).$$

On complète la définition en posant  $\Lambda^0(\Omega) = \mathcal{C}^0(\Omega)$  et  $\Lambda^p(\Omega) = 0$  si  $p > n$ .

Le produit extérieur  $\wedge$  est anti-commutatif, c'est-à-dire

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

En conséquence,

$$dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{\sigma(p)}} = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

où  $\text{sgn}(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ .

**Définition 16.2.** Le produit extérieur de deux formes  $\alpha = \sum a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \in \Lambda^p(\Omega)$  et  $\beta = \sum b_{j_1, \dots, j_q} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \in \Lambda^q(\Omega)$  est la forme de degré  $p + q$

$$\alpha \wedge \beta := \sum a_{i_1, \dots, i_p} b_{j_1, \dots, j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \\ (\alpha + \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma. \end{aligned}$$

**Exemple 16.3.** Si  $\alpha = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$  et  $\beta = \sum_{k=1}^n b_k dx_k$ , alors

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j) dx_j \wedge dx_k.$$

Quand  $n = 3$ , on reconnaît les coefficients du produit vectoriel des deux champs de vecteurs associés à  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Définition 16.4.** La différentielle extérieure de la forme  $\omega = \sum a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  de degré  $p$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  est la forme  $d\omega$  de degré  $p + 1$  définie par

$$d\omega = \sum da_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

où cette dernière somme porte sur  $j = 1, \dots, n$  et  $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$ .

**Exemples 16.5.**

1)  $d(dx_j \wedge dx_k) = 0$ .

2)  $d(P dx + Q dy) = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$ .

3)  $d(a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2) = \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ .

**Proposition 16.6.** Pour  $\alpha \in \Lambda^p(\Omega)$  et  $\beta \in \Lambda^q(\Omega)$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , les relations suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \\ d(d\alpha) &= 0, \text{ si } \alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^2. \end{aligned}$$

**Définition 16.7.** Soit  $f : \Xi \rightarrow \Omega$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$  dans un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $\omega = \sum b_{j_1, \dots, j_p} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_p} \in \Lambda^p(\Omega)$ . L'image réciproque de  $\omega$  par  $f$  est la forme différentielle  $f^*\omega$  de degré  $p$  sur  $\Xi$  définie par

$$f^*\omega := \sum (b_{j_1, \dots, j_p} \circ f) df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_p}.$$

**Proposition 16.8.** Pour une application  $f : \Xi \rightarrow \Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$  dans un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , des formes différentielles  $\alpha \in \Lambda^p(\Omega)$ ,  $\beta \in \Lambda^q(\Omega)$ , on a :

$$f^*(\alpha + \beta) = f^*(\alpha) + f^*(\beta),$$

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

$$df^*\alpha = f^*d\alpha,$$

$$f^*(dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_p}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \frac{D(f_{j_1}, \dots, f_{j_p})}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*,$$

où  $\frac{D(f_{j_1}, \dots, f_{j_p})}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}$  désigne le mineur de la matrice jacobienne de  $df$  dont les lignes et colonnes sont indiquées.

**Définition 16.9.** Une forme différentielle  $\omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est *fermée* si  $d\omega = 0$ . Une forme différentielle  $\omega$  continue est *exacte* s'il existe une forme différentielle  $\alpha$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $d\alpha = \omega$ .

**Exemples 16.10.**

- 1) Toute forme différentielle de classe  $\mathcal{C}^1$  exacte est fermée.
- 2) La forme  $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est fermée mais non exacte.

**Proposition 16.11.** LEMME DE POINCARÉ. Toute forme différentielle fermée dans un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$  est exacte. Par suite, toute forme différentielle fermée dans un ouvert quelconque est localement exacte.



**Exercice 16.1.** Pour  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a

$$f dz = u dx - v dy + i(v dx + u dy) \text{ où } u = \operatorname{Re} f \text{ et } v = \operatorname{Im} f.$$

Vérifier l'affirmation :  $f$  holomorphe  $\iff \operatorname{Re} f dz$  et  $\operatorname{Im} f dz$  fermées.

**Exercice 16.2.** On suppose que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont  $n$  formes différentielles de degré 1 sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  linéairement indépendantes en chaque point. Vérifier l'assertion suivante pour une forme différentielle  $\omega$  de degré  $p < n$  :

$$\omega \wedge \alpha_j = 0, \text{ pour } j = 1, \dots, n \implies \omega = 0.$$

**Exercice 16.3.** Soit  $\alpha$  une forme différentielle de degré 1 qui ne s'annule en aucun point d'un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Montrer que pour toute forme  $\omega$  de degré  $p < n$  sur  $\Omega$ , on a :

$$\omega \wedge \alpha = 0 \iff \omega \text{ est localement divisible par } \alpha$$

c'est-à-dire qu'au voisinage de chaque point de  $\Omega$  il existe une forme  $\beta$  de degré  $p - 1$  telle que  $\omega = \beta \wedge \alpha$ , dans ce voisinage.

INDICATION. Compléter  $\alpha =: \alpha_1$  en un système de  $n$  formes de degré 1 linéairement indépendantes  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  et décomposer  $\omega$  en somme  $\sum a_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_p}$ .

**Exercice 16.4. ETOILE DE HODGE.** On définit une opération  $*$  :  $\Lambda^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{n-p}(\mathbb{R}^n)$  par

$$* dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-p}}, \text{ avec } i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_{n-p},$$

où  $\sigma$  est la permutation  $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p})$  de  $(1, \dots, n)$ . L'opération  $*$  est étendue par linéarité. Calculer

- a)  $*(a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2)$  dans  $\mathbb{R}^3$  ;    b)  $d * d$  sur  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)$  ;  
 c)  $d*$  sur  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  ;    d)  $*d$  sur  $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ .

## 17. Formule de Stokes générale

**Définition 17.1.** Soit  $\alpha = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$  une forme différentielle de degré  $p$  continue sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$  et  $K$  un compact de  $\Omega$ . L'intégrale de  $\alpha$  sur  $K$  est par définition

$$\int_K \alpha = \int \dots \int_K a dx_1 \dots dx_p.$$

La formule du changement de variables dans les intégrales multiples donne la relation suivante :

$$\int_{f^{-1}(K)} f^* \alpha = \int_K \alpha$$

si  $f$  est un difféomorphisme de  $\Xi$  sur  $\Omega$  qui conserve l'orientation, *i.e.*, à jacobien positif. Quand  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une paramétrisation locale d'une sous-variété  $X$  de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$  et quand  $\omega$  est une forme différentielle de degré  $p$  continue sur  $\phi(U)$ , on définit l'intégrale de  $\omega$  sur  $\phi(K)$ , où  $K$  est un compact de  $U$ , par

$$\int_{\phi(K)} \omega := \int_K \phi^* \omega.$$

Ce qui précède montre que cette intégrale ne dépend pas de la paramétrisation de  $X$  pour autant que l'orientation soit conservée. On peut donc définir l'intégrale d'une forme différentielle  $\omega$  de degré  $p$  sur un compact d'une sous-variété orientée  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  comme la somme des intégrales de  $\omega$  sur des morceaux disjoints de  $X$  paramétrés qui respectent l'orientation.

**Lemme 17.2.** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $U_1, \dots, U_N$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $K \subset \cup_1^N U_j$ . Alors il existe des fonctions  $g_1, \dots, g_N$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  telles que

- (i)  $0 \leq g_j \leq 1, j = 1, \dots, N$  ;
- (ii)  $g_j$  est nulle sur  $\mathbb{R}^n \setminus U_j$  ;
- (iii)  $\sum_1^N g_j = 1$  sur  $K$ .

On dit que la famille de fonctions  $g_1, \dots, g_N$  est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $U_1, \dots, U_N$  de  $K$ .

*Preuve.* On peut supposer que les ouverts sont des boules euclidiennes puisque chaque point de  $K$  est le centre d'une boule contenue dans l'un des  $U_j$ .

Pour  $B := B(0, 1)$  boule unité, on construit une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $f > 0$  dans  $B$  et  $f = 0$  hors de  $B$ . On en déduit, pour  $1 \leq j \leq N$  des fonctions  $f_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$f_j > 0 \text{ dans } U_j \text{ et } f_j = 0 \text{ hors de } U_j.$$

Une fonction  $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$f_0 \geq 0, f_0 > 0 \text{ hors de } \cup U_j \text{ et } f_0 = 0 \text{ sur } K$$

est construite de la manière suivante : on prend des boules  $U'_j \subset U_j$  qui recouvrent aussi  $K$  et  $h_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que  $h_j \geq 0$ ,  $h_j = 0$  sur  $U'_j$  et  $h_j > 0$  hors de  $U_j$  et on pose  $f_0 := h_1 \cdots h_N$ .

On peut aussi construire  $f_0$  en approchant la fonction qui vaut 0 sur  $\cup U'_j$  et 1 hors de  $\cup U'_j$  par convolution.

Pour conclure, il reste à définir

$$g_j := \frac{f_j}{\sum_0^N f_k}.$$

En effet, puisque le dénominateur est partout positif, le quotient est  $\mathcal{C}^\infty$ .

□

**Théorème 17.3.** FORMULE DE STOKES GÉNÉRALE. *Soit  $X$  une sous-variété orientée de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  un compact de  $X$  dont le bord est une sous-variété de dimension  $p - 1$  tel que  $K$  est situé d'un seul côté de  $\partial K$ . On oriente  $\partial K$  par la normale extérieure. Alors pour toute forme différentielle de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de  $K$ , on a :*

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega.$$

**Remarque 17.4.** Un compact  $K$  avec les propriétés de l'énoncé ci-dessus est une *sous-variété à bord de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$* .

*Preuve.* En chaque point  $x$  de  $K$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et  $\phi : ]-1, 1[^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui paramétrise  $X \cap U$  (cf. Théorème 9.7). Sans restreindre la généralité, on peut supposer que si  $x \in \partial K$ , l'ensemble  $\phi^{-1}(\partial K \cap U)$  est égal à  $\{0\} \times ]-1, 1[^{p-1}$ .

Puisque  $K$  est compact, il existe un nombre fini de telles paramétrisations  $\phi_1, \dots, \phi_N$  de sorte que  $K \subseteq \cup_1^N \phi_i(]-1, 1[^p)$ . On prend une partition de l'unité  $g_1, \dots, g_N$  subordonnée au recouvrement  $\phi_1(]-1, 1[^p), \dots, \phi_N(]-1, 1[^p)$  de  $K$ . Les relations suivantes ont lieu sur  $K$  :

$$\sum_1^N g_i \omega = \omega, \quad \sum_1^N d(g_i \omega) = \sum_1^N dg_i \wedge \omega + \sum_1^N g_i d\omega = d\left(\sum_1^N g_i\right) \wedge \omega + d\omega = d\omega.$$

Il suffit donc de démontrer le théorème pour  $g_i \omega$ .

Par construction et par les propriétés de l'image réciproque :

$$\int_{\partial K} g_i \omega = \int_{\phi_i^{-1}(\partial K)} \phi_i^*(g_i \omega), \quad \int_K d(g_i \omega) = \int_{\phi_i^{-1}(K)} \phi_i^* d g_i \omega = \int_{\phi_i^{-1}(K)} d \phi_i^*(g_i \omega).$$

Il reste donc à vérifier la formule de Stokes pour une  $(p-1)$ -forme  $\alpha$  dans  $] -1, 1[^p$  qui est nulle en dehors de  $[-r, r]^p$  et pour un compact qui est soit

- a)  $L = [-r, r]^p$  entier (cas d'un point intérieur),
- b)  $L = [0, r] \times [-r, r]^{p-1}$  (cas d'un point du bord).

Puisque la forme  $\alpha$  s'écrit

$$(17.1) \quad \alpha = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_p \text{ avec } a_j \in \mathcal{C}^1(] -1, 1[^p),$$

où  $\widehat{dx_k}$  signifie qu'on a omis  $dx_k$ , il vient

$$d\alpha = \left( \sum_1^p \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p.$$

Dans le cas a), on a trivialement  $\int_L d\alpha = 0$  en intégrant  $\frac{\partial a_j}{\partial x_j}$  d'abord par rapport  $x_j$ , puisque  $\alpha$  est nulle hors de  $L$ .

Dans le cas b), en intégrant d'abord par rapport à  $x_1$ , on a

$$\int_L d(a_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p) = - \int_{[-1, 1]^{p-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_p) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p = \int_{\partial L} a_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

puisque le vecteur normal unitaire sur la base de  $L$  est ici  $-e_1$  ce qui met l'orientation opposée à l'orientation canonique sur cette partie de  $\partial L$ .

Les autres termes de (14.5) se traitent comme en a).

Dans les deux cas, on a montré  $\int_L d\alpha = \int_{\partial L} \alpha$ .

□

### Exemples 17.5.

- 1) La formule de Green-Riemann s'obtient en prenant  $X = \mathbb{R}^2$  et  $\omega = P dx + Q dy$ .
- 2) Le théorème de Gauss est le cas particulier où  $X = \mathbb{R}^3$  et  $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ .
- 3) Pour retrouver la formule de Stokes, prendre  $\omega = V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + V_3 dx_3$ .



**Exercice 17.1.** Comparer le théorème de Cauchy et la formule de Stokes dans l'esprit de l'exercice 16.1.



**Exercice 17.2.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que 0 est une valeur régulière de  $f$ . Montrer que pour  $K$  compact contenu dans la surface  $f^{-1}(0)$ , on a

$$\int_K \frac{*df}{\|\text{grad } f\|} = \pm \text{aire}(K).$$

**Exercice 17.3.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère la forme différentielle

$$\omega := x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy.$$

Pour  $K$  compact de  $\mathbb{R}^3$  à bord régulier orienté par la normale extérieure, vérifier la formule

$$\text{vol } K = \frac{1}{3} \int_{\partial K} \omega.$$

Généraliser à un domaine de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 17.4.** Soit  $\omega$  la forme différentielle  $(x \, dy - y \, dx)/(x^2 + y^2)$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0) \times \mathbb{R}\}$ .

a) Calculer  $\int_\gamma \omega$  où  $\gamma$  paramétrise le bord du ruban de Möbius

$$\gamma(t) = ((2 + \cos t) \cos 2t, (2 + \cos t) \sin 2t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Constater que la formule de Stokes ne s'applique pas et dire pourquoi.

**Exercice 17.5.** Soit  $X$  une sous-variété compacte orientée de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\omega$  est une forme différentielle de degré  $p - 1$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , montrer  $\int_X d\omega = 0$ .

## 18. Équations différentielles, généralités

Une *équation différentielle du premier ordre* est une équation du type suivant :

$$F(t, x, x') = 0,$$

où  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ .

Un *système de  $n$  équations différentielles du premier ordre* est un système d'équations du type suivant :

$$F_1(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) = 0,$$

$$F_2(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) = 0,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$F_n(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) = 0,$$

où  $F_1, \dots, F_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions définies dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Une *équation différentielle d'ordre  $m$*  est une équation du type

$$F(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0,$$

avec  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  définie dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+1}$ .

**Lemme 18.1.** *Tout système de  $n$  équations différentielles d'ordre  $m$  se ramène (de manière non unique) à un système de  $mn$  équations d'ordre 1.*

**Exemples 18.2.**

- 1) L'équation  $a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0$  se ramène au système  $y'_0 = y_1$ ,  $a_2y'_1 + a_1y_1 + a_0y_0 = 0$ .  
 2) L'équation  $x'' + \omega^2x = 0$  se ramène au système  $z'_0 = -\omega z_1$ ,  $z'_1 = \omega z_0$ .

Un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

où  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , est dit *normal*.

Il n'est pas toujours possible de ramener un système à un système normal. Néanmoins, la plupart des résultats présentés plus loin concernent les systèmes normaux.

**Définition 18.3.** Soit  $E$  un espace normé réel ou complexe de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$  et  $f : U \rightarrow E$  une application continue. Une *solution* de l'équation différentielle vectorielle (d'ordre 1)

$$(18.1) \quad x' = f(t, x),$$

est une application  $\varphi : I \rightarrow E$  différentiable, où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point, telle que

$$\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U \text{ et } \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

La *solution générale* de (18.1) est une famille qui contient toutes les solutions de (18.1). Une solution  $\varphi : I \rightarrow E$  est *maximale* s'il n'existe pas d'intervalle  $J$  contenant  $I$  et une solution  $\psi : J \rightarrow E$  telle que  $\psi|_I = \varphi$ . De manière équivalente :

$$\psi : J \rightarrow E \text{ solution, } I \cap J \neq \emptyset \text{ et } \psi|_{I \cap J} = \varphi|_{I \cap J} \implies J \subseteq I.$$

Un *problème de Cauchy* est la donnée d'une équation différentielle vectorielle  $x' = f(t, x)$  et d'un point  $(t_0, x_0) \in U$  (conditions initiales). Une solution de ce problème est une application  $\varphi : I \rightarrow E$  différentiable telle que

$$t_0 \in I, \varphi(t_0) = x_0, \forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U \text{ et } \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

**Exemples 18.4.**

- 1)  $n = m = 1$ . Quadrature. L'équation  $x' = f(t)$ , où  $f$  est continue a pour solution générale  $\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s) ds$ .  
 2)  $n = m = 1$ . Équation à variables séparables. L'équation

$$x' = \frac{f(t)}{g(x)}, \quad \text{avec } f \text{ et } g \text{ continues, } g \text{ ne s'annulant pas,}$$

a pour solution générale

$$\varphi(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(\varphi(t_0))), \quad \text{où } F \text{ et } G \text{ sont des primitives de } f \text{ et } g.$$

3)  $n = m = 1$ . L'équation  $y' = 2xy^2$  (ici  $y$  représente la fonction inconnue et  $x$  la variable) a pour solution générale

$$\varphi(x) = \frac{1}{C - x^2}.$$

4)  $n = m = 1$ . L'équation  $y' = 3y^{2/3}$  (la variable n'apparaît pas) a pour solutions

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_0, \\ (x - x_0)^3 & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$$

5)  $m = n = 1$ . Équation linéaire du premier ordre. Le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} x' + a(t)x &= b(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

où  $a$  et  $b$  sont continues sur un intervalle  $I$ , a pour solution

$$\varphi(t) = e^{-A(t)} \left( e^{A(t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds \right), \quad t \in I.$$

6)  $m = 1, n = 2$ . Le système linéaire à coefficients constants

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1, \\ x_2' &= \lambda_2 x_1, \end{aligned}$$

a pour solution générale

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(t_0)e^{\lambda_2(t-t_0)}.$$

7)  $m = 1, n = 2$ . Le système linéaire à coefficients constants

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

a pour solution générale

$$\varphi_1(t) = C_1 e^t, \quad \varphi_2(t) = (C_1 t + C_2) e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Définition 18.5.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs continu sur un ouvert  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . L'équation différentielle vectorielle d'ordre 1 dans laquelle le second membre ne dépend pas explicitement du temps

$$(18.2) \quad x' = f(x)$$

est appelée *équation différentielle autonome*. On vérifie immédiatement que si  $\varphi$  est une solution de (18.2) alors  $\psi$  définie par  $\psi(t) = \varphi(t + a)$ , pour  $a \in \mathbb{R}$ , est aussi solution de (18.2). Ainsi l'évolution des solutions d'une équation autonome ne dépend pas de l'instant initial  $t_0$  mais seulement de la position initiale  $x_0$ . Les ensembles  $\{\varphi(t) \mid t \in I\}$ , pour  $\varphi$  solution maximale de (18.2), sont appelés les *orbites* du champ de vecteur  $f$ . Ce sont des courbes tangentes au champ en chaque point.

**Proposition 18.6.** SYSTÈME LINÉAIRE  $2 \times 2$  D'ORDRE 1 À COEFFICIENTS CONSTANTS. Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  une application linéaire,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $A$ . Alors l'équation différentielle autonome

$$x' = Ax$$

se ramène par changement de base à l'un des quatre systèmes suivants.

1) Si les valeurs propres de  $A$  sont réelles distinctes :

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2.$$

2) Si les valeurs propres de  $A$  sont réelles confondues et  $A$  admet deux vecteurs propres linéairement indépendants :

$$y_1' = \lambda y_1, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

3) Si les valeurs propres de  $A$  sont réelles confondues et  $A$  n'admet qu'un vecteur propre :

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

4) Si les valeurs propres de  $A$  sont complexes conjuguées (non réelles)  $\mu \pm i\alpha$  :

$$y_1' = \mu y_1 - \alpha y_2, \quad y_2' = \alpha y_1 + \mu y_2.$$

Dans ce dernier cas, la solution générale est

$$y_1(t) = \rho_0 e^{\mu t} \cos(\alpha t + \theta_0), \quad y_2(t) = \rho_0 e^{\mu t} \sin(\alpha t + \theta_0).$$

*Preuve.* 1) Il existe une base de vecteurs propres pour  $A$ . Si  $y_1$  et  $y_2$  sont les composantes de  $y \in \mathbb{R}^2$  dans cette base, l'équation  $x' = Ax$  se réduit à la forme indiquée.

2) Idem.

3) Soit  $v_1$  un vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda$ . Si  $v_2$  est linéairement indépendant de  $v_1$ , on a  $Av_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ . Donc la matrice de  $A$  dans la base  $\{v_1, v_2\}$  est

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,  $\mu_2$  est aussi valeur propre et donc  $\mu_2 = \lambda$ . Puisque  $v_2$  n'est pas vecteur propre, on a  $\mu_1 \neq 0$ . Pour simplifier encore, on remplace  $v_2$  par  $w$  tel que  $(A - \lambda \mathbf{1})w = v_1$ .

Par exemple  $w := v_1 + \frac{1}{\mu_1} v_2$ . Dans la base  $\{v_1, w\}$ , la matrice de  $A$  est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4) Soit  $v$  un vecteur propre complexe pour la valeur propre  $\lambda =: \mu - i\alpha$ . Puisque  $A$  est réel, on a  $A\bar{v} = (\mu + i\alpha)\bar{v}$ . Dans la base réelle  $\left\{ \frac{v + \bar{v}}{2}, \frac{v - \bar{v}}{2i} \right\}$ , la matrice de  $A$  est

$$\begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système obtenu

$$y_1' = \mu y_1 - \alpha y_2, \quad y_2' = \alpha y_1 + \mu y_2,$$

on passe en coordonnées polaires :

$$y_1 = \rho \cos \theta, \quad y_2 = \rho \sin \theta.$$

Puisque  $\rho^2 = y_1^2 + y_2^2$ , en dérivant, on obtient

$$2\rho\rho' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2' = 2\mu(y_1^2 + y_2^2) = 2\mu\rho^2,$$

donc  $\rho' = \mu\rho$  si bien que  $\rho(t) = \rho_0 e^{\mu t}$ . En remplaçant dans  $y_1' = \mu y_1 - \alpha y_2$ , il vient

$$(\rho \cos \theta)' = \rho' \cos \theta - \rho(\sin \theta)\theta' = \mu\rho \cos \theta - \rho(\sin \theta)\theta' = \mu\rho \cos \theta - \alpha\rho \sin \theta.$$

Après simplification :  $\theta' = \alpha$  et donc  $\theta(t) = \alpha t + \theta_0$ .

□



**Exercice 18.1.** Résoudre l'équation différentielle

$$x' = x^2 \cos t$$

et représenter la famille de ses solutions.

**Exercice 18.2.** Chercher les solutions de l'équation différentielle

$$x't^3 - 2x = 0.$$

Vérifier

a) qu'aucune solution ne satisfait la condition initiale  $x(0) = x_0 \neq 0$ ,

b) qu'une infinité de solutions maximales satisfont la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  quand  $t_0 \neq 0$ .

**Exercice 18.3.** ÉQUATIONS HOMOGENÈS DU PREMIER ORDRE.

Ce sont des équations du type

$$x' = f(x/t), \text{ avec } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue.}$$

Vérifier que la fonction  $v$  définie par  $v(t) := x(t)/t$  satisfait une équation différentielle à variables séparables.

Exemple : Résoudre  $x' = \frac{2x - t}{2t - x}$ .

**Exercice 18.4.** Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

**Exercice 18.5.** Décrire l'allure des solutions des systèmes

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 4x - 5y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = -x + y \end{cases}.$$

**Exercice 18.6.** On suppose connue une solution  $x_1$  de l'équation différentielle

$$(R) \quad x' = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$$

de RICCATI, où  $a, b, c$  sont des fonctions continues. Donner l'équation différentielle pour  $v$  telle que  $x_1 + 1/v$  soit solution de (R).

Exemple :  $x' = 1 + t^2 - 2tx + x^2$ , avec  $x_1(t) = t$ .

### 19. Existence et unicité locales

**Définition 19.1.** Soit  $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application, où  $B(x_0, b)$  désigne la boule euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est *lipschitzienne de rapport  $k \geq 0$  par rapport à la deuxième variable* si

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a] \text{ et } x, y \in \overline{B(x_0, b)}.$$

Une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , est *localement lipschitzienne* si chaque point de  $U$  a un voisinage dans lequel  $f$  est lipschitzienne.

**Exemple 19.2.** Une application continue, continûment différentiable en la deuxième variable est localement lipschitzienne.

**Théorème 19.3. PICARD-LINDELÖF** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $Z := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)}$  un "cylindre" contenu dans  $U$ . Si  $f$  est lipschitzienne dans  $Z$  alors le problème de Cauchy

$$(19.1) \quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

a une solution unique dans  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , où  $\alpha = \min(a, b/M)$  et  $M := \sup_Z \|f\|$ .

*Preuve.* On pourrait appliquer le théorème du point fixe mais on va procéder directement. Pour voir l'existence, il suffit de trouver une fonction continue  $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que, pour  $|t - t_0| \leq \alpha$  on ait :

$$(19.2) \quad (t, \varphi(t)) \in U, \text{ et } \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

En effet, une primitive d'une fonction continue est de classe  $C^1$  et le théorème fondamental implique, en dérivant (19.2)

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

On procède par approximations successives :

$$\varphi_0(t) := x_0, \dots, \varphi_{j+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_j(s)) ds,$$

pour autant que cette définition ait un sens, *i.e.*,  $f(s, \varphi_j(s)) \in Z$ , si  $|s - t_0| \leq \alpha$ . Vérifions-le par récurrence : c'est vrai pour  $j = 0$  et si c'est vrai pour  $j$ , alors

$$\|\varphi_{j+1}(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_j(s)) ds \right\| \leq M\alpha \leq b.$$

Par récurrence encore, on montre l'inégalité suivante :

$$(19.3) \quad \|\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)\| \leq \frac{Mk^j |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}, \quad |t - t_0| \leq \alpha.$$

En effet, le cas  $j = 0$  est immédiat et on passe de  $j - 1$  à  $j$  comme suit :

$$\begin{aligned} \|\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_j(s)) - f(s, \varphi_{j-1}(s)) \, ds \right\| \leq \int_{t_0}^t k \|\varphi_j(s) - \varphi_{j-1}(s)\| \, ds \\ &\leq \frac{Mk^j}{j!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^j \, ds = \frac{Mk^j}{(j+1)!} (t - t_0)^{j+1}. \end{aligned}$$

De l'inégalité (19.3), il découle que la série

$$\varphi_0 + \sum_0^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)$$

converge uniformément sur  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  vers une fonction continue  $\varphi$ . Ainsi  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  uniformément quand  $j \rightarrow \infty$ . Puisque  $f$  est continue, on a encore

$$f(s, \varphi_j(s)) \rightarrow f(s, \varphi(s)) \text{ uniformément pour } s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Par suite, pour  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ,

$$\varphi_{j+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_j(s)) \, ds \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds, \text{ quand } j \rightarrow \infty.$$

Puisque  $\varphi_{j+1}$  tend aussi vers  $\varphi$ , on a montré (19.2).

Pour voir l'unicité, soit  $\psi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution de (19.1). Alors  $\psi$  prend ses valeurs dans  $\overline{B(x_0, b)}$  d'après l'inégalité des accroissements finis. En répétant la preuve de (19.3), on montre l'inégalité

$$\|\varphi_{j+1}(t) - \psi(t)\| \leq \frac{Mk^j |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!}, \quad |t - t_0| \leq \alpha.$$

On en déduit  $\psi = \varphi$  par passage à la limite. □

**Remarque 19.4.** La preuve du théorème 19.3 donne la précision suivante : si  $r < b$ , alors la solution du problème

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = y, \text{ pour } y \in B(x_0, r),$$

est définie dans  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  avec  $\alpha = \min\{a, (b - r)/M\}$  et elle dépend continûment de  $y$ .

**Remarque 19.5.** Sous l'hypothèse  $f \in \mathcal{C}^p$ , la solution de (19.1) est de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$ . Elle est donc toujours de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Corollaire 19.6.** UNICITÉ GLOBALE. *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors deux solutions de  $x' = f(t, x)$  sur un intervalle qui prennent la même valeur en un point sont égales.*



*Preuve.* Soient  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux solutions de (19.1) où  $I$  est un intervalle qui contient  $t_0$  avec  $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer  $t_0 \neq \sup I$ .

On définit  $\tau$  par

$$\tau := \sup\{t \in I \mid \varphi(s) = \psi(s), \text{ pour } s \in [t_0, t]\}.$$

L'ensemble dont on a pris la borne supérieure est non vide car il contient  $t_0 + \alpha$ , cf. Théorème 19.3. Si  $\tau < \sup I$ , on aura  $\varphi(t) = \psi(t)$  pour  $t \in [t_0, \tau[$  et donc  $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$  par continuité. Comme  $(\tau, \varphi(\tau)) \in U$ , l'unicité locale de la solution du problème

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \varphi(\tau),$$

entraîne  $\varphi = \psi$  au-delà de  $\tau$ , contradiction. On a montré  $\tau = \sup I$ . En raisonnant de la même manière à gauche de  $t_0$ , on obtient  $\varphi = \psi$ .  $\square$

Le résultat d'existence suivant ne demande pas la régularité lipschitzienne du second membre. L'unicité n'est plus garantie.

**Théorème 19.7. PEANO.** *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $(t_0, x_0) \in U$ . Alors le problème*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

*admet une solution locale.*

*Preuve.* La suite des itérés de Picard ne converge pas nécessairement, mais grâce au théorème d'Ascoli-Arzelà (voir [13]), on en peut extraire une sous-suite convergente. Sa limite fournit une solution du problème.  $\square$

**Corollaire 19.8. EXISTENCE DE SOLUTIONS MAXIMALES.** *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue et  $(t_0, x_0) \in U$ . Alors le problème*

$$(19.4) \quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

*admet une solution maximale  $\varphi$ . Elle est définie sur un intervalle ouvert  $] \alpha, \beta[ \subseteq \mathbb{R}$ . De plus, quand  $t \rightarrow \alpha$  ou  $t \rightarrow \beta$ , le point  $(t, \varphi(t))$  "tend vers l'infini" de  $U$ , i.e.,  $(t, \varphi(t))$  sort de tout compact de  $U$ .*

*Preuve.* Dans le cas localement lipschitzien. Soit  $I$  la réunion des intervalles  $I_\tau$  contenant  $x_0$  sur lesquels (19.4) a une solution  $\varphi_\tau$ . Alors  $I$  est un intervalle contenant  $x_0$  et on peut définir une solution  $\varphi$  de (19.4) sur  $I$  en posant

$$\varphi|_{I_\tau} = \varphi_\tau.$$

En effet, d'après le corollaire 19.6, on a  $\varphi_\tau|_{I_\tau \cap I_{\tau'}} = \varphi_{\tau'}|_{I_\tau \cap I_{\tau'}}$ . La solution  $\varphi$  est maximale, car si on pouvait la prolonger à  $I'$ , on aurait  $I' \subseteq I$  par définition de  $I$ .

Vérifions que  $I$  est ouvert en supposant par l'absurde que  $I = ] \alpha, \beta]$ . Par définition d'une solution, le point  $(\beta, \varphi(\beta))$  appartient à  $U$ . On applique le théorème d'existence locale au problème  $x' = f(t, x)$ ,  $x(\beta) = \varphi(\beta)$  et on obtient un prolongement de  $\varphi$  par unicité locale. Contradiction.

Pour montrer la dernière affirmation, soit  $K$  un compact de  $U$  tel que  $(t, \varphi(t)) \in K$ , pour tout  $t \in I = ]\alpha, \beta[$ . Puisque  $\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq \sup_K \|f\| |s - t|$  pour tous  $s, t \in I$ , l'image par  $\varphi$  de toute suite de Cauchy de  $I$  est une suite de Cauchy. Ainsi  $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t)$  existe. La fonction  $\varphi$  se prolonge donc continûment en  $\tilde{\varphi} : ]\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui vérifie (encore par continuité)

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(\beta) + \int_t^\beta f(s, \tilde{\varphi}(s)) ds, \quad t < \beta.$$

Donc  $\varphi$  n'est pas maximale. □



**Exercice 19.1.** Mettre en œuvre la méthode de Picard pour résoudre le problème

$$x' = \frac{1}{\sqrt{t}} + x^2, \quad x(0) = 0.$$

**Exercice 19.2.** On donne une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(t, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 2t & \text{si } 0 < t \text{ et } y \leq 0, \\ 2t - 4y/t & \text{si } 0 < t \text{ et } 0 < y \leq t^2, \\ -2t & \text{si } 0 < t \text{ et } t^2 \leq y. \end{cases}$$

- a) Vérifier que  $f$  est continue et ne satisfait aucune condition de Lipschitz dans  $R$ , si  $R$  est un rectangle contenant l'origine.
- b) Appliquer la méthode d'itération de Picard avec  $y_0(t) \equiv 0$  et constater que la suite des itérés s'accumule sur 2 fonctions qui ne sont pas solutions de  $y' = f(t, y)$ .
- c) Montrer que le problème  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  a une solution unique pour tous  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$  et représenter ces solutions.

**Exercice 19.3.** Vérifier que l'équation de CLAIRAUT

$$f(y') = xy' - y,$$

pour  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ , admet la famille de droites  $y(x) = Cx - f(C)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , comme solutions. Quand  $f$  est différentiable, constater que l'enveloppe de cette famille, donnée par les équations paramétriques

$$x(t) = f'(t), \quad y(t) = tf'(t) - f(t),$$

est aussi solution.

Représentation graphique pour  $f(t) = t^2 + t$ .

**Exercice 19.4.** Donner les 5 premiers termes de la méthode de Picard pour résoudre le problème

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + 2x_2, & x_1(0) &= 0, \\x_2' &= t^2 - x_1, & x_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

**Exercice 19.5.** On suppose donnée  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $f(0,0) = 0$ . Montrer que tous les zéros des solutions non identiquement nulles de l'équation différentielle

$$x'' = f(x, x')$$

sont simples.

**Exercice 19.6.** Déterminer les intervalles d'existence des solutions maximales de l'équation différentielle

$$x' = 1 - x^2.$$

**Exercice 19.7.** Vérifier que les orbites d'un système autonome sont disjointes. A montrer : si  $\varphi : I \rightarrow E$  et  $\psi : J \rightarrow E$  sont deux solutions maximales de  $x' = f(x)$  telles que  $\varphi(s_0) = \psi(t_0)$ , alors  $\varphi(I) = \psi(J)$ .

Exemple : Si  $\varphi(s_0) = \varphi(s_1)$  pour  $s_0 \neq s_1$ , alors  $\varphi$  est périodique.

## 20. Solutions approchées, méthode d'Euler

**Lemme 20.1.** GRONWALL. Soient  $u, v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues,  $u$  non négative et  $C \geq 0$ . Si l'inégalité suivante a lieu

$$v(t) \leq C + \int_{\alpha}^t u(s)v(s) ds, \text{ pour } \alpha \leq t \leq \beta,$$

alors

$$v(t) \leq C \exp\left(\int_{\alpha}^t u(s) ds\right), \text{ pour } \alpha \leq t \leq \beta.$$

*Preuve.* Définissons des primitives  $U, W$  de  $u$  et  $uv$  par

$$U(t) := \int_{\alpha}^t u(s) ds, \quad W(t) := C + \int_{\alpha}^t u(s)v(s) ds, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

En multipliant l'inéquation de départ

$$v \leq W$$

par  $u$ , on obtient

$$W' = uv \leq uW = U'W$$

qui est une inéquation différentielle linéaire. Comme  $e^U(e^{-U}W)' = W' - uW$ , cette inéquation s'écrit

$$(e^{-U}W)' \leq 0.$$

En intégrant, il vient

$$e^{-U(t)}W(t) - W(\alpha) \leq 0,$$

donc

$$W(t) \leq C e^{U(t)}$$

puisque  $W(\alpha) = C$ . Le résultat en découle. □

**Corollaire 20.2.** *Unicité de la solution du problème (19.1) pour  $f$  localement lipschitzienne en la deuxième variable.*

La méthode d'Euler consiste à approcher la solution d'une équation différentielle par des fonctions affines par morceaux définies comme suit.

Pour  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ ,  $M = \sup\{\|f(t, x)\| \mid |t - t_0| \leq a, x \in \overline{B(x_0, b)}\}$  et un entier positif  $N$ , on pose

$$\begin{aligned} h &:= \frac{\alpha}{N}, & t_j &:= t_0 + jh, \\ x_{j+1} &:= x_j + hf(t_j, x_j), & j &\geq 0, \\ \varphi_N(t) &:= x_j + (t - t_j)f(t_j, x_j), & t_j &\leq t \leq t_{j+1}. \end{aligned}$$

**Théorème 20.3.** MÉTHODE D'EULER *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $Z := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)}$  est un "cylindre" contenu dans  $U$ . On suppose  $f$  lipschitzienne de rapport  $k$  dans  $Z$ . Pour  $\varepsilon > 0$  et  $N$  tel que*

$$(20.1) \quad |s - t| \leq h \text{ et } \|x - y\| \leq Mh \implies \|f(s, x) - f(t, y)\| \leq \varepsilon,$$

la majoration suivante a lieu :

$$\|\varphi(t) - \varphi_N(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{k} (e^{k(t-t_0)} - 1), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha,$$

où  $\varphi$  est la solution (exacte) de (19.1).

*Preuve.* On désigne par  $\varphi'_N$  la dérivée à gauche de  $\varphi_N$ .

Puisque pour  $t_j \leq s < t_{j+1}$ , on a

$$\varphi'_N(s) = f(t_j, \varphi_N(t_j)) \text{ et donc } \|\varphi_N(t_j) - \varphi_N(s)\| \leq Mh,$$

l'hypothèse (20.1) sur  $N$  donne

$$\|\varphi'_N(s) - f(s, \varphi_N(s))\| \leq \varepsilon, \text{ pour } t_0 \leq s \leq t_0 + \alpha.$$

On en déduit, pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$  :

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi_N(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_N(s))) ds + \int_{t_0}^t (f(s, \varphi_N(s)) - \varphi'_N(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t k \|\varphi(s) - \varphi_N(s)\| ds + \varepsilon(t - t_0) = \int_{t_0}^t k (\|\varphi(s) - \varphi_N(s)\| + \varepsilon/k) ds. \end{aligned}$$

En ajoutant  $\varepsilon/k$  de chaque côté, il vient

$$\|\varphi(t) - \varphi_N(t)\| + \varepsilon/k \leq \varepsilon/k + \int_{t_0}^t k (\|\varphi(s) - \varphi_N(s)\| + \varepsilon/k) ds.$$

Le lemme de Gronwall avec  $u = k$  et  $v = \|\varphi - \varphi_N\| + \varepsilon/k$  donne la majoration suivante :

$$\|\varphi(t) - \varphi_N(t)\| + \frac{\varepsilon}{k} \leq \frac{\varepsilon}{k} e^{k(t-t_0)}, \text{ pour } t_0 \leq s \leq t_0 + \alpha.$$

L'inégalité cherchée en découle.  $\square$



**Exercice 20.1.** Détailler la méthode d'Euler pour le problème

$$x' = \lambda x, \quad x(0) = 1,$$

sur l'intervalle  $[0, 1]$  où  $\lambda > 0$ .

Vérifier les inégalités suivantes.

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda h} \varphi_N(t) \leq \varphi'_N(t) \leq \lambda \varphi_N(t), \quad t \in [0, 1].$$

En déduire

$$(1 + \lambda h)^N \leq e^\lambda \leq (1 + \lambda h)^{N+\lambda}.$$

**Exercice 20.2.** On considère le problème de Cauchy

$$x' = \sin xt, \quad x(0) = 0.1.$$

a) Montrer que ce problème a une solution unique sur  $[0, \infty[$ .

b) Calculer la solution de  $x' = xt$ ,  $x(0) = 0.1$ .

c) Comparer les deux solutions et estimer leur différence sur l'intervalle  $[0, 0.5]$  en utilisant  $|\sin u - u| \leq u^3/6$ .

## 21. Équations différentielles linéaires

**Définition 21.1.** Soit  $E$  un espace normé réel ou complexe de dimension finie. Une équation différentielle vectorielle  $x' = f(t, x)$  est *linéaire* si le domaine de définition de  $f$  est de la forme  $I \times E$  avec  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et si l'application continue  $f : I \times E \rightarrow E$  est linéaire en la deuxième variable. Elle s'écrit donc

$$(21.1) \quad x' = A(t)x,$$

où  $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$  est continue.

**Exemple 21.2.** Quand  $E = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ , l'équation (21.1) se présente comme un système différentiel

$$x'_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

avec  $a_{jk} : I \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  continues.

**Remarque 21.3.** Si  $f$  est linéaire en la deuxième variable, alors  $f$  est localement lipschitzienne en la deuxième variable et le théorème d'existence locale s'applique.

**Proposition 21.4.** *Les solutions maximales de l'équation linéaire (21.1) sont définies sur  $I$  tout entier.*

*Preuve.* Soit  $] \alpha, \beta [$  l'intervalle de définition de la solution maximale  $\varphi$  du problème  $x' = A(t)x$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Si  $\beta$  n'est pas égal à  $\sup I$ , soit  $M = \sup_{t_0 \leq t \leq \beta} \|A(t)\|$ . Puisque

$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$  pour tout  $t \in [t_0, \beta[$ , on aura

$$\|\varphi(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s) ds \right\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t M \|\varphi(s)\| ds,$$

et donc, par le lemme de Gronwall,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| e^{M(t-t_0)} \leq \|x_0\| e^{M(\beta-t_0)}, \quad t_0 \leq t < \beta.$$

Ainsi,  $(t, \varphi(t))$  reste dans le compact  $[t_0, \beta] \times \overline{B(0, \|x_0\| e^{M(\beta-t_0)})}$  de  $I \times E$ . Ceci est en contradiction avec le Corollaire 19.8. On a montré  $\beta = \sup I$ .

De la même manière, on vérifie  $\alpha = \inf I$ . □

**Proposition 21.5.** *L'ensemble des solutions maximales de l'équation linéaire (21.1) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I; E)$  de dimension  $\dim E$ .*

*Preuve.* Il est clair que la somme de deux solutions de (21.1) est encore une solution et le produit d'une solution par un scalaire est une solution.

Pour trouver la dimension de l'espace des solutions  $S$ , on choisit  $t_0$  dans  $I$ . L'application de  $S$  dans  $E$  qui à une solution  $\varphi$  fait correspondre  $\varphi(t_0)$  est linéaire. Elle est surjective par le théorème d'existence globale et injective par unicité. D'où le résultat. □

**Définition 21.6.** Un *système fondamental de solutions* de (21.1) est un ensemble de  $\dim E$  solutions linéairement indépendantes de (21.1).

La solution  $\phi : I \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$  du problème

$$(21.2) \quad X' = A(t) \circ X, \quad X(t_0) = \mathbf{1}_E,$$

s'appelle la *résolvante* de (21.1). On désigne par  $\phi(t, t_0)$  la valeur de cette solution au point  $t$ .

**Remarque 21.7.** On connaît l'existence de la résolvante, mais le calcul explicite des solutions d'un système d'équations linéaires n'est pas possible en général.

**Proposition 21.8.** *La résolvante de (21.1) a les propriétés suivantes :*

a) *Pour  $X_0 \in \mathcal{L}(E, E)$ , l'application  $t \mapsto \phi(t, t_0) \circ X_0$  est la solution du problème*

$$X' = A(t) \circ X, \quad X(t_0) = X_0.$$

b) *Pour  $x_0 \in E$ , l'application  $t \mapsto \phi(t, t_0)x_0$  est la solution du problème*

$$x' = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0.$$

- c)  $\phi(t, t_0)$  est inversible  $\forall t$  et  $t_0 \in I$  ; de plus  $\phi(t_0, t) = \phi(t, t_0)^{-1}$ .  
d)  $\det \phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{trace } A(s) ds\right)$ .

*Preuve.*

- a)  $\frac{d}{dt}(\phi(t, t_0) \circ X_0) = \frac{d}{dt}(\phi(t, t_0)) \circ X_0 = A(t) \circ (\phi(t, t_0) \circ X_0)$  et  $\phi(t_0, t_0) \circ X_0 = X_0$ .  
b)  $\frac{d}{dt}(\phi(t, t_0)x_0) = \frac{d}{dt}(\phi(t, t_0))x_0 = A(t) \circ (\phi(t, t_0)x_0)$  et  $\phi(t_0, t_0)x_0 = x_0$ .  
c) Comme, pour  $s \in I$ , la fonction  $t \mapsto \phi(t, s) \circ \phi(s, t_0)$  est solution du problème  $X' = A(t)X$ ,  $X(s) = \phi(s, t_0)$  dont  $t \mapsto \phi(t, t_0)$  est aussi solution, on aura

$$\phi(t, s) \circ \phi(s, t_0) = \phi(t, t_0), \text{ pour } t, s, t_0 \in I.$$

Il reste à poser  $t = t_0$ .

d) Fixons  $t_0 \in I$  et posons pour simplifier  $\phi(t) = \phi(t, t_0)$ . Dans une base de  $E$ , les opérateurs linéaires  $\phi(t)$  et  $A(t)$  ont pour matrices

$$(\phi_{ij}(t)) \text{ et } (a_{ij}(t)).$$

Pour dériver le déterminant de  $\phi$ , il faut dériver chaque ligne de  $\phi$  et faire la somme des déterminants obtenus :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \phi(t) &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi'_{i1} & \dots & \phi'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix} (t) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_j a_{ij} \phi_{j1} & \dots & \sum_j a_{ij} \phi_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix} (t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \det \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{i1} & \dots & \phi_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix} (t) = \text{trace } A(t) \det \phi(t). \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité a lieu car dans la somme sur l'indice  $j$ , les termes  $j \neq i$  sont combinaisons linéaires des lignes d'indice  $j \neq i$ .

On a montré que  $t \mapsto \det \phi(t)$  est solution du problème scalaire  $u' = \text{trace } A(t)u$ ,  $u(t_0) = 1$ . Par unicité,  $\det \phi(t)$  a l'expression annoncée.  $\square$

La résolvante de (21.1) fournit la solution générale de (21.1). En effet, si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$ , alors les applications  $\varphi_j$  définies par

$$\varphi_j(t) = \phi(t, t_0)e_j, \quad t \in I, \quad j = 1, \dots, n,$$

forment une base de l'espace vectoriel des solutions de (21.1). Donc toute solution de (21.1) s'écrit

$$t \mapsto \sum_1^n c_j \varphi_j(t),$$

avec  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Quand  $E$  est un espace normé réel de dimension  $n$  et  $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ , on peut complexifier la situation et considérer  $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ . L'espace des solutions (complexes) de  $y' = A(t)y$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $n$ . Si  $\psi$  est une solution complexe, alors  $\bar{\psi}$  est aussi une solution. Par suite,  $\operatorname{Re} \psi = (\psi + \bar{\psi})/2$  et  $\operatorname{Im} \psi = (\psi - \bar{\psi})/2i$  sont des solutions réelles.

**Proposition 21.9.** *Soit  $A \in \mathcal{C}(I; \mathcal{L}(E, E))$  où  $E$  est un espace normé réel de dimension  $n$ . Si  $\psi_1, \dots, \psi_n$  est une base des solutions complexes de l'équation  $y' = A(t)y$ , alors les fonctions  $\operatorname{Re} \psi_1, \dots, \operatorname{Re} \psi_n, \operatorname{Im} \psi_1, \dots, \operatorname{Im} \psi_n$  engendrent l'espace des solutions réelles.*

*Preuve.* Toute solution réelle  $\varphi$  de  $y' = A(t)y$  est une solution complexe. Il existe donc  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\varphi = \sum (\alpha_j + i\beta_j)\psi_j = \sum (\alpha_j \operatorname{Re} \psi_j - \beta_j \operatorname{Im} \psi_j)$  puisque  $\varphi$  est réelle.  $\square$

**Proposition 21.10.** VARIATION DES CONSTANTES.

*Soit  $A \in \mathcal{C}(I; \mathcal{L}(E; E))$  et  $b \in \mathcal{C}(I; E)$ . Alors la solution générale de*

$$(21.3) \quad x' = A(t)x + b(t),$$

*est donnée par  $t \mapsto \sum c_j \varphi_j + \psi$ , où  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  forment une base de l'espace des solutions de l'équation homogène (21.1), les constantes  $c_1, \dots, c_n$  appartiennent à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $\psi$  est une solution particulière de (21.3).*

*Par exemple,  $\psi(t) = \phi(t, t_0)c(t)$ , où  $c : I \rightarrow E$  vérifie  $c'(t) = \phi(t_0, t)b(t)$ .*

**Remarque 21.11.** Pratiquement, pour chercher une solution particulière  $\psi$  de (21.3), on pose  $\psi(t) = \sum c_j(t)\varphi_j(t)$ , on dérive et on introduit dans (21.3). Les fonctions  $c_j$  s'obtiennent par quadrature.



**Exercice 21.1.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Chercher la solution générale de l'équation homogène  $x' = Ax$ . En déduire une solution particulière de l'équation inhomogène  $x' = Ax + b(t)$ .

**Exercice 21.2.** Résoudre  $X' = A \circ X$ ,  $X(0) = \mathbf{1}_3$  où  $X$  est une matrice  $3 \times 3$  et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$



**Exercice 21.3.** RÉDUCTION DE L'ORDRE. On suppose connue une solution non triviale  $\varphi$  de l'équation  $x' = A(t)x$ , pour  $A \in \mathcal{C}(I; \mathcal{L}(E, E))$ . Réduire l'équation précédente à une équation du type  $y' = B(t)y$  avec  $B \in \mathcal{C}(I; \mathcal{L}(F, F))$  où  $\dim F = \dim E - 1$ .

INDICATION. Si, dans une base convenable, si  $\varphi_1(t) \neq 0$ , pour tout  $t$ , chercher une solution de la forme  $t \mapsto u(t)\varphi(t) + \psi(t)$  avec  $\psi_1 = 0$  et  $u$  à déterminer.

**Exercice 21.4.** Calculer la résolvante de

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sachant que  $\phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$  est solution.

## 22. Équations linéaires à coefficients constants

Il s'agit de trouver la solution générale de l'équation vectorielle

$$(22.1) \quad x' = Ax, \text{ avec } A \in \mathcal{L}(E, E),$$

où  $E$  est un espace normé de dimension finie. L'équation (22.1) est donc une équation différentielle vectorielle linéaire autonome.

Après avoir choisi une base de  $E$ , on obtient un système différentiel linéaire à coefficients constants qu'on écrit sous forme matricielle

$$(22.2) \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Proposition 22.1.** Soit  $A \in \mathcal{L}(E, E)$  où  $E$  est un espace normé de dimension finie et  $x_0 \in E$ . La méthode d'itération de Picard, avec fonction initiale  $\varphi_0 = x_0$  et instant initial 0, donne les approximations suivantes :

$$(22.3) \quad \varphi_N(t) = \sum_{j=0}^N \frac{(tA)^j}{j!} x_0,$$

qui, quand  $N \rightarrow \infty$ , convergent normalement sur tout intervalle compact vers la solution

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!} x_0 \text{ du problème } x' = Ax, x(0) = x_0.$$

*Preuve.* Les itérés de Picard sont

$$\varphi_0(t) = x_0, \varphi_1(t) = x_0 + \int_0^t Ax_0 ds = x_0 + tAx_0, \varphi_{j+1}(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_j(s) ds.$$

Par récurrence sur  $N$ , on vérifie (22.3). La convergence de la série découle aussi du théorème 19.3 ou de la majoration (22.4).  $\square$

**Définition 22.2.** Pour  $A \in \mathcal{L}(E, E)$ , on pose

$$\exp A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

La série converge normalement puisque

$$(22.4) \quad \sum_{j=0}^N \left\| \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=0}^N \frac{\|A\|^j}{j!}.$$

Quand  $A$  est une matrice  $n \times n$ , l'exponentielle de  $A$  est la matrice définie de la même manière.

**Exemples 22.3.**

- 1)  $\exp \mathbf{0}_E = \mathbf{1}_E$ .
- 2) Si  $A$  est la matrice diagonale de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  alors  $\exp A$  est la matrice diagonale de valeurs propres  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .
- 3)

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 22.4.** Par définition de l'exponentielle, on a :

$$\frac{d}{dt} \exp tA = A \circ \exp tA, \quad \exp \mathbf{0}_E = \mathbf{1}_E.$$

Donc  $\phi(t, 0) = \exp tA$  est la résolvante de (22.1).

**Proposition 22.5.** Soient  $A, B$  et  $S \in \mathcal{L}(E, E)$ . Alors

- 1)  $\exp(A + B) = \exp A \circ \exp B$ , quand  $A \circ B = B \circ A$  ;
- 2)  $\exp(S^{-1} \circ A \circ S) = S^{-1} \circ \exp A \circ S$ , si  $S$  est inversible.

*Preuve.* a) La fonction  $t \mapsto (\exp tA) \circ B$  est solution de  $X' = AX$ ,  $X(0) = B$ . Comme  $t \mapsto B \circ \exp tA$  a pour dérivée  $B \circ A \circ \exp tA = A \circ (B \circ \exp tA)$ , elle est solution du même problème. Donc  $\exp tA$  commute avec  $B$ .

Puisque la fonction  $t \mapsto \exp tA \circ \exp tB$  a pour dérivée  $A \circ \exp tA \circ \exp tB + \exp tA \circ B \circ \exp tB = (A + B) \exp tA \circ \exp tB$ , elle est solution de  $X' = (A + B)X$ ,  $X(0) = \mathbf{1}$ . Comme  $t \mapsto \exp t(A + B)$  est solution du même problème, on a l'égalité annoncée.

b) La fonction  $t \mapsto S^{-1}(\exp tA)S$  a pour dérivée  $S^{-1}A(\exp tA)S$  qu'on peut récrire sous la forme  $(S^{-1}AS)S^{-1}(\exp tA)S$ . Elle est donc solution de  $X' = S^{-1}ASX$ ,  $X(0) = \mathbf{1}$ . Mais  $t \mapsto \exp t(S^{-1}AS)$  est solution du même problème.

Deuxième preuve. a) On fait le produit de Cauchy des séries donnant  $\exp A$  et  $\exp B$  :

$$\begin{aligned} \exp A \circ \exp B &= \sum \frac{A^j}{j!} \circ \sum \frac{B^k}{k!} = \sum_N \sum_{j+k=N} \frac{A^j}{j!} \circ \frac{B^k}{k!} \\ &= \sum_N \frac{1}{N!} \sum_{j+k=N} \frac{N!}{j!k!} A^j \circ B^k = \exp(A+B). \end{aligned}$$

b) Utiliser  $(S^{-1}AS)^j = S^{-1}AS \circ \dots \circ S^{-1}AS = S^{-1}A^jS$ . □

### Exemples 22.6.

1)  $\exp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \neq \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

2) PRODUIT PAR BLOCS. Si  $A_1$  est une matrice  $n_1 \times n_1$  et  $A_2$  une matrice  $n_2 \times n_2$ , alors

$$\exp\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & 0 \\ 0 & \exp A_2 \end{pmatrix}$$

3) BLOC DE JORDAN DE TAILLE  $l$ .

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ \frac{1}{(l-2)!} & \frac{1}{(l-3)!} & \dots & 1 & 0 \\ \frac{1}{(l-1)!} & \frac{1}{(l-2)!} & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Théorème 22.7.** DÉCOMPOSITION DE JORDAN. Soit  $A \in \mathcal{L}(E)$  une application linéaire d'un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension  $n$  dans lui-même. On désigne les valeurs propres de  $A$  par  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  et la multiplicité de  $\lambda_j$  par  $m_j$ . Si  $E_j := \text{Ker}(A - \lambda_j \mathbf{1})^{m_j}$  est le sous-espace propre généralisé associé à  $\lambda_j$ , on a :

i)  $A(E_j) \subseteq E_j$ ,  $\dim E_j = m_j$ ,  $E = \bigoplus_{j=1}^k E_j$  et donc  $\sum m_j = n$  ;

ii)  $N_j := (A - \lambda_j \mathbf{1})|_{E_j}$  est nilpotent d'ordre  $m_j$ .

Par conséquent,  $\exp(A|_{E_j}) = e^{\lambda_j} \left( \mathbf{1} + N_j + \dots + \frac{1}{(m_j - 1)!} N_j^{m_j - 1} \right)$ .

Preuve. Voir J. Grifone [10] ou S. Lang [15]. □

**Corollaire 22.8.** Les solutions complexes de l'équation différentielle vectorielle  $x' = Ax$ , pour  $A \in \mathcal{L}(E)$ , sont de la forme

$$t \mapsto \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} P_j(t),$$

où  $P_j$  est un polynôme de degré  $m_j - 1$  à coefficients vectoriels, i.e.,

$$P_j(t) = v_0 + tv_1 + \dots + t^{m_j - 1} v_{m_j - 1}, \quad v_l \in E.$$

*Preuve.* On se place dans une base formée de vecteurs propres et de vecteurs propres généralisés de  $A$ . Dans cette base, la matrice de  $A$  est diagonale par blocs de Jordan. Pour la valeur propre  $\lambda_j$ , on a

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}\right) = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ \frac{t^{m_j-2}}{(m_j-2)!} & \frac{t^{m_j-3}}{(m_j-3)!} & \dots & 1 & 0 \\ \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} & \frac{t^{m_j-2}}{(m_j-2)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat en découle.  $\square$

**Corollaire 22.9.** *Les solutions de l'équation différentielle d'ordre  $n$  linéaire à coefficients constants*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$$

sont de la forme

$$t \mapsto \sum_{j=1}^k P_j(t) e^{\lambda_j t},$$

où  $P_j$  est un polynôme de degré  $m_j - 1$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont les racines de l'équation caractéristique, i.e.,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

*Preuve.* On transforme l'équation en un système en posant :

$$y_1 := x, \quad y_2 := x', \quad \dots, \quad y_n := x^{(n-1)}.$$

D'où le système

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Calcul des valeurs propres : par récurrence, on établit la formule

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n).$$

Le résultat découle du corollaire précédent.  $\square$

**Remarque 22.10.** Pour avoir les solutions réelles d'un système ou d'une équation d'ordre  $n$ , il reste à prendre les parties réelles et imaginaires des solutions complexes. La solution générale de l'équation non homogène s'obtient par la méthode de la variation des constantes.



**Exercice 22.1.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $t \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}$  forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène  $x' = Ax$ .

En déduire une solution particulière de l'équation inhomogène  $x' = Ax + b(t)$ .

**Exercice 22.2.** Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 22.3.** Résoudre  $x' = Ax$  en calculant  $e^{tA}$  dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 22.4.** Soit  $B$  une application de classe  $C^1$  d'un intervalle  $I$  dans  $\mathcal{L}(E, E)$ . Montrer les formules

a)  $(B^2)' = B \circ B' + B' \circ B$  ;

b)  $(\exp B)' = B \circ \exp B$  quand  $B$  et  $B'$  commutent.

En déduire la résolvante du système  $x' = A(t)x$ , où  $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E, E))$ , lorsque  $A$  et une primitive de  $A$  commutent.

**Exercice 22.5.** Calculer la résolvante du système

$$x'_1 = tx_1 + x_2, \quad x'_2 = 0, \quad \text{pour } t_0 = 0,$$

et constater qu'elle n'est pas de la forme  $\exp \int_0^t A(s) ds$ .

**Exercice 22.6.** Résoudre l'équation

$$x^{(4)} + 2x^{(2)} + x = 0.$$

### 23. Dépendance des paramètres et conditions initiales

Dans ce paragraphe, nous étudions une équation différentielle vectorielle du premier ordre qui dépend de paramètres :

$$x' = f(s, x, \lambda)$$

où  $\lambda$  varie dans un espace métrique  $F$ , le point  $(s, x, \lambda)$  appartient à un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times E \times F$ , où  $E$  est un espace normé de dimension finie et  $f : U \rightarrow E$  est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. La solution maximale du problème

$$(23.1) \quad x' = f(s, x, \lambda), \quad x(t) = y,$$

est désignée par  $s \mapsto \varphi_{(t,y;\lambda)}(s)$ , elle est définie sur l'intervalle ouvert  $I_{(t,y,\lambda)}$ .

**Proposition 23.1.** *Avec les notations et hypothèses précédentes, soit  $V := \{(s, t, y, \lambda) \in \mathbb{R} \times U \mid s \in I_{(t,y,\lambda)}\}$ . Alors  $V$  est ouvert et l'application  $\phi : V \rightarrow E$  qui envoie  $(s, t, y, \lambda)$  sur  $\varphi_{(t,y;\lambda)}(s)$  est continue.*

*Preuve.* Voir la Remarque 19.4. □

**Théorème 23.2.** *Avec les mêmes notations, quand  $F$  est un espace normé de dimension finie, supposons en plus  $f$  continûment différentiable en les dernières variables. Alors l'application  $\phi : V \rightarrow E$  de la Proposition 23.1 est de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus la fonction  $s \mapsto d_2\phi_{(s,t,y,\lambda)}$  est solution du problème*

$$u'(s) = d_2f_{(s,\phi(s,t,y,\lambda),\lambda)}u(s), \quad u(t) = -f(t, y, \lambda),$$

la fonction  $s \mapsto d_3\phi_{(s,t,y,\lambda)}$  est solution du problème

$$V'(s) = d_2f_{(s,\phi(s,t,y,\lambda),\lambda)} \circ V(s), \quad V(t) = \mathbf{1}_E,$$

la fonction  $s \mapsto d_4\phi_{(s,t,y,\lambda)}$  est solution du problème

$$W'(s) = d_2f_{(s,\phi(s,t,y,\lambda),\lambda)} \circ W(s) + d_3f_{(s,\phi(s,t,y,\lambda),\lambda)}, \quad W(t) = 0,$$

et les dérivées mixtes

$$\frac{\partial}{\partial s} d_2\phi, \quad d_2 \frac{\partial}{\partial s} \phi, \quad \frac{\partial}{\partial s} d_3\phi, \quad d_3 \frac{\partial}{\partial s} \phi; \quad \frac{\partial}{\partial s} d_4\phi, \quad d_4 \frac{\partial}{\partial s} \phi,$$

existent et sont égales deux à deux.

*Preuve.* Traitons le cas autonome sans paramètres :  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = y$  et supposons d'abord  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On applique la méthode d'itération de Picard au système de  $n + n^2$  équations

$$\begin{aligned} x' &= f(x), & x(0) &= y \\ V' &= df_x \circ V(s), & V(0) &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Puisque  $df$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , le second membre est localement lipschitzien et ainsi les itérés

$$\begin{aligned}\varphi_{j+1}(s, y) &:= y + \int_0^s f(\varphi_j(\sigma, y)) d\sigma, & \varphi_0 &:= y, \\ \Psi_{j+1}(s, y) &:= \mathbf{1} + \int_0^s df_{\varphi_j(\sigma, y)} \circ \Psi_j(\sigma, y) d\sigma, & \Psi_0 &:= \mathbf{1}\end{aligned}$$

convergent uniformément dans un voisinage de  $(0, x_0)$ . On vérifie par récurrence que  $\varphi_j$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que

$$d_2\varphi_j = \Psi_j, \quad j \geq 0.$$

Avec  $\varphi := \lim \varphi_j$  et  $\Psi := \lim \Psi_j$  on obtient  $\varphi \in \mathcal{C}^1$  car une suite qui converge en un point dont les dérivées convergent uniformément a une limite différentiable et, par construction

$$d_2\varphi = \Psi, \quad \frac{\partial}{\partial s}\varphi = f(\varphi), \quad \frac{\partial}{\partial s}\Psi = df_\varphi \circ \Psi.$$

L'égalité des dérivées mixtes en découle :

$$\frac{\partial}{\partial s} d_2\varphi = \frac{\partial}{\partial s}\Psi = df_\varphi \circ \Psi = d_2(f(\varphi)) = d_2 \frac{\partial}{\partial s}\varphi.$$

Une preuve du cas  $f \in \mathcal{C}^1$  peut être faite sur le même schéma. La suite des itérés  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge car  $f$  est localement lipschitzienne mais la suite  $\{\Psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ne converge pas nécessairement. Néanmoins cette famille de fonctions est équicontinue et le théorème d'Ascoli-Arzela (voir [13]) permet d'en extraire une sous-suite convergente. On termine la preuve comme avant.  $\square$

**Définition 23.3.** Soit  $f : U \rightarrow E$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de l'espace normé de dimension finie  $E$ . On désigne par  $V$  l'ouvert de la Proposition 23.1 où  $t = 0$ , soit  $V = \{(s, y) \in \mathbb{R} \times U \mid s \in I_y\}$  avec  $I_y$  intervalle de définition de la solution maximale du problème

$$x' = f(x), \quad x(0) = y.$$

L'application  $\phi : V \rightarrow E$  définie dans ce cas par  $\phi(s, y) = \varphi_{(0, y)}(s)$  est appelée *flot* du champ de vecteurs  $f$ .

**Remarque 23.4.** Le terme *flux* ou *écoulement* serait une meilleure traduction de l'anglais "flow".

**Proposition 23.5.** Avec les notations ci-dessus, on introduit encore, pour  $s \in \mathbb{R}$ , l'ouvert  $V_s := \{y \in U \mid (s, y) \in V\}$  et l'application  $\phi_s : V_s \rightarrow U$  donnée par  $\phi_s(y) = \phi(s, y)$ . Alors

- 1) pour  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $y \in V_s$  et  $\phi_s(y) \in V_t$  on a  $y \in V_{t+s}$  et  $\phi_{t+s}(y) = \phi_t \circ \phi_s(y)$  ;
- 2)  $\phi_s(V_s) = V_{-s}$  et  $\phi_s$  est un difféomorphisme de  $V_s$  sur  $V_{-s}$ .

*Preuve.* 1) La fonction  $t' \mapsto \phi_{t'}(\phi_s(y))$  prolonge la solution  $t' \mapsto \phi_{t'+s}(y)$ , par unicité. Donc  $y$  appartient à  $V_{t+s}$ . Il reste à poser  $t' = t$ .

2) Puisque pour  $y \in V_s$ , la fonction  $t \mapsto \phi_t(\phi_s(y))$  est définie sur  $[-s, 0]$ , le point  $\phi_s(y)$  appartient à  $V_{-s}$ . Par suite, en remplaçant  $s$  par  $-s$ , on a  $\phi_{-s}V_{-s} \subseteq V_s$  et donc  $\phi_s\phi_{-s}(V_{-s}) \subseteq \phi_s(V_s) \subseteq V_{-s}$ , et comme  $\phi_s \circ \phi_{-s} = \mathbf{1}_{V_{-s}}$ , on en déduit que  $\phi_s$  est bijective. C'est un difféomorphisme car  $\phi_s$  est différentiable d'après le Théorème 23.2.  $\square$



**Exercice 23.1.** Soit  $s \mapsto \phi(s, 0, y)$  la valeur au temps  $s$  de la solution du problème

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(1 - x_1) + x_2, & x_1(0) &= y_1, \\ x_2' &= x_2(1 - x_2), & x_2(0) &= y_2. \end{aligned}$$

Calculer  $d_3\phi_{(s,0,0)}$ .

**Exercice 23.2.** L'équation différentielle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec paramètres  $x' = \alpha x + \beta$  admet la solution  $\varphi(s) = -\beta/\alpha$ . Celle-ci ne semble pas dépendre continûment de  $(\alpha, \beta)$ . Expliquer.

## 24. Stabilité

**Proposition 24.1.** REDRESSEMENT D'UN CHAMP DE VECTEURS. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$ . Si  $f(x_0) \neq 0$  pour un point  $x_0 \in \Omega$ , alors il existe un difféomorphisme  $\Psi$  d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$d\Psi_x(f(x)) = e_1,$$

pour tout  $x$  voisin de  $x_0$ .

*Preuve.* Soit  $H$  l'hyperplan perpendiculaire à  $f(x_0)$  et  $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire d'image  $H$ ; elle est donc de rang  $n - 1$ . Pour  $t$  voisin de 0 et  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  voisin de 0, le flot  $\phi_t$  du champ  $f$  est défini au point  $x_0 + h(y)$  (cf. Définition 23.3). Posons  $\Phi(t, y) := \phi_t(x_0 + h(y))$ . L'application  $\Phi$  ainsi définie est de classe  $C^1$  et  $d_1\Phi_{(t,y)} = f(\Phi(t, y))$ , par construction. Comme  $(d\phi_0)_{x_0} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$ , on aura  $d_2\Phi_{(0,0)} = dh_0 = h$ . Par suite,  $d\Phi_0$  envoie la base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sur  $\{f(x_0), h(e_2), \dots, h(e_n)\}$  qui est une base de  $\mathbb{R}^n$  car les vecteurs  $h(e_2), \dots, h(e_n)$  sont linéairement indépendants et  $f(x_0) \notin H$ .

D'après le théorème d'inversion locale, l'application  $\Phi$  a une inverse  $\Psi$  définie au voisinage de  $x_0$  et  $d\Psi_x(f(x)) = e_1$  puisque  $d_1\Phi_{(t,y)}(e_1) = f(\Phi(t, y))$ .  $\square$

L'évolution d'un système différentiel autonome au voisinage d'un point où le champ ne s'annule pas est donc bien comprise.

**Définition 24.2.** On dit que le point  $x_0 \in \Omega$  est un *point singulier* du champ de vecteurs  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $f(x_0) = 0$ .



**Remarque 24.3.** Soit  $\varphi$  une solution maximale de  $x' = f(x)$ . Si  $\varphi(t) \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow t_0$  et  $f(x_0) = 0$ , alors  $t_0 = \pm\infty$ . C'est-à-dire : si une orbite s'approche d'un point singulier, alors le temps tend vers  $\pm\infty$  (cf. Corollaire 19.8).

**Exemples 24.4.**

1) Si  $f$  est un champ linéaire, *i.e.*,  $f(x) = Ax$  avec  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , alors 0 est un point singulier de  $f$ . Il n'y en a pas d'autre si, et seulement si,  $A$  est bijective.

2) PRÉDATEURS-PROIES. Soient  $a, b, c, d > 0$ ,  $x(t)$  le nombre de proies et  $y(t)$  le nombre de prédateurs à l'instant  $t$ . L'évolution des deux populations est régie par le modèle non linéaire

$$\begin{aligned}x' &= x(a - by), \\y' &= -(c - dx)y.\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs de cet exemple a deux points critiques  $(0, 0)$  et  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ . On ne trouve pas les solutions explicites mais la fonction  $F : ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  données par

$$F(x, y) = c \log x - dx + a \log y - by$$

est constante sur les orbites du champ. On peut donc représenter ces orbites (périodiques).

Les orbites des champs linéaires sont bien comprises puisqu'on a des solutions explicites du système associé. Pour étudier un champ de vecteurs  $f$  au voisinage d'un point singulier  $x_0$ , on regarde d'abord le champ linéaire  $x \mapsto df_{x_0}(x - x_0)$ . Dans certains cas, les orbites de  $f$  vont rester proches des orbites du linéarisé.

**Définition 24.5.** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs continu dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Une *fonction de Liapounov* pour  $f$  au point  $x_0 \in \Omega$  est une fonction  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  avec les propriétés suivantes, pour  $x$  voisin de  $x_0$  :

(i)  $L(x) \geq 0$  et  $L(x) = 0 \iff x = x_0$ ,

(ii)  $\frac{\partial L}{\partial f(x)}(x) \leq 0$ .

**Remarque 24.6.** La première condition équivaut à dire que  $L$  a un minimum strict en  $x_0$  de valeur 0. La deuxième a lieu si, et seulement si,  $L$  est décroissante le long des orbites de  $f$  qui passent au voisinage de  $x_0$ .

Si  $f$  admet une fonction de Liapounov en  $x_0$ , alors  $x_0$  est un point singulier de  $f$ . En effet, sinon  $f(x_0) \neq 0$  et le théorème de redressement nous ramène après difféomorphisme au cas  $f(x) = e_1$  près de 0 ; puisque  $\frac{\partial L}{\partial e_1} \leq 0$ , la fonction  $L$  ne peut avoir un minimum strict en 0.

**Proposition 24.7.** Si  $f$  est un champ linéaire  $f(x) = Ax$  avec  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f$  admet une fonction de Liapounov en 0 si les valeurs propres de  $A$  ont leurs parties réelles négatives.

*Preuve.* On sait qu'il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  dans laquelle le matrice de  $A$  est triangulaire inférieure, *i.e.*,

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ Ae_2 &= a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ &\dots \\ Ae_n &= a_{nn}e_n. \end{aligned}$$

En remplaçant  $e_1$  par  $\tilde{e}_1 := \tau^{n-1}e_1$ ,  $e_2$  par  $\tilde{e}_2 := \tau^{n-2}e_2$ , etc., avec  $\tau > 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} A\tilde{e}_1 &= a_{11}\tilde{e}_1 + \tau a_{21}\tilde{e}_2 + \cdots + \tau^{n-1}a_{n1}\tilde{e}_n, \\ A\tilde{e}_2 &= a_{22}\tilde{e}_2 + \cdots + \tau^{n-2}a_{n2}\tilde{e}_n, \\ &\dots \\ A\tilde{e}_n &= a_{nn}\tilde{e}_n. \end{aligned}$$

En prenant  $\tau$  assez petit, on peut donc supposer  $|a_{jk}|$  petits pour  $j > k$ , par exemple

$$(24.1) \quad |a_{jk}| \leq \frac{c}{n^2}, \quad \text{où } c := -\max \operatorname{Re} a_{ll} > 0,$$

car les valeurs propres  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  de  $A$  ont une partie réelle négative.

On pose  $L(x) := \langle x|x \rangle = \sum_1^n x_j \bar{x}_j$ . Puisque  $L(x+h) = \langle x|x \rangle + \langle x|h \rangle + \overline{\langle x|h \rangle} + \langle h|h \rangle$ , on en déduit

$$dL_x(h) = 2 \operatorname{Re} \langle x|h \rangle.$$

La dérivée directionnelle de  $L$  dans la direction  $Ax$  au point  $x$  satisfait donc

$$\begin{aligned} (24.2) \quad \frac{\partial L}{\partial Ax}(x) &= 2 \operatorname{Re} \langle x|Ax \rangle = 2 \operatorname{Re} \sum x_j \overline{a_{jk}x_k} = 2 \sum \operatorname{Re} a_{jj} |x_j|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j>k} x_j \overline{a_{jk}x_k} \\ &\leq -2c \|x\|^2 + n(n-1) \frac{c}{n^2} \|x\|^2 \leq -c \|x\|^2. \end{aligned}$$

La fonction  $L$  est donc bien une fonction de Liapounov pour  $A$ . □

**Définition 24.8.** Un point singulier  $x_0$  d'un champ de vecteurs  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzien est *stable* si, pour tout  $R > 0$  assez petit, il existe  $r > 0$  tel que pour toute solution maximale  $\varphi$  de l'équation  $x' = f(x)$  qui satisfait  $\|\varphi(0) - x_0\| \leq r$ , on a :

$$\varphi \text{ est défini sur } [0, \infty[ \quad \text{et } \|\varphi(t) - x_0\| \leq R, \quad \forall t \geq 0.$$

Si, en plus, on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$ , on dit que  $x_0$  est *asymptotiquement stable* ou que  $x_0$  est un *attracteur*.

Le point  $x_0$  est *instable* s'il n'est pas stable.

**Théorème 24.9.** Soit  $L$  une fonction de Liapounov pour  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  lipschitzienne près de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $x_0$  est stable. Si la deuxième condition de la définition 24.5 est renforcée en

$$(24.3) \quad \frac{\partial L}{\partial f(x)}(x) < 0, \quad \text{pour } x \neq x_0$$

alors  $x_0$  est asymptotiquement stable.

*Preuve.* On prend  $R > 0$  tel que  $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$  et que  $L$  soit défini dans  $\overline{B(x_0, R)}$ . On pose

$$m := \inf\{L(x) \mid \|x - x_0\| = R\} > 0.$$

Par continuité de  $L$ , il existe  $r > 0$  tel que  $\|x - x_0\| < r \implies L(x) < m$ . On a  $r \leq R$  car sinon,  $L$  prendrait une valeur plus petite que  $m$  sur la sphère de rayon  $R$ .

Soit  $\varphi : [0, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) \in B(x_0, r)$ . La propriété (ii) de la définition 24.5 entraîne

$$L(\varphi(t)) \leq L(\varphi(0)) < m \text{ pour } 0 \leq t < b.$$

Par conséquent,

$$(24.4) \quad \varphi(t) \in B(x_0, R) \text{ pour } t \in [0, b[$$

car, comme ci-dessus,  $\|\varphi(t)\| = R$  est impossible. Par suite,  $\varphi$  est définie dans  $[0, \infty[$  (cf. Corollaire 19.8). La stabilité de  $x_0$  est établie.

Pour la deuxième partie, il s'agit de montrer  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$ . Puisque  $\frac{\partial L}{\partial f(x)} < 0$ , on sait que  $t \mapsto L(\varphi(t))$  est strictement décroissante. Soit  $l := \lim_{t \rightarrow \infty} L(\varphi(t)) = \inf_{t \geq 0} L(\varphi(t))$ . Supposons  $l > 0$ . D'après la continuité de  $L$ , il existe  $r' > 0$  tel que  $\|x - x_0\| < r' \implies L(x) < l$ . Par définition de  $l$  et (24.4), on a

$$r' \leq \|\varphi(t) - x_0\| \leq R, \text{ pour } t \geq 0.$$

Définissons encore

$$m' := \sup\left\{\frac{\partial L}{\partial f(x)}(x) \mid r' \leq \|x - x_0\| \leq R\right\} < 0.$$

Par intégration, l'inégalité suivante est obtenue :

$$L(\varphi(t)) = L(\varphi(0)) + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial f(\varphi(s))}(\varphi(s)) \, ds \leq L(\varphi(0)) + m't.$$

Il s'ensuit que  $L(\varphi(t))$  sera négatif pour  $t$  grand, contradiction. On a montré  $l = 0$ . Vérifions encore la conséquence suivante de la condition (i) de la définition 24.5 :

$$\forall \varepsilon \in ]0, R[, \exists m'' > 0 \text{ tel que } \{x \in \overline{B(x_0, R)} \mid L(x) < m''\} \subseteq B(x_0, \varepsilon).$$

Il suffit en effet de prendre  $m'' = \inf\{L(x) \mid \varepsilon \leq \|x - x_0\| \leq R\}$ .

Comme on sait qu'il existe  $t_0 \geq 0$  tel que  $L(\varphi(t_0)) < m''$ , on en déduit  $\varphi(t) \in B(x_0, \varepsilon)$  pour  $t \geq t_0$ . On a montré  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$ .  $\square$

**Corollaire 24.10.** *Soit  $f$  un champ de vecteur de classe  $C^1$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0$  un point singulier de  $f$ .*

- (i) *Si toutes les valeurs propres de  $df_{x_0}$  ont leurs parties réelles négatives, alors  $x_0$  est asymptotiquement stable ;*
- (ii) *si une valeur propre de  $df_{x_0}$  a une partie réelle positive, alors  $x_0$  est instable.*

*Preuve.* On peut supposer  $x_0 = 0$ .

(i) On prend la fonction de Liapounov  $L$  pour  $A := df_0$  de la proposition 24.7. Donc

$$\frac{\partial L}{\partial f(x)}(x) = 2 \operatorname{Re}\langle x \mid f(x) \rangle.$$

Comme  $f(x) = 0 + df_0x + o(\|x\|)$  quand  $x \rightarrow 0$ , on a, d'après la formule (24.2) :

$$\frac{\partial L}{\partial f(x)}(x) = 2 \operatorname{Re}\langle x \mid df_0(x) \rangle + o(\|x\|^2) \leq -c\|x\|^2 + o(\|x\|^2) \leq \frac{c}{2}\|x\|^2,$$

si  $x$  est assez proche de 0. Ceci montre que  $L$  est une fonction de Liapounov pour  $f$  qui satisfait (24.3).

(ii) Si  $df_0$  a une valeur propre à partie réelle positive, alors le système linéaire  $x' = df_0x$  a une solution qui sort de toute boule centrée en 0. Cette propriété a encore lieu pour la solution correspondante de  $x' = f(x)$  par dépendance continue des paramètres.  $\square$



**Exercice 24.1.** Dire quelle est la nature du point critique  $(0, 0)$  des champs de vecteurs ci-dessous, à l'aide d'une fonction de Liapounov de la forme  $x^2 + ay^2$  :

$${}^t(-2xy^2 - x^3, -y + x^2y) \quad , \quad {}^t(2xy + x^3, -x^2 + y^3) \quad , \quad {}^t(x^3 + y^2, y^2 - y^3)$$

**Exercice 24.2.** Le système d'équations

$$\begin{cases} x' = x - 2x^2 - xy \\ y' = y - xy - 3y^2 \end{cases}$$

représente l'évolution de deux espèces en compétition. Trouver le point critique à coordonnées positives et donner sa nature.

### Références

1. H. Amann, *Ordinary differential equations*, de Gruyter, 1990, # 34/240.
2. T. Apostol, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley, 1957, # 27/51.
3. M.A. Armstrong, *Basic topology*, Springer, 1983, # 55/164.
4. G. Birkhoff and G.-C. Rota, *Ordinary differential equations*, Wiley, 1978, # 34/138.
5. H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, 1979, # 27/106.
6. J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk, *Multidimensional analysis I and II*, Cambridge University Press, 2004, # 26/99.
7. H. Flanders, *Differential forms with applications to physical sciences*, Academic Press, 1963, # 53/68.
8. M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of variations*, Springer, 1996, # 49/100.
9. R. Godement, *Analyse mathématique II et III*, Springer, 1998, # 27/274.
10. J. Grifone, *Algèbre linéaire*, Cepadues, 1990, # 15/138.
11. E. Hairer, *Polycopié d'Analyse II*, Université de Genève, 1998, [www.unige.ch/~hairer/poly\\_analyse2/avant.ps](http://www.unige.ch/~hairer/poly_analyse2/avant.ps).
12. E. Hairer and G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001, # 27/256.
13. P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Birkhäuser, 1981, # 34/59.
14. J. H. Hubbard and B. B. Hubbard, *Vector calculus, linear algebra and differential forms*, Matrix, 2007, # 27/288.
15. S. Lang, *Algèbre linéaire 2*, InterEditions, 1976, # 15/58.
16. J.E. Marsden and A.J. Tromba, *Vector calculus*, Freeman, 1981, # 27/161.
17. M.H. Protter and C.B. Morrey, *Intermediate calculus*, Springer, 1985, # 27/181.
18. F. Ronga, *Analyse réelle post-élémentaire*, Genève, 2007, #27/349  
[www.unige.ch/math/folks/ronga/lyse\\_II/2004-2005/links\\_lyse\\_II.pdf](http://www.unige.ch/math/folks/ronga/lyse_II/2004-2005/links_lyse_II.pdf).
19. M. Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Dunod, 2006, # 27/36.
20. M. Schreiber, *Differential forms : a heuristic introduction*, Springer, 1977, # 26/39.

adhérence, 6  
 aire, 57  
 asymptotiquement stable, 97  
 attracteur, 97  
 autonome (système), 75  
  
 Bernstein, polynôme, 7  
 boule, 5  
  
 $\mathcal{C}^k\mathcal{M}$ , 53  
 Cauchy, suite de, 10  
 centre de gravité, 54  
 changement de variables, 51  
 classe  $\mathcal{C}^k$ , 30  
 complet, 10  
 continue, application, 3  
 courbe paramétrée, 53  
 critique, point, 34  
  
 d, 68  
 dérivée
 

- directionnelle, 21
- partielle, 22

 difféomorphisme, 38  
 différentiable, 23, 24  
 différentielle, 23  
 différentielle extérieure, 68  
 distance, 2, 10  
 divergence, 59  
  
 épaissement, 15  
 équivalentes, normes, 3  
 espace tangent, 34  
 Euler, méthode, 83  
 Euler-Lagrange, 41  
 exacte (forme différentielle), 64, 68  
 exponentielle (d'un endomorphisme), 89  
 extremum, 22  
  
 fermé, 6  
 fermée (forme différentielle), 68  
 flot, 94  
 flux, 59  
 forme différentielle, 64, 67  
  
 Gauss (formule de), 59  
 gradient, 27  
 Gronwall (Lemme de), 82  
  
 Hausdorff, distance de, 15

## Index

image réciproque (forme différentielle), 64, 68  
 instable, 97  
 intégrale
 

- champ de vecteurs, 55, 59
- fonction, 54, 58
- forme différentielle, 65, 69

 inversion locale, 37  
  
 jacobienne, 22  
 Jordan (bloc de), 90  
  
 Liapounov, fonction de, 96  
 limite, 3  
 lipschitzienne, 78  
 longueur, 53  
  
 métrique, espace, 2  
  
 norme, 1  
  
 orbite, 75  
 orientée, 70  
 orientable, 58  
 orientation, 58  
 ouvert, 5  
  
 paramétrisation locale, 40  
 partition de l'unité, 70  
 Peano (Théorème de), 80  
 Picard-Lindelöf, 78  
 potentiel, 62  
 problème de Cauchy, 74  
 produit extérieur, 67  
  
 régulier, point, 34  
 résolvente, 85  
 rectifiable, 53  
 redressement, 95  
 rotationnel, 60  
  
 séparables (variables), 74  
 singulier (point), 95  
 solution (équation différentielle), 73  
 sous-variété, 38
 

- à bord, 71

 stable, point singulier, 97  
 Stokes (formule de), 60, 71  
 surface  $\mathcal{C}^1$ , 57