UNIVERSITÉ DE GENÈVE

FACULTÉ DES SCIENCES
SECTION DE MATHÉMATIQUES
H.-M. MAIRE

COURS D'ANALYSE II COMPLEXE 2004-05

Table des matières

0. Introduction

Ce polycopié contient la matière enseignée pendant les années 2002-03 à 2004-05 en Analyse complexe à l'Université de Genève. Le cours est destiné aux étudiants de deuxième année du Baccalauréat universitaire (Bachelor) en mathématiques et physique. Il est largement inspiré du livre de J.C. Burkill and H. Burkill [4]. Le cours d'Analyse I sert de référence de base (voir E. Hairer et G. Wanner [11]).

La première partie traite des *séries de Fourier* dont la convergence est étudiée en détail grâce aux théorèmes de Jordan 7.13 et Fejér 7.14. Ces deux résultats ont nécessité l'introduction de la notion de *fonction à variation bornée* à valeurs complexes sur un intervalle réel. L'intégrale de Stieltjes, qui généralise de l'intégrale de Riemann, est présentée dans ce contexte car elle conduit naturellement aux intégrales curvilignes, abondamment utilisées en deuxième partie. L'accent est mis sur les intégrales qui dépendent d'un paramètre (continuité, différentiabilité) car c'est un objet partout présent en Analyse. L'indice d'une courbe fermée rectifiable du plan complexe par rapport à un point en est un exemple.

En plus de la résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode de la séparation des variables, la solution du problème de Dirichlet dans le disque et l'inégalité isopérimétrique sont données comme applications de la théorie des séries trigonométriques. Une brève introduction à la transformation de Fourier termine la première partie.[1]

La deuxième partie consiste en l'étude des fonctions d'une variable complexe. Le théorème et la formule de Cauchy occupent une place prépondérante. Une version générale de la formule de Cauchy conduit au théorème des résidus qui permet de calculer nombre d'intégrales définies. Les résultats classiques (principes du prolongement analytique, du maximum, des zéros isolés, théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme d'une suite de fonctions holomorphes, théorème de Liouville) forment la partie centrale de la deuxième partie. Les fonctions méromorphes et le théorème de Rouché font l'objet du chapitre 15. On donne ensuite la construction de fonctions méromorphes avec des parties principales données et celle de fonctions holomorphes avec des zéros donnés.

Comme application de cette théorie, les fonction Γ d'Euler et ζ de Riemann sont présentées au chapitre 17. Une brève introduction à la transformation de Laplace termine le cours.[1]

Beaucoup d'autres sujets classiques (théorèmes de la représentation conforme, de Picard, de Runge, formule de Jensen, méthode de Perron, fonctions hypergéométriques, ...) ne sont pas abordés ici mais les étudiants qui ont acquis les notions de base du cours peuvent y accéder directement.

Genève, juin 2005

✠✠✠✠✠✠✠

[1] Pas couvert en 2004-05

1. Le corps des complexes

Définition 1.1. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels (x, y), on définit une addition par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et une multiplication par

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Proposition 1.2. *Avec ces lois, $\mathbb{R}^2$ devient un corps commutatif, le* corps des nombres complexes*, qu'on désigne par $\mathbb{C}$. L'élément neutre pour $+$ est $(0, 0)$, l'élément neutre pour $\cdot$ est $(1, 0)$. L'élément inverse de $(x, y) \neq (0, 0)$ est $(x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$.*

Remarque 1.3. L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui envoie x sur $(x, 0)$ est un homomorphisme injectif. Ceci permet d'identifier $\mathbb{R} \times \{0\}$ à $\mathbb{R}$ et d'écrire x pour $(x, 0)$.

Notation 1.4. Si z désigne le couple (x, y) et i désigne le couple $(0, 1)$, on a $z = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + y \cdot i$. Le nombre réel x est la *partie réelle* du nombre complexe $x+y\cdot i$, notation $x = \operatorname{Re} z$; le nombre réel y est la *partie imaginaire* du nombre complexe $x + y \cdot i$, notation $y = \operatorname{Im} z$.
On utilisera systématiquement la notation $x + iy$ pour les nombres complexes.

Remarque 1.5. L'espace $\mathbb{C}$ a aussi une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2, avec $\{1, i\}$ comme base. Mais c'est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension 1.

Notation 1.6. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$; le *conjugué complexe de* z est défini par $\bar{z} := x-iy$ et la *valeur absolue de* z est le nombre réel $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposition 1.7. *Pour z et w dans $\mathbb{C}$, on a :*

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \qquad |z|^2 = z\bar{z}$$

$$|zw| = |z||w|, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \qquad |\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|, \quad |z + w| \leqslant |z| + |w|.$$

Preuve. Seule la dernière inégalité n'est pas immédiate. On peut la déduire de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^2$ ou procéder directement comme suit :

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w} + |w|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.8. Il n'est pas possible de mettre une structure d'ordre sur $\mathbb{C}$ pour en faire un corps totalement ordonné. En effet, puisque 1 est différent de 0, on doit avoir $0 < 1$, car $0 > 1$ donne $-1 > 0$ en ajoutant -1 et $1 > 0$ en multipliant par -1. Maintenant, comme i est différent de 0, on doit avoir soit $i > 0$ et donc, en multipliant par i, $-1 = i^2 > 0$ puis $0 > 1$ en ajoutant 1, soit $i < 0$ et donc, en ajoutant $-i$, $0 < -i$, puis $0 < -1$ en multipliant par $-i$. Contradiction dans les deux cas.

Définition 1.9. Comme espace topologique (métrique), $\mathbb{C}$ est aussi identifié à $\mathbb{R}^2$. La distance est induite par la norme $z \mapsto |z|$. Les boules sont désignées par $\mathbb{D}(a,r)$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, car ce sont des disques.
La projection stéréographique π réalise une bijection continue de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ privée du pôle nord $N = (0,0,1)$ sur $\mathbb{C}$. En coordonnées, on a

$$\pi : (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2}) \mapsto \frac{x+iy}{1 \mp \sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Cette application suggère d'ajouter un point à l'infini à $\mathbb{C}$ pour en faire un espace compact $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Par définition :

$$z \to \infty \iff \pi^{-1}(z) \to N \iff \frac{1}{z} \to 0.$$

Ainsi un voisinage de l'infini est un ensemble qui contient l'extérieur d'un disque centré en 0 : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant R\}$.

Définition 1.10. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'*exponentielle de* z est le nombre complexe

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy}. \tag{1.1}$$

La propriété fondamentale de l'exponentielle

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{1.2}$$

provient des formules d'addition des fonctions trigonométriques. En effet, pour $z = x+iy$ et $w = u + iv$, on a :

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+u+i(y+v)} = e^{x+u}\big(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i \sin y \cos v + \sin y \cos v\big) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) e^u(\cos v + i \sin v). \end{aligned}$$

On peut aussi poser plus directement

$$e^z := 1 + z + z^2/2 + \cdots + z^n/n! + \ldots \tag{1.3}$$

car cette série converge absolument d'après $\sum |z^n/n!| = e^{|z|} < \infty$. La vérification de (1.2) découle du produit de Cauchy :

$$e^z e^w = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\Big(\sum_{m+n=p} p! \frac{z^m w^n}{m!n!}\Big) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z+w)^p}{p!} = e^{z+w}.$$

Elle permet de vérifier que (1.1) et (1.3) sont équivalentes.

Proposition 1.11. Propriétés de l'exponentielle complexe.
a) $e^z \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$;
b) $|e^{iy}| = 1,\ \forall y \in \mathbb{R}$;
c) $e^z = 1 \iff z = 2i\pi n$, *avec* $n \in \mathbb{Z}$;
d) $e^z = e^w \iff z = w + 2i\pi n$, *avec* $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve.
a) On a $e^x \neq 0$ puisque l'exponentielle d'un nombre réel ne s'annule jamais. Ensuite, $|\cos y + i \sin y| = 1$.
b) Cf. a).

c) De $e^z = 1$, on déduit $|e^z| = e^x = 1$ et donc $x = 0$. De $\cos y = 1$ et $\sin y = 0$, il suit que $y = 2i\pi n$, avec $n \in \mathbb{Z}$. L'implication inverse est immédiate.
d) Appliquer c) à e^{z-w}. $\square$

Définition 1.12. Soit $z = x + iy \neq 0$ un nombre complexe. Il exite $\theta \in \mathbb{R}$, déterminé à 2π près, tel que $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$ et $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$. On dit que θ est *un argument* de z. L'unique argument $\theta \in]-\pi, \pi]$ s'appelle l'*argument principal de* z. Notation : $\operatorname{Arg} z$. Donc $z = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}$ et on a :

$$z = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in \mathbb{R} \iff r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \operatorname{Arg} z + 2in\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1.13. *La fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est surjective (mais pas injective). En fait* $\forall z \in \mathbb{C}^*$*, le nombre complexe* $w = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$ *satisfait* $z = e^w$.

Définition 1.14. Le *logarithme principal de* $z \neq 0$ est le nombre complexe $\operatorname{Log} z := \log|z| + i \operatorname{Arg} z$. On a $\operatorname{Log} x = \log x$ quand x est réel positif. Tout w tel que $e^w = z$ est *un* logarithme de z.

Remarque 1.15. On a $e^{\operatorname{Log} z} = z$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$ et $\operatorname{Log} e^w = w$ seulement si $-\pi < \operatorname{Im} w \leqslant \pi$.

Définition 1.16. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $w \in \mathbb{C}$, on pose

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}.$$

Exemple 1.17.
a) $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(\log 1 + i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$;
b) $(-1)^i = e^{i(\log 1 + i\pi)} = e^{-\pi}$;
c) $z^n = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{(n-1)\operatorname{Log} z} \cdot e^{\operatorname{Log} z} = z^{n-1} \cdot z$, pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la définition de l'exponentielle complexe coïncide avec la définiton usuelle quand l'exposant est un entier $\geqslant 0$.

Proposition 1.18. *Pour* z, ζ *dans* $\mathbb{C}^*$ *et* v, w *dans* $\mathbb{C}$, *on a :*

$$z^{v+w} = z^v \cdot z^w, \quad (z\zeta)^w = z^w \cdot \zeta^w \cdot e^{2i\pi n(z,\zeta)},$$

où $n(z, \zeta)$ *est l'entier défini à l'Exercice* 1.6.

Exemple 1.19. (Quelques fonctions complexes)
a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = a \cdot z$, avec $a \in \mathbb{C}^*$. Rotation si $|a| = 1$, rotation suivie d'une homothétie en général.
b) $h : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $h(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, homographie qui se prolonge continûment en $\widehat{h} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ en posant $\widehat{h}(1) = \infty$ et $\widehat{h}(\infty) = 1$.
c) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z^2$.
d) $s : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $s(z) = z^{1/2}$.

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 1.1. Décrire les ensembles de nombres complexes définis par chacune des 5 conditions suivantes :

$$|z-i|=1, \quad |z+5|<1, \quad z+\bar{z}=1, \quad z-\bar{z}=-i, \quad z+\bar{z}=|z|^2.$$

Exercice 1.2. Vérifier que les points représentés par les nombres complexes a, b, c sont les sommets d'un triangle équilatéral si, et seulement si, $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

Exercice 1.3. Montrer l'identité de Lagrange

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |a_j\bar{b}_k - a_k\bar{b}_j|^2,$$

pour $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}$. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^n$:

$$\Big|\sum a_j\bar{b}_j\Big| \leqslant \Big(\sum |a_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum |b_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Exercice 1.4. La projection stéréographique $\mathbb{S}^2\backslash\{N\}\to\mathbb{C}$ est définie par $(x_1,x_2,x_3)\mapsto (x_1+ix_2)/(1-x_3)=z$, pour $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ et $N=(0,0,1)$. Vérifier les formules :

$$|z|^2=\frac{1+x_3}{1-x_3}; \quad x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \quad x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, \quad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

Exercice 1.5. Pour $a,c\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{C}$ avec $a\neq 0$ et $|b|^2>ac$, montrer que

$$az\overline{z}+b\overline{z}+\overline{b}z+c=0$$

est l'équation d'un cercle dans $\mathbb{C}$. Discuter le cas $a=0$.

Exercice 1.6. On suppose $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ avec $z_1z_2\neq 0$. Vérifier que :

$$\operatorname{Log}(z_1z_2)=\operatorname{Log}(z_1)+\operatorname{Log}(z_2)+2i\pi n(z_1,z_2),$$

où :

$$n(z_1,z_2)=\begin{cases} 1 & \text{si } -2\pi<\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2\leqslant -\pi,\\ 0 & \text{si } \ -\pi<\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2\leqslant \pi,\\ -1 & \text{si } \ \pi<\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Exercice 1.7. De Moivre (www-gap.dcs.st-and.ac.uk/˜history/Mathematicians).
a) Pour $a\in\mathbb{R}$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$, vérifier la formule :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^a=\cos(a\theta)+i\sin(a\theta).$$

b) Constater que la restriction sur θ est nécessaire.
c) Remarquer que la formule est vraie $\forall\theta\in\mathbb{R}$ si $a\in\mathbb{Z}$.

Exercice 1.8. Soit $w=u+iv$ un nombre complexe. Avec

$$z=x+iy \quad \text{où} \quad x:=\sqrt{(|w|+u)/2} \quad \text{et} \quad y:=\sqrt{(|w|-u)/2}$$

vérifier que $z^2=w$ si $v\geqslant 0$ et $\bar{z}^2=w$ si $v\leqslant 0$. En conclure que tout nombre complexe w non nul a deux racines. Constater que $w^{1/2}=z$ si $v\geqslant 0$ et $w^{1/2}=\bar{z}$ si $v\leqslant 0$.

2. Fonctions à variation bornée

Remarque 2.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone (au sens large). Alors $\lim_{x\nearrow c} f(x)$ et $\lim_{x\searrow c} f(x)$ existent pour tout $c \in]a,b[$. On les désigne par $f(c+0)$ ou $f(c+)$ et $f(c-0)$ ou $f(c-)$.
En effet, supposons f croissante. L'ensemble $f([a,c[) = \{f(x) \mid a \leqslant x < c\}$ est non vide et majoré. Soit $l := \sup f([a,c[)$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $x_1 \in [a,c[$ tel que $f(x_1) > l-\varepsilon$ car $l-\varepsilon$ n'est pas un majorant. Donc $f([x_1,c[) \subseteq]l-\varepsilon, l]$ par monotonie et et parce que l est un majorant. On a montré $l = \lim_{x\nearrow c} f(x)$.

Proposition 2.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $a < c_1 < \cdots < c_{n-1} < b$ un partage de $[a,b]$. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(c_k+) - f(c_k-) \leqslant f(b) - f(a).$$

Preuve. On choisit $x_1 = a,\ x_2 \in]c_1, c_2[,\ x_2 \in]c_2, c_3[, \ldots,\ x_n = b$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(c_k+) - f(c_k-) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(b) - f(a)$$

puisque $f(x_k) \leqslant f(c_k-) \leqslant f(c_k+) \leqslant f(x_{k+1})$. □

Corollaire 2.3. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone, l'ensemble de ses discontinuités est (au plus) dénombrable, car la somme des sauts de f est finie. Il s'agit de discontinuités de première espèce.*

Rappel. Une fonction monotone est intégrable au sens de Riemann ([11] III (5.11)).

Définition 2.4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est à *variation bornée* s'il existe $M > 0$ tel que pour tout partage $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a,b]$, on a

$$\sum_{0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leqslant M. \tag{2.1}$$

La même définition est faite pour les fonctions à valeurs dans un espace normé en remplaçant la valeur absolue par la norme.
On désigne par $\mathcal{VB}([a,b];\mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes à variation bornée sur $[a,b]$ et pour $f \in \mathcal{VB}([a,b];\mathbb{C})$, on pose

$$\mathrm{V}_{[a,b]}(f) = V(f) := \sup_P \sum_{0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|,$$

où P parcourt l'ensemble des partages de $[a,b]$. C'est la *variation totale* de f sur $[a,b]$. D'où une semi-norme sur $\mathcal{VB}([a,b],\mathbb{C})$. Ce n'est pas une norme car les constantes ont une variation nulle.
Il est immédiat de vérifier l'équivalence suivante :

$$f \in \mathcal{VB}([a,b];\mathbb{C}) \iff \operatorname{Re} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f \in \mathcal{VB}([a,b];\mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Remarque 2.5. Toute fonction à variation bornée est bornée (par $|f(a)| + \mathrm{V}(f)$).

Exemple 2.6.
a) Toute fonction monotone est à variation bornée.
En effet, pour f croissante, on peut enlever les valeurs absolues dans (2.1) et la somme vaut $f(b)-f(a)$.
b) Si $f\in\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ est différentiable sur $]a,b[$ et si sa dérivée f' est bornée, alors $f\in\mathcal{VB}([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathrm{V}(f)=\int_a^b|f'|$ quand f' est intégrable.
Soit $M'=\sup|f'|$; le théorème des accroissements finis donne $|f(x_{j+1})-f(x_j)|\leqslant M'(x_{j+1}-x_j)$, et donc $\mathrm{V}_{[a,b]}(f)\leqslant M'\sum(x_{j+1}-x_j)=M'(b-a)$. Si f' est intégrable, on a $|f(x_{j+1})-f(x_j)|=|\int_{x_j}^{x_{j+1}}f'|\leqslant\int_{x_j}^{x_{j+1}}|f'|$, d'où $\mathrm{V}(f)\leqslant\int_a^b|f'|$. Pour obtenir une inégalité en sens inverse, on donne $\varepsilon>0$; il existe un partage de $[a,b]$ tel que $\int_a^b|f'|\leqslant\sum|f'(\xi_j)|(x_{j+1}-x_j)+\varepsilon$, où $\xi_j\in[x_j,x_{j+1}]$. On peut prendre ξ_j tel que $f(x_{j+1})-f(x_j)=f'(\xi_j)(x_{j+1})-x_j)$ par le théorème des accroissements finis et obtenir $\int_a^b|f'|\leqslant\sum|f(x_{j+1})-f(x_j)|+\varepsilon$.
c) Une fonction continue n'est pas nécessairement à variation bornée. Par exemple $f(x)=x\sin 1/x$ pour $x\in]0,1]$ et $f(0)=0$.
Prendre des partages $x_0=0$, $x_j=1/(n-j)\pi$ pour $1\leqslant j\leqslant n-1$, $x_n=1$.
d) La fonction donnée par $f(x)=3x^{1/3}$, pour $x\in[0,1]$, est monotone, donc à variation bornée, mais sa dérivée n'est pas bornée sur $]0,1[$.

Remarque 2.7. Pour $a<c<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, on a $f\in\mathcal{VB}(a,b)$ si, et seulement si, $f|_{[a,c]}\in\mathcal{VB}(a,c)$ et $f|_{[c,b]}\in\mathcal{VB}(c,b)$. Dans ce cas $\mathrm{V}_{[a,b]}(f)=\mathrm{V}_{[a,c]}(f)+\mathrm{V}_{[b,c]}(f)$.

Définition 2.8. Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est *continue par morceaux* s'il existe un partage $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ de $[a,b]$ tel que $f|_{]x_j,x_{j+1}[}$ se prolonge continûment à $[x_j,x_{j+1}]$, pour $j=0,\dots,n-1$.
Notation : $\mathcal{CM}^0([a,b];\mathbb{C})$. Exemple : La fonction partie entière $f(x)=[x]$ sur $[0,10]$.

Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est de *classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* s'il existe un partage $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ tel que $f|_{]x_j,x_{j+1}[}$ a un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à $[x_j,x_{j+1}]$, pour $j=0,\dots,n-1$.
Notation : $\mathcal{CM}^1([a,b];\mathbb{C})$. Exemple : toute fonction affine par morceaux.

Proposition 2.9. *Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est à variation bornée.*

Preuve. Sur chaque morceau, on applique l'Exemple 2.6 b) puis la Remarque 2.7. □

Proposition 2.10. *Pour $f\in\mathcal{VB}([a,b];\mathbb{R})$, on a :*
a) la fonction $x\mapsto\mathrm{V}_{[a,x]}(f)=:v(x)$ est croissante ; elle est continue en tout point où f est continue ;
b) $v-f$ est croissante.

Preuve. Pour $a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$, on a $v(x)\leqslant\mathrm{V}_{[a,x]}(f)+\mathrm{V}_{[x,y]}(f)=v(y)$ d'après la Remarque 2.7. Si $\varepsilon>0$ est donné, il existe un partage $x_0=x<x_1<\cdots<x_n=b$ de $[x,b]$ tel que

$$\mathrm{V}_{[x,b]}(f)-\varepsilon\leqslant\sum_0^{n-1}|f(x_{j+1})-f(x_j)|.$$

Pour $y \in [x, x_1[$ on en déduit

$$V_{[x,b]}(f) - \varepsilon \leqslant |f(y) - f(x)| + |f(x_1) - f(y)| + \sum_{1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leqslant |f(y) - f(x)| + V_{[y,b]}(f),$$

donc

$$V_{[x,b]}(f) - V_{[y,b]}(f) = V_{[x,y]}(f) \leqslant |f(y) - f(x)| + \varepsilon.$$

Si f est continue en x, on peut supposer que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ quand $|y - x|$ est assez petit. On a montré a) car le raisonnement est similaire pour $y < x$.
Pour b), on observe que $f(y) - f(x) \leqslant V_{[x,y]}(f) = v(y) - v(x)$ et donc $v(x) - f(x) \leqslant v(y) - f(y)$.

□

Corollaire 2.11. *Une fonction réelle (continue) est à variation bornée si, et seulement si, elle est différence de deux fonctions monotones croissantes (continues). En particulier, une fonction à variation bornée n'a qu'un nombre dénombrable de discontinuités de première espèce.*

Preuve. $f = v - (v - f)$. □

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 2.1. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Est-elle à variation bornée ? Même question pour la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \sqrt{x} \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 2.2. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ satisfait une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x, y \in [a, b],\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$. Notation $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}([a, b])$. Montrer les assertions suivantes :
(1) $\alpha > 1 \Rightarrow \mathrm{Lip}_{\alpha}([a, b]) = \mathbb{C}$;
(2) $\mathrm{Lip}_1([a, b]) \subsetneq \mathcal{VB}([a, b])$
(3) $\mathrm{Lip}_{\alpha}([a, b]) \setminus \mathcal{VB}([a, b]) \neq \emptyset$.

Exercice 2.3. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, continue en b et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. On suppose que, pour tout $b' \in [a, b[$, la restriction de f à $[a, b']$ est $g-$intégrable sur $[a, b']$. Montrer que f est $g-$intégrable sur $[a, b]$ et que

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f \, \mathrm{d}g.$$

Exercice 2.4. Montrer l'équivalence (2.2).

Exercice 2.5. Montrer la Remarque 2.7.

3. Intégrales de Riemann-Stieltjes

Pour une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et un partage $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a,b]$, B. Riemann (1826-1866) considère les sommes

$$s(f,P) = \sum_0^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \ , \quad S(f,P) = \sum_0^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

où $m_i = \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f$ et $M_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f$. Quand $\sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P)$, on dit que f est intégrable au sens de Riemann.
T.J. Stieltjes (1856-1894) généralise cette théorie en remplaçant l'accroissement $x_{i+1} - x_i$ par $g(x_{i+1}) - g(x_i)$, où $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante (au sens large). D'où deux nouvelles sommes

$$s(f,P,g) = \sum_0^{n-1} m_i\big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\big) \ , \quad S(f,P,g) = \sum_0^{n-1} M_i\big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\big).$$

On vérifie immédiatement les inégalités suivantes :

$$(g(b) - g(a)) \inf f \leqslant s(f,P,g) \leqslant S(f,P,g) \leqslant (g(b) - g(a)) \sup f \tag{3.1}$$

et

$$P \subseteq Q \Longrightarrow s(f,P,g) \leqslant s(f,Q,g) \leqslant S(f,Q,g) \leqslant S(f,P,g). \tag{3.2}$$

Définition 3.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On dit que f est $g-$*intégrable (au sens de Stieltjes)* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \text{ partage } P \quad \text{on a} \quad \mu(P) < \delta \Longrightarrow S(f,P,g) - s(f,P,g) < \varepsilon,$$

où $\mu(P) := \max(x_{i+1} - x_i)$. On désigne par $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ la valeur de la limite. L'espace des fonctions $g-$intégrables sur $[a,b]$ sera désigné par $\mathcal{R}([a,b],g)$. Comme d'habitude, on complète la définition en posant

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = -\int_b^a f \, \mathrm{d}g, \quad \text{si} \quad b < a, \quad \text{et} \quad \int_a^a f \, \mathrm{d}g = 0.$$

Remarque 3.2. a) Quand $g(x) = x$, on retombe sur l'intégrale de Riemann d'après le théorème de Du Bois-Reymond et Darboux [11] III 5.8. Notation : $\mathcal{R}([a,b])$.
b) Si f est $g-$intégrable alors les sommes de Riemann-Stieltjes $\sum f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$, où $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tendent vers $\int f \, \mathrm{d}g$, quand $\mu(P) \to 0$. Réciproquement, si les sommes de Riemann-Stieltjes de f tendent vers une limite, alors $f \in \mathcal{R}([a,b],g)$.

Exemple 3.3.

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et g constante par morceaux, i.e., g est constante sur les sous-intervalles ouverts d'un partage $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, alors $f \in \mathcal{R}([a,b],g)$ et

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \sum_0^n f(x_j)\big(g(x_j+) - g(x_j-)\big), \quad \text{où} \quad g(a-) = g(a), \ g(b+) = g(b).$$

2) Si f et g ont un saut en un même point de $[a,b]$, alors f n'est pas $g-$intégrable. Exemple : pour $f(x) = [x] = g(x)$, on a $(M_j - m_j)\big(g(x_{j+1}) - g(x_j)\big) = 1$ si $0 \leqslant x_j < 1 \leqslant x_{j+1} < 2$.

3) $f \in \mathcal{R}([a,b])$ et $g \in \mathcal{C}^1([a,b]) \implies f \in \mathcal{R}([a,b],g)$ et $\int f\,\mathrm{d}g = \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. En effet, $\sum(M_j-m_j)\big(g(x_{j+1})-g(x_j)\big) \leqslant \sum(M_j-m_j)\sup g'(x_{j+1}-x_j)$ tend vers 0 quand la maille du partage tend vers 0 puisque f est Riemann intégrable.

Définition 3.4. Pour $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{C}$ bornées, on dit que f est *$g-$intégrable (au sens de Stieltjes)* s'il existe $I \in \mathbb{C}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout partage $P = \{x_0, \dots, c_n\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\mu(P) < \delta \Longrightarrow |\sum_0^{n-1} f(\xi_j)(g(x_{j+1}) - g(x_j)) - I| < \varepsilon, \quad \forall \xi_j \in [x_j, x_{j+1}]. \tag{3.3}$$

Le nombre complexe I est désigné par $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

L'intégrale $\int_a^b f|\,\mathrm{d}g|$ est définie de la même manière comme limite de sommes de Riemann-Stieltjes $\sum_0^{n-1} f(\xi_j)|g(x_{j+1}) - g(x_j)|$, quand elle existe.

Exemple 3.5. Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$, on montre comme à l'exemple 3.3 que f est $g-$intégrable et que $\int f\,\mathrm{d}g = \int fg'$.

Remarque 3.6. Puisque $\mathbb{C}$ est complet, la condition (3.3) est équivalente à la suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous partages $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ et $Q = \{y_0, \dots, y_n\}$ de maille plus fine que δ, on a, $\forall \xi_j, \in [x_j, x_{j+1}]$ et $\forall \eta_k, \in [y_k, y_{k+1}]$:

$$|\sum_0^{m-1} f(\xi_j)(g(x_{j+1}) - g(x_j)) - \sum_0^{n-1} f(\eta_k)(g(y_{k+1}) - g(y_k)| < \varepsilon, \tag{3.4}$$

Preuve. La condition (3.4) est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ il existe $\delta_l > 0$ tel que (3.4) a lieu avec $\varepsilon = 1/2l$ et $\delta = \delta_l$. On peut supposer que δ_l décroît. Pour chaque l, on choisit un partage P_l et une somme de Riemann-Stieltjes Σ_l correspondante. Alors la suite $\{\Sigma_l\}_{l\in\mathbb{N}^*}\}$ est une suite de Cauchy. Soit I sa limite. En passant à la limite dans l'inégalité $|\Sigma_l - \Sigma_p| < 1/2l$ si $p \geqslant l$, on obtient $|\Sigma_l - I| \leqslant 1/2l$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, on prend $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/l < \varepsilon$; soit Σ une somme de Riemann-Stieltjes pour un partage de maille plus fine que δ_l. Alors $|\Sigma - I| \leqslant |\Sigma - \Sigma_l| + |\Sigma_l - I| \leqslant \varepsilon$. Donc f est $g-$intégrable. □

Théorème 3.7. Condition d'intégrabilité :
$f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et $g \in \mathcal{VB}([a,b]) \implies f \in \mathcal{R}([a,b],g)$ et $|\int_a^b f\,\mathrm{d}g| \leqslant \int_a^b |f||\,\mathrm{d}g|$.

Preuve. Montrons (3.4). Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon/\mathrm{V}(g)$, si $|\xi - \eta| < \delta$, par continuité uniforme de f. On suppose d'abord que $Q = \{y_0, \dots, y_n\}$ est un partage plus fin que $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ et P de maille plus fine que δ. La situation suivante se présente :

$$x_j = y_k < y_{k+1} < \cdots < y_{k+l} = x_{p+1} \quad \text{avec} \quad l \geqslant 1.$$

On écrit

$$|f(\xi_j)\big(g(x_{j+1} - g(x_j)\big) - \sum_{p=0}^{l-1} f(\eta_{k+p})\big(g(y_{k+p+1}) - g(y_{k+p})\big)| =$$

$$|\sum_{p=0}^{l-1}\big(f(\xi_j) - f(\eta_{k+p})\big)\big(g(y_{k+p+1}) - g(y_{k+p})\big)| \leqslant \frac{\varepsilon}{V(g)} V_{[x_j,x_{j+1}]}(g).$$

En sommant sur j, on obtient (3.4).
Le cas général découle de ceci et de la comparaison des partages P, $P\cup Q$ et Q.

$\square$

Proposition 3.8. Bilinéarité de l'intégrale de Stieltjes :
a) Si $f_1,\ f_2\in\mathcal{R}([a,b],g)$ *et* $c_1,\ c_2\in\mathbb{C}$ *alors* $c_1f_1+c_2f_2\in\mathcal{R}([a,b],g)$ *et* $\int(c_1f_1+c_2f_2)\,\mathrm{d}g=c_1\int f_1\,\mathrm{d}g+c_2\int f_2\,\mathrm{d}g$ *;*
b) Si $f\in\mathcal{R}([a,b],g_1)\cap\mathcal{R}([a,b],g_2)$ *et* $c_1,\ c_2\in\mathbb{C}$ *alors* $f\in\mathcal{R}([a,b],c_1g_1+c_2g_2)$ *et* $\int f\,\mathrm{d}(cg_1+c_2g_2)=c_1\int f\,\mathrm{d}g_1+c_2\int f\,\mathrm{d}g_2$.

Preuve. Pour a), il suffit de vérifier l'inégalité suivante

$$|\sum(c_1f_1+c_2f_2)(\xi_j)(g(x_{j+1})-g(x_j))-c_1\int f_1\,\mathrm{d}g-c_2\int f_2\,\mathrm{d}g|\leqslant$$

$$|c_1||\sum f_1(\xi_j)(g(x_{j+1})-g(x_j))-\int f_1\,\mathrm{d}g|+|c_2||\sum f_2(\xi_j)(g(x_{j+1})-g(x_j))-\int f_2\,\mathrm{d}g|.$$

La preuve de b) est similaire. $\square$

Corollaire 3.9. *Soient* $f_1,\ f_2$ *et* $g_1,\ g_2$ *des fonctions réelles définies sur* $[a,b]$. *Si* $f_j\in\mathcal{R}([a,b],g_k)$ *pour* j *et* $k=1,\ 2$*, alors* $f_1+if_2\in\mathcal{R}([a,b],g_1+ig_2)$ *et on a :*

$$\int_a^b(f_1+if_2)\,\mathrm{d}(g_1+ig_2)=\int_a^b f_1\,\mathrm{d}g_1-\int_a^b f_2\,\mathrm{d}g_2+i\Big(\int_a^b f_1\,\mathrm{d}g_2+\int_a^b f_2\,\mathrm{d}g_1\Big).$$

Proposition 3.10. *Soit* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction réelle à variation bornée et* f *une fonction réelle* $g-$*intégrable. Alors* f *est* $v-$*intégrable, où* v *est la fonction variation de* g *de la Proposition 2.10.*

Preuve. Soit $M=\sup|f|$. Pour $\varepsilon>0$ donné, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout partage de maille $<\delta$ on a :

$$|\sum_0^{n-1}\big(f(\xi_j)-f(\eta_j)\big)\big(g(x_{j+1})-g(x_j)\big)|<\varepsilon\quad\text{et}\quad v(b)<\sum_0^{n-1}|g(x_{j+1})-g(x_j)|+\varepsilon/2M.$$

En échangeant au besoin ξ_j et η_j, on obtient :

$$\sum_0^{n-1}\big(M_j-m_j\big)|g(x_{j+1})-g(x_j)|\leqslant\varepsilon. \tag{3.5}$$

D'autre part,

$$\sum_0^{n-1}\big(M_j-m_j\big)\big(v(x_{j+1})-v(x_j)-|g(x_{j+1})-g(x_j)|\big)\leqslant$$

$$2M\sum_0^{n-1}\big(v(x_{j+1})-v(x_j)-|g(x_{j+1})-g(x_j)|\big)\leqslant 2M\big(v(b)-\sum_0^{n-1}|g(x_{j+1})-g(x_j)|\big)<\varepsilon.$$

En sommant cette inégalité et (3.5), il vient $\sum_0^{n-1}\big(M_j-m_j\big)\big(v(x_{j+1})-v(x_j)\big)<2\varepsilon$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 3.11. Cette propriété permet de ramener les intégrales de Stieltjes de fonctions réelles avec intégrant à variation bornée, à un intégrant monotone. On l'utilise dans preuve de la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle à variation bornée. Alors*
a) f_1 *et* $f_2 \in \mathcal{R}([a, b], g; \mathbb{R}) \implies f_1 f_2 \in \mathcal{R}([a, b], g)$ *;*
b) $f \in \mathcal{R}([a, b], g, \mathbb{R}) \implies |f| \in \mathcal{R}([a, b], g)$ *et* $|\int f\,\mathrm{d}g| \leqslant \int |f||\,\mathrm{d}g|$ *;*
c) $f \in \mathcal{R}([a, b], g; \mathbb{R})$ *et* $\inf |f| > 0 \implies 1/f \in \mathcal{R}([a, b], g)$*.*

Proposition 3.13. Intégration par parties :
$f \in \mathcal{R}([a, b], g) \implies g \in \mathcal{R}([a, b], f)$ *et* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = fg|_a^b - \int_a^b g\,\mathrm{d}f$*.*

Preuve. Soit $Q = \{y_0, \ldots, y_n\}$ un partage de $[a, b]$ et $\eta_j \in [y_j, y_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$. On peut supposer que les η_j sont tous distincts, car si $\eta_k = \eta_{k+1} = y_k$, dans la somme de Riemann-Stieltjes
$$\sum g(\eta_j)(f(y_{j+1}) - f(y_j)),$$
les termes faisant apparaître y_k se détruisent et on remplace le partage Q par $Q \setminus \{y_k\}$; la maille du nouveau partage est au plus 2 fois la maille de Q.
On introduit $\eta_{-1} = a$ et $\eta_n = b$ puis on écrit,
$$\begin{aligned}\sum_0^{n-1} g(\eta_j)\big(f(y_{j+1}) - f(y_j)\big) &= \sum_0^{n-1} f(y_{j+1})g(\eta_j) - \sum_0^{n-1} f(y_j)g(\eta_j)\\ &= \sum_1^{n} f(y_j)\big(g(\eta_{j-1}) - g(\eta_j)\big) - f(y_0)g(\eta_0) + f(y_n)g(\eta_n)\\ &= \sum_0^{n} f(y_j)\big(g(\eta_{j-1}) - g(\eta_j)\big) + f(b)g(b) - f(a)g(a).\end{aligned}$$
La dernière somme est une somme de Riemann-Stieltjes pour $-\int f\,\mathrm{d}g$ correspondant au partage $P = \{\eta_{-1}, \ldots, \eta_n\}$. Le résultat en découle puisque $\mu(P) \leqslant 2\mu(Q)$. □

Théorème 3.14. Formules de la moyenne. *Pour f et g à valeurs réelles, on a :*
1) $f \in \mathcal{R}([a, b], g)$ *et g monotone* $\implies \exists \eta \in [\inf f, \sup f]$ *tel que* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \eta \int_a^b \mathrm{d}g$ *et en particulier, quand f est continue,* $\exists \xi \in [a, b]$ *tel que* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = f(\xi) \int_a^b \mathrm{d}g$ *;*
2) f *monotone et* $g \in \mathcal{C}^0([a, b]) \implies \exists \xi \in [a, b]$ *tel que* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = f(a) \int_a^\xi \mathrm{d}g + f(b) \int_\xi^b \mathrm{d}g$*.*

Preuve. Pour tout partage $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ et $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, on a
$$\inf f \sum \big(g(x_{j+1}) - g(x_j)\big) \leqslant \sum f(\xi_j)\big(g(x_{j+1}) - g(x_j)\big) \leqslant \sup f \sum \big(g(x_{j+1}) - g(x_j)\big).$$
L'existence de η en découle. Quand f est continue, le théorème de la valeur intermédiaire donne ξ.
Pour prouver 2), on applique 1) à $\int g\,\mathrm{d}f$ après avoir intégré par parties :
$$\begin{aligned}\int_a^b f\,\mathrm{d}g = fg|_a^b - \int_a^b g\,\mathrm{d}f &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(\xi)\big(f(b) - f(a)\big)\\ &= f(a)\big(g(\xi) - g(a)\big) + f(b)\big(g(b) - g(\xi)\big).\end{aligned}$$
□

Exemple 3.15. Si f est monotone et $u \in \mathcal{R}([a,b])$ alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)u(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi u(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b u(x)\,\mathrm{d}x$.
Il suffit en effet d'appliquer 2) à g définie par $g(x) = \int_a^x u$.

Intégrales impropres

On généralise la théorie de l'intégrale de Riemann-Stieltjes au cas où soit l'intervalle d'intégration soit l'intégrant f est non borné. On supposera que les fonctions $f,\ g : [a,b[\to \mathbb{C}$ sont telles que $f|_{[a,b']}$ est $g|_{[a,b']}-$intégrable, pour tout $b' < b$. Par exemple, $b = \infty$ est permis.

Définition 3.16. Pour $f,\ g : [a,b[\to \mathbb{C}$ avec $f|_{[a,b']} \in \mathcal{R}([a,b'], g|_{[a,b']})$ pour tout $b' < b$, on dit que $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existe* ou *converge* si $\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,\mathrm{d}g$ existe. Elle *converge absolument* si $\int_a^b |f||\,\mathrm{d}g|$ converge, i.e., si les intégrales $\int_a^{b'} |f||\,\mathrm{d}g|$ sont bornées pour $b' < b$, ce qu'on abrège en $\int_a^b |f||\,\mathrm{d}g| < \infty$. La convergence absolue entraîne la convergence.

Exemple 3.17. Pour $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ continue, on a :
$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}[x]$ converge $\iff$ $\sum_1^\infty f(k)$ converge ;
$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}[x]$ converge absolument $\iff$ $\sum_1^\infty |f(k)| < \infty$.

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 3.1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, continue en b et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. On suppose que, pour tout $b' \in [a,b[$, la restriction de f à $[a,b']$ est $g-$intégrable sur $[a,b']$. Montrer que f est $g-$intégrable sur $[a,b]$ et que

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \lim_{b'\nearrow b}\int_a^{b'} f\,\mathrm{d}g.$$

Exercice 3.2. Donner une preuve de l'énoncé c) de la Proposition 3.12.

Exercice 3.3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x + 1/2^n$ si $x \in]1/2^{n+1}, 1/2^n]$ et $g(0) = 0$. Calculer $\int_0^1 x\,\mathrm{d}g(x)$.

Exercice 3.4. Utiliser la formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Stieltjes pour montrer, quand $s \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^s} = s\int_1^{2n} \frac{2[x/2]-[x]}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3.5. On donne une fonction $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante, tendant vers 0 à l'infini, et une fonction $g : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ localement intégrable dont l'intégrale sur tout intervalle fini est bornée par une constante. À l'aide du deuxième théorème de la moyenne, montrer que $\int_1^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Application à $\int_0^\infty \sin x/x\,\mathrm{d}x$.

4. Fonctions définies par des intégrales

Proposition 4.1. *Soit f une fonction continue sur le produit $[a,b]\times K$, où K est un espace métrique compact, et $g\in\mathcal{VB}([a,b])$. Alors la fonction F sur K définie par $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ est uniformément continue.*

Preuve. On écrit, pour y et $y_0\in K$:

$$|F(y)-F(y_0)|=|\int_a^b\big(f(x,y)-f(x,y_0)\big)\,\mathrm{d}g(x)|\leqslant\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y)-f(x,y_0)|\,\mathrm{V}(g).$$

Puisque $[a,b]\times K$ est compact, f est uniformément continue. Pour $\varepsilon>0$ donné, il existe donc $\delta>0$ tel que $\operatorname{dist}(y,y_0)<\delta$ entraîne $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$, $\forall x\in[a,b]$ et ainsi, $\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$. D'où $|F(y)-F(y_0)|<\varepsilon V(g)$ si $\operatorname{dist}(y,y_0)<\delta$. □

Proposition 4.2. *Pour $g\in\mathcal{VB}([a,b])$ et $f\in\mathcal{R}([a,b],g)$, la primitive $F(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}g$ satisfait :*
a) $F\in\mathcal{VB}([a,b])$ et $V(F)\leqslant\sup|f|V(g)$:
b) $g\in\mathcal{C}^0\implies F\in\mathcal{C}^0$;
c) $f\in\mathcal{C}^0$ et $g\in\mathcal{C}^1\implies F\in\mathcal{C}^1$ et $F'=fg'$.

Preuve. a) Soit $P=\{a,x_1,\dots,b\}$ un partage de $[a,b]$. On a

$$\sum_0^{n-1}|F(x_{j+1})-F(x_j)|=\sum_0^{n-1}|\int_{x_j}^{x_{j+1}}f\,\mathrm{d}g|\leqslant\sup|f|\int_a^b|\,\mathrm{d}g|=\sup|f|\,\mathrm{V}(g).$$

b) Puisque g est continue, la fonction de variation de g est continue, cf. Proposition 2.10 partie b). On a

$$|F(x+h)-F(x)|=|\int_x^{x+h}f\,\mathrm{d}g|\leqslant\sup|f|\big(v(x+h)-v(x)\big)$$

et la dernière parenthèse tend vers 0 quand h tend vers 0.
c) On sait que $\int_0^x f\,\mathrm{d}g=\int_0^x fg'$ et le résultat découle du théorème fondamental du calcul différentiel([11] III.6.9) qui est aussi vrai pour les fonctions à valeurs complexes en séparant le réel de l'imaginaire. □

Exemple 4.3. Pour $f\in\mathcal{R}([a,b])$ et $h\in\mathcal{C}([a,b])$, on a, avec $F(x)=\int_a^x f$:

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}F(x)=\int_a^b h(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En effet, soit $\varepsilon>0$ donné. Pour un partage $\{x_0,\dots,x_n\}$ de $[a,b]$, on a

$$|\sum h(\xi_j)\big(F(x_{j+1})-F(x_j)\big)-\int_a^b hf|=|\sum\int_{x_j}^{x_{j+1}}\big(h(\xi_j)-h(t)\big)f(t)\,\mathrm{d}t|\leqslant\varepsilon\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

dès que la maille du partage est assez fine, car h est uniformément continue.

Proposition 4.4. *Soit $g\in\mathcal{VB}([a,b])$ et $f_k\in\mathcal{R}([a,b],g)$ une suite telle que f_k converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors f est $g-$intégrable et $\int_a^x f_k\,\mathrm{d}g\to\int_a^x f\,\mathrm{d}g$ uniformément.*

Preuve. D'après l'inégalité fondamentale, pour tous k et $l \in \mathbb{N}$ on a :

$$|\int f_k \, \mathrm{d}g - \int f_l \, \mathrm{d}g| \leqslant \sup |f_k - f_l| \int |\, \mathrm{d}g|.$$

La suite $\{\int f_k \, \mathrm{d}g\}_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy. Soit I sa limite. Montrons que f est $g-$intégrable et que $\int f \, \mathrm{d}g = I$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sup |f - f_k| \leqslant \varepsilon / 3 \, \mathrm{V}(g)$ et $|\int f_k \, \mathrm{d}g - I| < \varepsilon/3$. Comme f_k est $g-$intégrable, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout partage P de $[a,b]$ de maille plus petite que δ, on a :

$$|\sum f_k(\xi_j) \Delta_j g - \int f_k \, \mathrm{d}g| < \varepsilon/3, \quad \text{où} \quad \Delta_j g = g(x_{j+1}) - g(x_j) \quad \text{et} \quad \xi_j \in [x_j, x_{j+1}].$$

En regroupant ces trois inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} &|\sum f(\xi_j) \Delta_j g - I| \leqslant \\ &\qquad |\sum \big(f(\xi_j) - f_k(\xi_j)\big) \Delta_j g| + |\sum f_k(\xi_j) \Delta_j g - \int f_k \, \mathrm{d}g| + |\int f_k \, \mathrm{d}g - I| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

N.B. Le théorème des accroissements finis est faux pour les fonctions à valeurs complexes. Le lemme suivant le remplace dans bien des cas.

Lemme 4.5. *Si $u : [y, y+h] \to \mathbb{C}$ est continûment différentiable, on a :*

$$\begin{aligned} |u(y+h) - u(y)| &\leqslant |h| \sup_{y \leqslant \eta \leqslant y+h} |u'(\eta)|, \\ |u(y+h) - u(y) - hu'(y)| &\leqslant |h| \sup_{y \leqslant \eta \leqslant y+h} |u'(\eta) - u'(y)|. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Preuve. Puisque la fonction $t \to u(y+th) - thu'(y)$ a pour dérivée $h\big(u'(y+th) - u'(y)\big)$, le théorème fondamental [11] III.6.9 donne

$$u(y+h) - u(y) - hu'(y) = h \int_0^1 \big(u'(y+th) - u'(y)\big) \, \mathrm{d}t.$$

La deuxième inégalité de (4.1) en découle, la preuve de la première est similaire. □

Proposition 4.6. *Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ continue, continûment différentiable en la deuxième variable et $g \in \mathcal{VB}([a,b])$. Alors la fonction F définie par $F(y) = \int_a^b f(x,y) \, \mathrm{d}g(x)$ est continûment différentiable sur $[c,d]$ et on a :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^b f(x,y) \, \mathrm{d}g(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \, \mathrm{d}g(x).$$

Remarque 4.7. L'exercice 4.2 explique pourquoi on a besoin de la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Preuve. Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est uniformément continue sur $[a,b] \times [c,d]$, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que $|\dfrac{\partial f(x,\eta)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}| < \varepsilon$ si (x,y) et $(x,\eta) \in [a,b] \times [c,d]$, $|\eta - y| < \delta$.

Par définition de F et grâce au lemme (4.5) appliqué à $f(x,\cdot)$, on a, pour $0<h<\delta$, si $[y,y+h]\subseteq[c,d]$:

$$\left|F(y+h)-F(y)-h\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}g(x)\right| = \left|\int_a^b \Big(f(x,y+h)-f(x,y)-h\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}g(x)\right|$$
$$\leqslant h \sup_{y\leqslant\eta\leqslant y+h}\left|\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial y}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\int_a^b |\,\mathrm{d}g(x)| \leqslant h\varepsilon V(g).$$

Le résultat en découle en divisant par h. □

Remarque 4.8. Sous les mêmes hypothèses avec en plus a et b de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y).$$

Pour les intégrale de Riemann, la dérivablité sous le signe somme est garantie dès que $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$ est intégrable et que $y\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe et est continue en y, uniformément en $x\in[a,b]$.

Le cas des intégrales impropres dépendant de paramètres est un peu plus délicat et nécessite la convergence uniforme ou dominée.

Proposition 4.9. *Soit f une fonction continue sur le produit $[a,b[\times K$, ou K est un espace métrique compact, et $g:[a,b[\to\mathbb{C}$ une fonction à variation bornée sur tout sous-intervalle $[a,b']$, $b'<b$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ convergent uniformément, i.e., $\forall\varepsilon>0$, il existe $b'\in[a,b[$ tel que $|\int_{b'}^{b''} f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)|<\varepsilon$, $\forall y\in K$ et $\forall b''\in]b',b[$. Alors la fonction F sur K définie par $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ est continue.*

Preuve. On prend une suite $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers b. Alors $F_n(y):=\int_a^{b_n} f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ définit une suite de fonctions continues sur K. Comme

$$|F_n(y)-F_p(y)| = \left|\int_{b_n}^{b_p} f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)\right|$$

tend vers 0 uniformément en $y\in K$, la suite de fonctions $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et sa limite F est continue. On a montré

$$\int_a^b f(x,y_0)\,\mathrm{d}g(x) = F(y_0) = \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}g(x). \tag{4.2}$$

□

Exemple 4.10. La convergence dominée : $|f(x,y)|\leqslant\varphi(x)$, $\forall(x,y)\in[a,b[\times K$ avec $\int_a^b\varphi|\,\mathrm{d}g|<\infty$ entraîne la convergence uniforme.

Remarque 4.11. Énoncé analogue pour une suite $f_n:[a,b[\to\mathbb{C}$ qui converge vers f uniformément sur $[a,b'[$, $\forall b'<b$, et telle que $\forall\varepsilon>0$, il existe $b'\in[a,b[$ tel que $|\int_{b'}^{b''} f_n(x)\,\mathrm{d}g(x)|<\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall b''\in]b',b[$. La convergence uniforme de f_n vers f sur $[a,b[$ n'est pas suffisante pour pouvoir échanger lim et $\int$, voir Exercice 4.3.

Proposition 4.12. *Soit $f : [a,b[\times[c,d] \to \mathbb{C}$ continue, continûment différentiable en la deuxième variable et $g : [a,b[\to \mathbb{C}$ une fonction à variation bornée sur tout sous-intervalle $[a,b']$, $b' < b$. On suppose que pour $y_0 \in [c,d]$ l'intégrale $\int_a^b f(x,y_0)\,\mathrm{d}g(x)$ converge et que les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ convergent uniformément. Alors la fonction F définie par $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ est continûment différentiable et on a :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}g(x).$$

Preuve. D'après le résultat précédent, la fonction G définie par $G(y) = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ est continue.
D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n donnée par $F_n(y) = \int_a^{b_n} f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$, où $b_n \in [a,b[$, est différentiable et on a

$$F_n'(y) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$$

par la Proposition 4.6. Par hypothèse, si $b_n \to b$ quand $n \to \infty$ alors $F_n' \to G$ uniformément sur $[c,d]$. En intégrant F_n' de y_0 à y, on obtient que $F_n(y) - F_n(y_0)$ converge uniformément vers $\int_{y_0}^{y} G(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ et donc que $F_n(y)$ converge uniformément vers $\int_{y_0}^{y} G(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int_a^b f(x,y_0)\,\mathrm{d}g(x)$. Ceci montre que l'intégrale $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}g(x)$ existe ; sa dérivée vaut évidemment G. $\square$

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 4.1. Soient $0 < a < b$ et $s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Calculer $\int_a^b x^s(\log x)^2 dx$ en différentiant $\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x$ par rapport à s

Exercice 4.2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \geqslant 0$, soit :

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y} \\ -x + 2\sqrt{y} & \text{si } \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{y} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On prolonge f à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(x,y) = -f(x,-y)$ pour $y < 0$. Comparer les expressions :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)_{y=0} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.3. On définit la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n + x^2/n}$, $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $f_n \to 0$ uniformément, mais que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n \not\to 0$.

Exercice 4.4. On suppose que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à variation bornée sur $[0, b]$ pour tout $b > 0$, et que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Montrer que :

$$\lim_{y\to 0^+} y \left(\int_0^\infty e^{-xy} f(x)dx \right) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Indication : Intégrer par parties.

5. Chemins, courbes, intégrales curvilignes, indice

Définition 5.1. Un *chemin* ou *courbe paramétrée* dans $\mathbb{C}$ est une fonction continue d'un intervalle fermé $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Deux chemins $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\delta : [c, d] \to \mathbb{C}$ sont *équivalents* s'il existe une bijection continue $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ telle que $\gamma = \delta\circ\varphi$ (et donc $\delta = \gamma\circ\varphi^{-1}$).
Une *courbe* est une classe d'équivalence de chemins.
Une *courbe orientée* est une classe d'équivalence de chemins pour la relation précédente avec φ strictement croissante.
Une *courbe différentiable [différentiable par morceaux]* est une classe d'équivalence de chemins différentiables [différentiables par morceaux] pour la relation précédente avec φ et φ^{-1} différentiables.
Le *support* ou la *trace* d'une courbe Γ est l'ensemble $\{\gamma(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [a, b]\}$ où la fonction $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ représente la courbe Γ.
Une courbe Γ est *simple* si, pour $\gamma \in \Gamma$, $\gamma|_{[a,b[}$ et $\gamma|_{]a,b]}$ sont injectifs. Elle est *fermée* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Une courbe Γ est *rectifiable* si $\forall\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\sup_P \sum |\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)| < \infty$$

où P parcourt l'ensemble des partages de $[a, b]$, de manière équivalente si γ est à variation bornée. Cette borne supérieure est la *longueur* $L(\Gamma)$ de Γ, donc $L(\Gamma) = V(\gamma)$.

Théorème 5.2. Théorème de Jordan. *Soit Γ une courbe fermée simple dans $\mathbb{C}$ (courbe de Jordan). Alors $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\Gamma$ a deux composantes connexes, l'une bornée appelée* intérieur *et l'autre non bornée appelée* extérieur.

Preuve. Elle est difficile. Voir [3]. □

Proposition 5.3. *Soit Γ une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Alors Γ est rectifiable et*

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\operatorname{Re}\gamma')^2 + (\operatorname{Im}\gamma')^2}, \quad \forall\gamma \in \Gamma.$$

Preuve. Il suffit de raisonner sur chaque morceau. On peut donc supposer que γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout partage $\{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, on a :

$$\sum |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = \sum | \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'| \leqslant \sum \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'| = \int_a^b |\gamma'|.$$

Par suite, $V(\gamma) \leqslant \int_a^b |\gamma'|$. Pour montrer l'inégalité en sens inverse, on donne $\varepsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| \leqslant \varepsilon$ si $s,\ t \in [a, b]$ et $|s - t| < \delta$. Soit $\{t_0, \dots, t_n\}$

un partage de maille plus petite que δ. Le Lemme 4.5 donne les majorations suivantes, pour $j = 0, \dots, n-1$:

$$|\gamma'(t_j)|(t_{j+1} - t_j) - |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| \leqslant |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) - \gamma'(t_j)(t_{j+1} - t_j)| \leqslant (t_{j+1} - t_j)\varepsilon.$$

En sommant sur j, on obtient

$$\sum |\gamma'(t_j)|(t_{j+1} - t_j) - \sum |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| \leqslant (b-a)\varepsilon,$$

Comme la première somme approche $\int |\gamma'|$ et que la deuxième somme approche $V(\gamma)$, on a montré $\int |\gamma'| \leqslant V(\gamma)$. □

Définition 5.4. Étant donné $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ rectifiable et $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ continue, on définit l'*intégrale curviligne de f le long de γ* par :

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f\circ\gamma \;\mathrm{d}\gamma = \int_a^b f\circ\gamma(t)\,\mathrm{d}\gamma(t).$$

Pour tout changement croissant de paramétrage φ, on a $\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\varphi} f$, ce qui montre que $\int_\Gamma f$ est bien défini pour une courbe orientée rectifiable Γ.

Exemple 5.5. Quand Γ est un cercle positivement orienté centré en $a \in \mathbb{C}$ parcouru une fois, on a

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2i\pi.$$

Il suffit en effet de paramétrer le cercle par $\gamma(t) = a + e^{2i\pi t}$, $t \in [0,1]$ et d'intégrer

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\gamma(t)-a} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma(t)-a} = \int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}\,\mathrm{d}t}{e^{2i\pi t}} = 2i\pi \int_0^1 \mathrm{d}t.$$

Lemme 5.6. *Soit Γ une courbe rectifiable orientée dans un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une courbe polygonale orientée Γ_ε dans Ω, de mêmes extrémités que Γ, telle que*

$$\left|\int_\Gamma f - \int_{\Gamma_\varepsilon} f\right| < \varepsilon.$$

Preuve. Soit $\gamma : [0,1] \to \Omega$ une paramétrisation de Γ et $K := \gamma([0,1])$. Puisque K est un compact contenu dans Ω, la distance ρ de K au complémentaire de Ω est positive. Alors le sous-ensemble $K' := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(z,K) \leqslant \rho/2\}$ est compact et il est contenu dans Ω. Pour $\varepsilon > 0$ donné, par continuité uniforme de f sur K', il existe $\delta > 0$ tel que :

$$z,\ w \in K' \quad \text{et} \quad |z-w| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

De même, par continuité uniforme de γ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$s,\ t \in [0,1] \quad \text{et} \quad |s-t| < 1/n \Longrightarrow |\gamma(s) - \gamma(t)| < \min(\delta, \rho/2).$$

Soit $\tilde\gamma : [0,1] \to \Omega$ la courbe polygonale par les points $\gamma(0),\ \gamma(1/n), \dots, \gamma(1)$. Par construction, on a $\tilde\gamma([0,1]) \subset K'$.

Puisque $f\circ\gamma$ est continue et que γ est à variation bornée, le théorème 3.7 permet d'affirmer que si n est assez grand, alors

$$|\int_\Gamma f - \sum_0^{n-1}(f\circ\gamma)(t_j)\big(\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j)\big)| < \varepsilon, \quad \text{où} \quad t_j = j/n. \tag{5.1}$$

La somme ci-dessus est égale à

$$\sum_0^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(f\circ\tilde\gamma)(t_j)\,\mathrm{d}\tilde\gamma.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on a

$$|\int_{t_j}^{t_{j+1}}(f\circ\tilde\gamma)(t_j)\,\mathrm{d}\tilde\gamma - \int_{t_j}^{t_{j+1}}(f\circ\tilde\gamma)\,\mathrm{d}\tilde\gamma| < \varepsilon\int_{t_j}^{t_{j+1}}|\,\mathrm{d}\tilde\gamma|.$$

En sommant ces dernières inégalités et en utilisant (5.1), il vient

$$|\int_\Gamma f - \int_{\tilde\gamma} f| < \varepsilon + \varepsilon L(\tilde\gamma) \leqslant \varepsilon(1+L(\Gamma)).$$

□

Théorème 5.7. *Si Γ est une courbe orientée rectifiable fermée dans $\mathbb{C}$ qui ne passe pas par a, alors le nombre*

$$n(\Gamma,a) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} \tag{5.2}$$

*est entier. C'est l'*indice de Γ par rapport à a.

Preuve. On peut supposer Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (en fait polygonale). En effet, le Lemme 5.6 donne

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \lim_{1/2>\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{z-a} \in \mathbb{Z}$$

car Γ_ε ne passe pas par a quand ε est assez petit.
Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux paramétrisant Γ et introduisons $F(t) := \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma-a}$. D'après la Proposition 4.2, F est continue et $\mathcal{CM}^1$. De plus, $F'(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$ si F est différentiable au point t. La fonction $G : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $G(t) := e^{-F(t)}\big(\gamma(t)-a\big)$ est ausssi de classe $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{CM}^1$ et

$$G'(t) = e^{-F(t)}\gamma'(t) - F'(t)e^{-F(t)}\big(\gamma(t)-a\big) = 0$$

si G est différentiable au point t. Donc G est constante par morceaux, donc constante puisque continue. D'où $G(1) = G(0)$ et ainsi

$$e^{-F(1)}\big(\gamma(1)-a\big) = e^{-F(0)}\big(\gamma(0)-a\big)$$

ce qui donne $e^{-F(1)} = 1$ puisque $\gamma(1) = \gamma(0)$ et $F(0) = 0$. D'après la Proposition 1.11, on en déduit $F(1) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. □

Corollaire 5.8. *L'indice* $n(\Gamma,\cdot)$ *est constant dans chaque composante connexe de* $\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\Gamma$. *Il est nul dans la composante non bornée.*

Preuve. Par continuité de $a\to n(\Gamma,a)$ (Prop. 4.1), l'indice est localement constant car à valeurs entières. Soit $a_0\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\Gamma$; l'ensemble

$$\{a\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\Gamma \mid n(\Gamma,a)=n(\Gamma,a_0)\}$$

est fermé ($n(\Gamma,\cdot)$ continu) et ouvert ($n(\Gamma,\cdot)$ localement constant). Il est donc égal à la composante connexe de a_0.

Quand $|a|$ est très grand, $\sup|\dfrac{\gamma'}{\gamma-a}|$ est très petit, donc l'indice est nul. □

Remarque 5.9. L'indice $n(\Gamma,a)$ compte le nombre de fois que Γ entoure a dans le sens suivant : on trace une courbe $\varphi:[0,\infty[\to\mathbb{C}$ de a à l'infini qui coupe transversalement $\operatorname{supp}\Gamma$ en un nombre fini de points $\varphi(s_1),\dots,\varphi(s_n)$. On sait que $s\mapsto n(\Gamma,\varphi(s))$ est constant dans $[0,s_1[$, $]s_1,s_2[$, ... et qu'il saute de ±1 en chaque s_j (cf. Exercice 5.3). De plus, $n(\Gamma,\infty)=0$.

Exemple 5.10. Si Γ est une courbe de Jordan rectifiable, alors l'indice vaut ±1 à l'intérieur et 0 à l'extérieur de Γ. En effet, $n(\Gamma,\infty)=0$ et on traverse une fois $\operatorname{supp}\Gamma$ pour passer de l'extérieur à l'intérieur de Γ.

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 5.1. Calculer la longueur de la courbe paramétrée par

$$\gamma(t)=e^{\frac{-1+i}{t}}\quad \text{si}\quad t\in]0,1],\quad \gamma(0)=0.$$

Exercice 5.2. On donne $\gamma_r(t)=re^{it}$, pour $r>0$ et $t\in[0,\pi]$. Vérifier que

$$\lim_{r\to0}\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z=i\pi,\quad \lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z=0,\quad \lim_{r\to0}\int_{\gamma_r}|\frac{e^{iz}}{z}||\,\mathrm{d}z|=\pi.$$

Exercice 5.3. Pour $x\neq y\in\mathbb{C}$ et $\epsilon>0$, posons :

$$a_\epsilon^\pm=\frac{x+y}{2}\pm i\epsilon\frac{x-y}{2},\qquad \gamma(t)=tx+(1-t)y$$

Montrer que, quand $\epsilon\to0$:

$$\int_\gamma\frac{dz}{z-a_\epsilon^+}-\int_\gamma\frac{dz}{z-a_\epsilon^-}\longrightarrow\pm2i\pi$$

Exercice 5.4. Donner un exemple de courbe Γ fermée rectifiable dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, il existe $a\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\Gamma$ tel que $n(\Gamma,a)=k$.

Exercice 5.5. Soit f une fonction continue sur $\gamma([a,b])$, où $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ est rectifiable. On suppose que

$$|\int_\gamma f|=\sup|f|\cdot L(\gamma).$$

Montrer que $|f|$ est constante et trouver un exemple où f n'est pas constante.

6. Séries de Fourier

Pour résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{où } c \text{ est la vitesse du son,} \tag{6.1}$$

J. Fourier (1822) propose de chercher d'abord une solution de la forme

$$u(x,t) = f(x)g(t).$$

C'est la méthode de la *séparation des variables*. En introduisant dans (6.1), on obtient

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} =: -\lambda, \quad \lambda \geqslant 0,$$

puisque x et t sont des variables indépendantes. En supposant que la corde est attachée en ses extrémités 0 et L, on est amené à résoudre

$$f'' + \lambda f = 0, \;\; f(0) = 0, \;\; f(L) = 0 \quad \text{et} \quad g'' + \lambda c^2 g = 0. \tag{6.2}$$

La première équation et les conditions au bord donnent

$$f(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \quad \text{et} \quad A = 0, \;\; B\sin\sqrt{\lambda}L = 0.$$

Comme on veut une solution non triviale ($B \neq 0$), on en déduit $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, c'est-à-dire $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$, avec $n \in \mathbb{Z}$. D'où une famille de solutions

$$f_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, \;\; n = 1, \;\; 2, \ldots. \tag{6.3}$$

La deuxième équation différentielle de (6.2) a pour solution générale

$$g_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi}{L}ct + D_n\sin\frac{n\pi}{L}ct.$$

En faisant la somme de ces solutions $(x,t) \mapsto f_n(x)g_n(t)$, on obtiendra encore une solution, pour autant qu'on ait convergence :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}ct + D_n\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}ct.$$

La position initiale $u(x,0)$ et la vitesse initiale $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ de la corde déterminent les coefficients C_n et D_n de la manière suivante : on doit avoir

$$\sum C_n\sin\frac{n\pi}{L}x = u(x,0), \quad \sum D_n\frac{cn\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0); \tag{6.4}$$

en multipliant par $\sin\frac{m\pi}{L}x$ et en intégrant sur $[0,L]$, on obtient, puisque

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{m\pi}{L}x\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{n,m}, \tag{6.5}$$

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x, \quad D_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

Rappel. Les formules suivantes de trigonométrie sont utilisées pour intégrer :

$$\begin{aligned} 2\cos p\cos q &= \cos(p+q)+\cos(p-q), \\ 2\cos p\sin q &= \sin(p+q)-\sin(p-q), \\ 2\sin p\sin q &= -\cos(p+q)+\cos(p-q). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dans le paragraphe 7 on étudie sous quelles hypothèses la décomposition en série (6.4) est réalisable et avec quelle convergence. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la convergence en moyenne quadratique des série de Fourier.

Définition 6.1. Sur $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$, espace des fonctions Riemann–intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs complexes, on introduit la forme sesquilinéaire semi-définie positive :

$$\langle f|g\rangle := \int_a^b f\bar{g}. \tag{6.8}$$

On désigne par $||\ ||_2$ la semi-norme correspondante, i.e., $||f||_2 = \langle f|f\rangle^{1/2} = (\int_a^b |f|^2)^{1/2}$.

Remarque 6.2.
1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle f|g\rangle| \leqslant ||f||_2||g||_2$ a lieu dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ puisque $\langle\ |\ \rangle$ est semi-définie positive.
2) Restreinte à $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C})$, la semi-norme $||\cdot||_2$ est une norme. De plus, l'inégalité de triangulaire donne

$$||f||_2 \leqslant (b-a)^{1/2}||f||_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C}).$$

Par suite, la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique.
3) Si f et g sont perpendiculaires, i.e., $\langle f|g\rangle = 0$, alors alors on a $||f+g||_2^2 = ||f||_2^2+||g||_2^2$ (Pythagore).

Définition 6.3. Une partie dénombrable $\Sigma \subset \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ forme un *système orthogonal* si

$$\phi,\ \psi \in \Sigma \quad \text{et} \quad \phi \neq \psi \Longrightarrow \langle\phi|\psi\rangle = 0.$$

Il est *orthonormal* si, de plus, $||\phi||_2 = 1$, pour tout $\phi \in \Sigma$.

Exemple 6.4.
1) $\{x \mapsto e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}\}$ est orthogonal dans $\mathcal{R}([0,2\pi];\mathbb{C})$.
2) $\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}\}$ est orthonormal dans $\mathcal{R}([0,2\pi];\mathbb{C})$.
3) $\{x \mapsto \cos\frac{n\pi}{L}x \mid n \in \mathbb{N}\}$ est orthogonal dans $\mathcal{R}([0,L];\mathbb{C})$.
4) $\{\sqrt{\frac{1}{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{\pi}{L}x, \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots\}$ est orthonormal dans $\mathcal{R}([0,L];\mathbb{C})$.
5) $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ n'est pas orthogonal dans $\mathcal{R}([0,\pi];\mathbb{C})$.
6) $\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots\}$ est orthonormal dans $\mathcal{R}([0,2\pi];\mathbb{C})$.

Remarque 6.5. Soit $\Sigma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ un système orthogonal dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et soit $f \in R([a,b];\mathbb{C})$ de la forme $f = \sum_0^N c_n\phi_n$. Alors les coefficients c_n sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{||\phi_n||_2^2}\langle f|\phi_n\rangle,\ n = 0, 1, \ldots, N.$$

En particulier, $c_n = \langle f|\phi_n\rangle$ quand le système Σ est orthonormal.

Définition 6.6. Soit $\Sigma = \{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ un système orthonormal dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$. Les nombres

$$c_n := \langle f|\phi_n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots \tag{6.9}$$

sont les *coefficients de Fourier de f dans* Σ et la série (formelle) $\sum_0^\infty c_n\phi_n$ est la *série de Fourier de f dans* Σ. Notation :

$$f(x) \sim \sum_0^\infty c_n\phi_n(x) \iff c_n = \langle f|\phi_n\rangle,\ n = 0, 1, \dots$$

Proposition 6.7. *Soit Σ un système orthonormal dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_0^\infty c_n\phi_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors f est Riemann–intégrable et $\langle f|\phi_n\rangle = c_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, i.e., $\sum_0^\infty c_n\phi_n$ est la série de Fourier de f.*

Preuve. En appliquant la proposition 4.4 on obtient l'intégrabilité de f et

$$\langle f|\phi_n\rangle = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^p \langle c_k\phi_k|\phi_n\rangle = \lim_{p\to\infty} c_n = c_n.$$

$\square$

Théorème 6.8. *Soit $\Sigma = \{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ un système orthonormal dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et f une fonction intégrable sur $[a,b]$, $\sum_0^\infty c_n\phi_n$ sa série de Fourier. Alors*
a) $||f - \sum_0^N c_n\phi_n||_2 \leqslant ||f - \sum_0^N x_n\phi_n||_2$ pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $x_0,\ x_1,\ \dots, x_N \in \mathbb{C}$;
b) $\sum_0^\infty |c_n|^2 \leqslant ||f||^2$ (inégalité de Bessel) *et en particulier la série $\sum_0^\infty |c_n|^2$ converge ;*
c) $\sum_0^\infty |c_n|^2 = ||f||^2$ (égalité de Parseval) $\iff$ *$||f - \sum_0^N c_n\phi_n||_2 \to 0$ quand $N \to \infty$.*

Preuve. On a, pour tous $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{C}$:

$$\langle f - \sum_0^N c_n\phi_n | \sum_0^N y_k\phi_k\rangle = \sum_0^N \bar{y}_k\langle f|\phi_k\rangle - \sum_{k,n=0}^N c_n\bar{y}_k\langle\phi_n|\phi_k\rangle = \sum_0^N \bar{y}_k c_k - \sum_0^N c_n\bar{y}_n = 0.$$

On applique Pythagore avec $y_n = c_n - x_n$:

$$||f - \sum_0^N x_n\phi_n||^2 = ||f - \sum_0^N c_n\phi_n||^2 + ||\sum_0^N (c_n - x_n)\phi_n||^2 \geqslant ||f - \sum_0^N c_n\phi_n||^2$$

ce qui montre a).
En prenant $x_n = 0$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$||f||^2 = ||f - \sum_0^N c_n\phi_n||^2 + \sum_0^N |c_n|^2 \geqslant \sum_0^N |c_n|^2 \tag{6.10}$$

quel que soit N. L'affirmation b) est démontrée.
L'affirmation c) découle de l'égalité dans (6.10). $\square$

Définition 6.9. On dira qu'un système orthonormal $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ est *complet* ou *total* si $||f - \sum_0^N \langle f|\phi_n\rangle\phi_n||_2 \to 0$ quand $N \to \infty$, pour toute f de $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$.

Remarque 6.10. Si $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ est total dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$, alors : $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et $\langle f|\phi_n\rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entraînent $f = 0$.
Si, dans un système total de fonctions continues, la série de Fourier de $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{C})$ converge uniformément, elle converge vers f. En effet, la somme de la série s est continue et $c_n(f-s) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $||s-f||_2 = 0$ par Parseval et, par continuité, $s = f$.

Exemple 6.11. Les systèmes 2) et 4) de l'exemple 6.4 sont complets dans $\mathcal{R}([0,2\pi];\mathbb{C})$, cf. Corollaire 7.4. Le système 6) n'est pas complet car la fonction $x \mapsto \sin x$ est orthogonale à tous les éléments du système.

Remarque 6.12. Chaque système orthonormal complet donne une application

$$\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}) := \{\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum |c_n|^2 < \infty\}$$

qui conserve la semi-norme. En passant au quotient par $\{f \in \mathcal{R} \mid ||f||_2 = 0\}$, on obtient une isométrie. Cette dernière application n'est pas surjective, car l'espace $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ n'est pas complet. L'intégrale de Lebesgue permet d'interpréter le complété $\mathcal{L}^2([a,b];\mathbb{C})$ de $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ comme un espace de classes de fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue.

Lemme 6.13. *L'espace $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$, i.e., $\forall f \ni \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$ telle que $||f-g||_2 < \varepsilon$. Par suite, l'égalité de Parseval a lieu pour toute $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ si, et seulement si, elle a lieu pour toute $g \in \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$.*

Preuve. La première partie découle de l'Exercice 6.2. Pour la deuxième partie, soit $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}^1$ telle que $||f-g|| < \varepsilon$. Si $||g||^2 = \sum |c_n(g)|^2$, alors

$$\begin{aligned}||f|| &\leqslant ||f-g|| + ||g|| \leqslant \varepsilon + ||\{c_n(g)\}_{n\in\mathbb{N}}|| \leqslant \varepsilon + ||\{c_n(g-f)\}_{n\in\mathbb{N}}|| + ||\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|| \\ &\leqslant 2\varepsilon + ||\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}||\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de l'inégalité de Bessel pour $g-f$ et toutes les normes sont les normes $\mathcal{L}^2$. Le résultat en découle. □

Application. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des restrictions des polynômes complexes à l'intervalle $[a,b]$. Le théorème de Weierstrass affirme que $\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}), ||\cdot||_\infty)$. Donc $\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C}), ||\cdot||_2)$. Si $\Sigma = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ est un système orthonormal de polynômes sur $[a,b]$ avec ϕ_n de degré n, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors Σ est total dans $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$. En effet, pour tout polynôme P de degré n, on a

$$P = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n,$$

puisque $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ forme une base des polynômes de degré $\leqslant n$. Par Pythagore, $||P||^2 = |c_0|^2 + \cdots + |c_n|^2$.

Exemple 6.14. Sur $[-1,1]$ les polynômes de Legendre, définis par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,$$

forment un système orthogonal complet.

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 6.1. Calculer la série de Fourier de la fonction définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ dans le système $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 6.2. Soit $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction g constante par morceaux sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b |f-g| < \varepsilon$ et $||g||_\infty \leqslant ||f||_\infty$. Même question pour $g \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C})$ puis $g \in \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$ telle que $g' \in \mathcal{VB}$.
Indication. Commencer par f à valeurs réelles.

Exercice 6.3. Établir les inégalités suivantes :

$$||f||_2^2 \leqslant ||f||_\infty ||f||_1, \quad ||f||_1 \leqslant (b-a)^{1/2}||f||_2, \quad \forall f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C}).$$

En déduire que $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ pour la norme $||\cdot||_2$. Donner une suite de Cauchy de $(\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C}), ||\cdot||_1)$ qui n'est pas une suite de Cauchy pour $||\cdot||_2$.

Exercice 6.4. Vérifier que

$$(\pi - |x|)^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 6.5. On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = 0$, si $0 \leqslant x < 1/n$ et $f_n(x) = x^{-1/4}$, si $1/n < x \leqslant 1$. Vérifier que cette suite est de Cauchy dans $\big(\mathcal{R}([0,1]), ||\cdot||_2\big)$ mais qu'elle n'a pas de limite dans cet espace en observant que pour tout $\varepsilon > 0$, $f_n \to f$ uniformément sur $[\varepsilon, 1]$, où $f(x) = x^{-1/4}$ pour $x \in]0,1]$.

Exercice 6.6. Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un système orthonormé complet de $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$. Si f, g appartiennent à $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$, et si c_n, d_n sont les coefficients de Fourier de f, g, montrer :

$$< f, g >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$$

Indication : $4 < f,g >= ||f+g||^2 - ||f-g||^2 + i||f+ig||^2 - i||f-ig||^2$.
Corriger l'énoncé pour un système orthogonal complet.

Exercice 6.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique. Vérifier les implications suivantes, où $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$:

a) $f \in \mathcal{C}^1$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f = 0 \quad\Rightarrow\quad ||f||_2 \leqslant ||f'||_2$ et $||f||_\infty \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{6}}||f'||_2$;

b) $f \in \mathcal{C}^m \quad\Rightarrow\quad \sum_k k^{2m}|c_k(f)|^2 < \infty \quad\Rightarrow\quad \sum_k k^{m-1}|c_k(f)| < \infty$.

c) $f \in \mathcal{C}^m \quad\Rightarrow\quad \exists C > 0$ tel que $||f - s_n(f)||_\infty \leqslant \dfrac{C}{n^{m-1/2}}$, $\forall n > 0$.

7. Séries trigonométriques

Définition 7.1. Une *série trigonométrique* est une série (formelle) du type

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx},\ x\in\mathbb{R},\ c_n\in\mathbb{C}. \tag{7.1}$$

Quand cette série est la série de Fourier d'une fonction $f\in\mathcal{R}([0,2\pi];\mathbb{C})$, on a

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x. \tag{7.2}$$

Lorsque f est à valeurs réelles, on a $c_{-n}=\overline{c_n}$. En posant

$$a_n:=c_n+\overline{c_n}=c_n+c_{-n},\quad b_n:=i(c_n-\overline{c_n})=i(c_n-c_{-n}),\quad \text{et donc}\quad a_n^2+b_n^2=4|c_n|^2,$$

on obtient

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\quad\text{pour}\quad n>0\quad\text{et}\quad \frac{a_0}{2}=c_0.$$

Parallèlement aux séries complexes (7.1) on considèrera des séries réelles

$$\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty a_n\cos nx+\sum_1^\infty b_n\sin nx,\quad x\in\mathbb{R},\ a_n \text{ et } b_n\in\mathbb{R}. \tag{7.3}$$

Si une telle série est la série de Fourier d'une fonction $f\in\mathcal{R}([0,2\pi];\mathbb{R})$, alors

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n\geqslant 0,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n>0. \tag{7.4}$$

Proposition 7.2. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique, intégrable sur l'intervalle $[0,2\pi]$. Alors $|c_n(f)|\leqslant\sup|f|$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ et quand $n\neq 0$:*

a) $f\in\mathcal{VB}\Longrightarrow |c_n(f)|\leqslant \dfrac{V(f)}{2\pi n}$;

b) f différentiable et $f'\in\mathcal{VB}\Longrightarrow |c_n(f)|\leqslant \dfrac{V(f')}{2\pi n^2}$:

c) $f\in\mathcal{C}^m\Longrightarrow |c_n(f)|\leqslant \dfrac{\sup|f^{(m)}|}{n^m}$.

Preuve. L'inégalité $|\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x|\leqslant\sup|f|\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}x$ montre la première affirmation. Pour a), on intègre par parties :

$$\Big|\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\Big|=\Big|\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\big(\frac{e^{-inx}}{-in}\big)\Big|=\Big|\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,\mathrm{d}f(x)\Big|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|\,\mathrm{d}f|=\frac{V(f)}{n}.$$

Pour b), l'hypothèse permet d'écrire

$$c_n(f)=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,\mathrm{d}f(x)=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{in}c_n(f'), \tag{7.5}$$

et on applique a).
L'affirmation c) se démontre en intégrant m fois par parties. □

Proposition 7.3. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction différentiable $2\pi-$périodique. Si f' est intégrable sur l'intervalle $[0,2\pi]$ alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Preuve. D'après (7.5), on a $|c_n(f)| = \dfrac{1}{n}|c_n(f')|$, pour $n \neq 0$. Puisque $\sum |c_n(f')|^2 \leqslant ||f'||^2$ d'après l'inégalité de Bessel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\ell^2(\mathbb{C})$ donne

$$\Big(\sum_{n\neq 0} |c_n(f)|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\Big)\Big(\sum_{n\neq 0} |c_n(f')|^2\Big) < \infty,$$

si bien que $\sum \sup_x |c_n(f)e^{inx}| < \infty$.
Soit $s(x) = \sum_n c_n(f)e^{inx}$ la somme de la série de Fourier de f. Il nous reste à montrer $s = f$. On sait que s est continue, $2\pi-$périodique et que $c_n(s) = c_n(f)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ d'après la Proposoition (6.7). Soit $g := s - f$ et supposons $g \neq 0$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Quitte à faire une translation qui ne change pas les coefficients de Fourier, on peut supposer $x_0 = 0$. Quitte à multiplier g par un scalaire, on peut supposer $g(0) = 2$. Travaillons sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
Par continuité, il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que $g(x) \geqslant 1$ si $|x| \leqslant \delta$.
Suivant un idée de H. Lebesgue, on introduit le polynôme trigonométrique

$$p(x) = 1 + \cos x - \cos \delta.$$

La décroissance du cosinus dans $[0, \pi]$ permet de vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} |p(x)| \leqslant 1 & \text{si} & \delta \leqslant |x| \leqslant \pi, \\ p(x) \geqslant 0 & \text{si} & |x| \leqslant \delta, \\ p(x) \geqslant q > 1 & \text{si} & |x| \leqslant \delta/2. \end{array}$$

En partageant l'intégrale suivante en deux, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$, puisque p^n est un polynôme trigonométrique :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)p^n(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_{-\delta}^{\delta} g(x)p^n(x)\,\mathrm{d}x - \sup|g|(2\pi - 2\delta) \\ &\geqslant \int_{-\delta/2}^{\delta/2} p^n(x)\,\mathrm{d}x - 2\pi \sup|g| \geqslant \delta q^n - 2\pi \sup|g|. \end{aligned}$$

Nous sommes arrivés à une contradiction, car $\delta q^n \to \infty$ quand $n \to \infty$. □

Corollaire 7.4.
a) Le système $\{x \mapsto e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est complet dans* $\mathcal{R}([0, 2\pi]; \mathbb{C})$.
b) Le système $\{x \mapsto \cos nx\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x \mapsto \sin nx\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est complet dans* $\mathcal{R}([0, 2\pi]; \mathbb{R})$.
c) Le système $\{x \mapsto \cos nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est complet dans* $\mathcal{R}([0, \pi]; \mathbb{R})$.

Preuve. D'après le Lemme 6.13, il suffit de montrer l'égalité de Parseval pour toute fonction $2\pi-$périodique $f \in \mathcal{C}^1$ (Exercice 6.2). Dans ce cas, la série de Fourier converge uniformément vers f (Prop. 7.3), donc elle converge vers f en moyenne quadratique. On a vérifié a).
L'égalité de Parseval pour le premier système

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi|c_n|^2 = ||f||^2$$

donne

$$2\pi|c_0|^2 + \sum_{n\neq 0} 2\pi|c_n|^2 = 2\pi\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{n\neq 0}\left(a_n^2+b_n^2\right) = 2\pi\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \pi\sum_{n>0}\left(a_n^2+b_n^2\right) = ||f||^2,$$

c'est-à-dire l'égalité de Parseval pour le système b).
L'affirmation c) se montre comme suit : soit $f \in \mathcal{R}([0,\pi];\mathbb{R})$. On la prolonge à l'intervalle $[-\pi,\pi]$ en une fonction paire $\tilde{f}$. On approche $\tilde{f}$ par une série de cosinus (puisque $\int \tilde{f}(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = 0$). La restriction de cette série à $[0,\pi]$ approche f. □

Remarque 7.5. Si une série trigonométrique $\sum c_n e^{inx}$ converge *absolument* en un point, alors elle converge normalement sur $\mathbb{R}$, puisque $\sum \sup_x |c_n e^{inx}| = \sum |c_n| < \infty$. Par suite, sa somme est une fonction continue $2\pi-$périodique. Attention : ce résultat est faux pour les séries $\sum a_n \cos nx$.

On s'intéresse maintenant à la convergence ponctuelle des séries trigonométriques. Si f est une fonction intégrable sur $[0,2\pi]$, on introduit les sommes partielles

$$s_n(f,x) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}, \quad \text{où} \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t, \tag{7.6}$$

et leurs *moyennes arithmétiques*

$$\sigma_N(f,x) = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1} s_n(f,x) = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}\sum_{-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}, \ N = 1,2,\dots \tag{7.7}$$

Remarque 7.6. Si une suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes converge, la suite de ses moyennes arithmériques $\{\frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1} z_n\}_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même valeur. La réciproque est fausse.

Définition 7.7. Pour $n\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, les noyaux de Dirichlet et Fejér sont définis par

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} e^{ikx}, \quad F_N(x) = \frac{1}{2\pi N}\sum_{0}^{N-1}\sum_{-n}^{n} e^{ikx}. \tag{7.8}$$

Les égalités suivantes sont immédiates :

$$\int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1, \ \forall n\in\mathbb{N}, \quad \int_0^{2\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x = 1, \ \forall N\in\mathbb{N}^*. \tag{7.9}$$

De (7.6) et (7.7) on déduit

$$s_n(f,x) = \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad \sigma_N(f,x) = \int_0^{2\pi} f(t)F_N(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.10}$$

Lemme 7.8. *Pour $n\in\mathbb{N}$ et $N\in\mathbb{N}^*$, on a : $D_n(0) = \frac{2n+1}{2\pi}$, $F_N(0) = \frac{N}{2\pi}$ et*

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad F_N(x) = \frac{1}{2\pi N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad \text{si} \quad x\not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Preuve. On utilise la formule donnant la somme d'une progression géométrique :

$$\sum_{-n}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)},$$

$$\sum_{0}^{N-1} e^{i(2n+1)x/2} = \frac{e^{i(2N+1)x/2} - e^{ix/2}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i2Nx/2} - 1}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}.$$

D'où

$$\sum_{0}^{N-1} \frac{e^{i(2n+1)x/2} - e^{-i(2n+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{e^{i2Nx/2} - 2 + e^{-i2Nx/2}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} = \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

□

Remarque 7.9. Par des calculs analogues, on obtient, pour $0 \leqslant m < p$:

$$\sum_{k=m+1}^{p} \sin kx = \frac{\sin((p+m+1)x/2)\sin((p-m)x/2)}{\sin x/2}, \quad \text{si} \quad x \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{7.11}$$

Proposition 7.10. *Soit f une fonction $2\pi-$périodique, intégrable sur $[0, 2\pi]$. Alors*

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t, \\ \sigma_N(f,x) &= \frac{1}{\pi N}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\sin^2(Nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Preuve. Par (7.10) et par changement de variable, on a

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big(\int_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi}\Big) f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \big(f(x-t)+f(x+t)\big)D_n(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

où on a employé la parité du noyau de Dirichlet. La première formule découle du Lemme 7.8. La preuve de la deuxième formule est similaire. □

Lemme 7.11. Riemann-Lebesgue. *Pour $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0, \quad \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = 0. \tag{7.13}$$

Preuve. Si g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(b-a)-$périodique, une intégration par parties donne

$$\Big|\int_a^b g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}g(t)\Big| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\mathrm{V}(g),$$

donc $\int_a^b g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $|\lambda| \to \infty$. Pour $f \in \mathcal{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe g comme ci-dessus telle que $||f-g||_1 < \varepsilon$. Pour L convenable on a donc $|\int_a^b g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t| < \varepsilon$ si $|\lambda| \geqslant L$. Par suite, dès que $|\lambda| \geqslant L$:

$$\Big|\int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \Big|\int_a^b (f(t)-g(t))e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t\Big| + \Big|\int_a^b g(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant ||f-g||_1 + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

□

Lemme 7.12. JORDAN. *Si g est à variation bornée sur $[0,b]$, alors*
$$\frac{2}{\pi}\int_0^b g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t \to g(0+), \quad \textit{quand} \quad \lambda\to\infty.$$

Preuve. Lorsque $g=1$, le résultat est démontré dans l'Exercice 7.3 puisque
$$\frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda b}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
On peut supposer $g(0)=g(0+)$, car l'intégrale ne dépend pas de la valeur en un point de l'intégrant. En remplaçant g par $g-g(0)$, on peut supposer $g(0)=0$. Il suffit de traiter le cas g à valeurs réelles et même g croissante d'après le Corollaire 2.11.
Comme $x\to\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue bornée, il existe $M>0$ tel que

$$|\int_c^d \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t|\leqslant M, \quad \text{si} \quad 0\leqslant c<d<\infty. \tag{7.14}$$

Étant donné $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que
$$0\leqslant t\leqslant\delta \Longrightarrow |g(t)|\leqslant\varepsilon/M.$$
On découpe l'intégrale en deux :

$$\int_0^b g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = (\int_0^\delta + \int_\delta^b)g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{7.15}$$

La formule de la moyenne (Exemple 3.15) donne $\gamma\in[0,\delta]$ tel que
$$\int_0^\delta g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = g(\delta)\int_\gamma^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t$$
et ainsi, par (7.14) :
$$|\int_0^\delta g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t| = |g(\delta)||\int_{\lambda\gamma}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t|<\varepsilon.$$
Le Lemme 7.11 de Riemann-Lebesgue donne $\lambda_0>0$ tel que la deuxième intégrale de (7.15) est inférieure à ε si $\lambda\geqslant\lambda_0$, car $t\to g(t)/t$ est intégrable sur $[\delta,b]$.
On a montré $|\int_0^b g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t|<2\varepsilon$ si $\lambda\geqslant\lambda_0$. □

Théorème 7.13. JORDAN. *Soit f une fonction $2\pi-$périodique, intégrable sur $[0,2\pi]$, $x\in\mathbb{R}$ et $\delta>0$. Si f est à variation bornée sur $[x-\delta,x+\delta]$, alors*
$$s_n(f,x)\to\frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad \textit{quand} \quad n\to\infty.$$

Preuve. Posons $g(t):=\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$. Alors g est $2\pi-$périodique, intégrable, paire, à variation bornée sur $[0,\delta]$ et $g(0+)=\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$. D'après la Proposition

7.10, il suffit donc de démontrer la convergence suivante :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t \to g(0+), \quad \text{quand} \quad n\to\infty. \tag{7.16}$$

Mais comme $t \mapsto \dfrac{1}{\sin(t/2)} - \dfrac{1}{t/2}$ est continue sur $[0,\pi]$, le lemme de Riemann-Lebesgue donne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\ \sin((2n+1)t/2)\Big(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}\Big)\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{quand} \quad n\to\infty,$$

et la relation (7.16) découle du Lemme 7.12 de Jordan. □

Théorème 7.14. Fejér. *Soit f une fonction $2\pi-$périodique intégrable sur $[0,2\pi]$.*
a) Si, pour $x\in\mathbb{R}$, les limites $f(x+)$ et $f(x-)$ existent, alors

$$\sigma_n(f,x) \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad \textit{quand} \quad n\to\infty.$$

b) Si f est continue dans un intervalle $]a,b[$, alors les moyennes $\sigma_n(f,\cdot)$ convergent vers f uniformément sur tout compact de $]a,b[$.

Preuve. Puisque $\sigma_n(f,x) = \dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\,\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t$, où g est définie comme dans la preuve du Théorème 7.13 et que $\dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t = 1$, il suffit, pour montrer a), de vérifier l'implication

$$g(0+)=0 \Longrightarrow \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} g(t)\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t \to 0, \quad \text{quand} \quad n\to\infty. \tag{7.17}$$

Soit $\varepsilon>0$; puisque $g(0+)=0$, il existe $\delta>0$ tel que $|g(t)|<\varepsilon$ si $0\leqslant t\leqslant\delta$. On partage l'intégrale de (7.17) en deux :

$$\frac{1}{\pi n}\Big|\int_0^{\delta} g(t)\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t = \varepsilon,$$

et

$$\frac{1}{\pi n}\Big|\int_{\delta}^{\pi} g(t)\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{\sup|g|}{\pi n}\,\frac{\pi}{\sin^2(\delta/2)} \leqslant \varepsilon$$

quand n est plus grand que $\sup|f|/\varepsilon\sin^2(\delta/2)$.
Pour vérifier l'affirmation b), on constate d'abord que si f est continue en x, alors $g(0+)=g(0)=f(x)$. Pour x dans un intervalle $[a',b']\subset]a,b[$, la convergence dans (7.17) est uniforme car la borne pour n ne dépend que de $\sup|f|$, de ε et de δ qui provient ici de la continuité uniforme de f sur $[a',b']$. □

Corollaire 7.15. *Soit f une fonction $2\pi-$périodique, intégrable sur $[0,2\pi]$, et $x\in\mathbb{R}$. Si les sommes partielles $s_n(f,x)$ convergent et si $f(x+)$ et $f(x-)$ existent, alors les sommes partielles $s_n(f,x)$ convergent vers la valeur moyenne $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*

Exemple 7.16. Exemple de Fejér. On définit

$$f_n(x) = \frac{1}{n} + \frac{\cos x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(n-1)x}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \cdots - \frac{\cos 2nx}{n}$$

et

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} f_{2^{n^3}}(x).$$

Alors F est continue et sa série de Fourier diverge en 0.

Preuve. D'après (6.7), on a

$$f_n(x) = \sum_1^n \frac{\cos(n-k)x - \cos(n+k)x}{k} = 2\sin nx \sum_1^n \frac{\sin kx}{k}.$$

L'inégalité suivante a lieu, cf. Exercice 7.7 :

$$\sum_1^n \frac{\sin kx}{k} \leqslant \pi/2 + 1, \quad \forall n, \forall x \in [0,\pi]. \tag{7.18}$$

Donc F est continue. Par définition,

$$s_n(f_n,0) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1 \geqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log n \quad \text{et} \quad s_n(f_k,0) \geqslant 0,\ \forall n, \forall k.$$

On en déduit

$$s_n(F,0) = s_n(\sum_k \frac{f_{2^{k^3}}}{k^2}, 0) = \sum_k \frac{1}{k^2} s_n(f_{2^{k^3}}, 0)$$

et donc

$$s_{2^{m^3}}(F,0) \geqslant \frac{1}{m^2} s_{2^{m^3}}(f_{2^{m^3}},0) = \frac{1}{m^2}\log 2^{m^3} = m\log 2 \to \infty, \quad \text{quand} \quad m \to \infty.$$

□

Remarque 7.17. En considérant une somme du type $\sum_{0 \leqslant p < q} \frac{F(x - 2\pi p/q)}{q^4}$, on obtient une fonction continue dont la série de Fourier diverge sur une partie dense de $[0,1]$.

La convergence des moyennes $\sigma_n(f)$ vers f est un cas particulier d'approximation par la méthode des suites de Dirac.

Définition 7.18. Une suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$ est une *suite de Dirac* $2\pi-$*périodique* si
(i) $\varphi_n \geqslant 0$, $\forall n$;
(ii) $\int_0^{2\pi} \varphi_n = 1$;
(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_\delta^\pi)\varphi_n < \varepsilon$, si $n \geqslant N$.

Exemple 7.19.
1) Les noyaux de Fejér F_n, cf. Lemme 7.8.
2) $\varphi_n(t) = n - n^2|t|$ pour $|t| < 1/n$ et 0 pour $1/n \leqslant |t| \leqslant \pi$, prolongé par périodicité.
3) $\varphi_n(t) = \mu_n(\pi^2 - t^2)$ pour $|t| \leqslant \pi$ prolongé par périodicité, avec $\mu_n \in \mathbb{R}$ convenable.

Définition 7.20. Pour deux fonctions f et g $2\pi-$périodiques, intégrables sur $[0, 2\pi]$, on définit la *convolée* $f * g$ par

$$f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.19}$$

On vérifie immédiatement que $f*g$ est aussi $2\pi-$périodique. De plus, $f*g$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. En effet, la fonction de deux variables $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur le carré $[0, 2\pi]^2$ comme produit de deux fonctions intégrables ; puisque $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de Stolz ([11] IV.5.3) qui donne $f * g$ intégrable. On a encore :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (f*g)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(f(t)\int_0^{2\pi} g(x-t)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Proposition 7.21. *Si f, g et h sont $2\pi-$périodiques intégrables sur $[0, 2\pi]$, alors*
1) $f * g = g * f$;
2) $f * (g + h) = f * g + f * h$;
3) $g \in \mathcal{C}^k \Longrightarrow f * g \in C^k$ *et* $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$.

Preuve. 1) On écrit

$$\begin{aligned}f * g(x) &= -\int_{x+2\pi}^{x} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s = \int_x^{x+2\pi} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \Big(\int_x^0 + \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{x+2\pi}\Big) f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s = \Big(\int_x^0 + \int_0^{2\pi} + \int_0^x\Big) f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s = g * f(x).\end{aligned}$$

2) découle de la linéarité de l'intégrale.
Pour 3), on applique la différentiabilité sous le signe somme, Proposition 4.6. □

Théorème 7.22. *Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Dirac $2\pi-$périodique et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique, intégrable sur $[0, 2\pi]$. Si f est continue en un point $x \in \mathbb{R}$, alors $f * \varphi_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$. La convergence est localement uniforme dans tout intervalle ouvert où f est continue.*

Preuve. On écrit

$$f*\varphi_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ si $|t| < \delta$, puisque f est continue en x. Avec l'entier N de la définition 7.18, on a pour $n \geqslant N$:

$$|f * \varphi_n(x) - f(x)| \leqslant \Big(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\Big)\big|f(x-t) - f(x)\big|\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon \sup|f| + \varepsilon.$$

La convergence uniforme locale se montre comme dans la preuve du théorème de Fejér.
□

Remarque 7.23. Dans la dernière majoration, on a utilisé $\varphi_n \geqslant 0$. Le noyau de Dirichlet D_n n'a pas cette propriété ; c'est ce qui empêche la suite $n \mapsto s_n(f,x)$ de converger quand f est seulement continue. Prendre la valeur absolue $|D_n|$ n'arrange rien, car

$$\int_0^\delta |D_n(x)|\,\mathrm{d}x \to \infty.$$

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 7.1. Pour $x \in [0,1]$, montrer les formules

$$x - x^2 = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\pi x}{n^2}.$$

Exercice 7.2. Justifier les formules suivantes :

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi; \qquad \frac{x^2}{2} = \pi x - \pi^2/3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$$

$$\pi/4 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad 0 < x < \pi; \quad \sin x = 2/\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \quad 0 < x < \pi.$$

Exercice 7.3. Pour $y \geqslant 0$, on pose

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}\sin x}{x}\,dx.$$

Vérifier que F est continue sur $[0,\infty[$, différentiable sur $]0,\infty[$ et que $F'(y) = \dfrac{-1}{1+y^2}$. Montrer aussi que $\lim_{y\to\infty} F(y) = 0$ et $F(y) = \pi/2 - \arctan y$. En déduire

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2.$$

Exercice 7.4. Phénomène de Gibbs (1839-1903).
http ://www.sosmath.com/fourier/fourier3/gibbs.html

a) Montrer la formule $\displaystyle \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$

b) Vérifier que $\displaystyle s_n(x) := \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt$ en calculant s_n'.

c) Constater que s_n est maximale en $\pi/2n$ et montrer $\displaystyle \lim_{n\to\infty} s_n(\pi/2n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt$ est plus grand que 1.

Exercice 7.5. Soit f une fonction $2\pi-$périodique, intégrable sur $[0,2\pi]$. On désigne par $a_0/2 + \sum(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ sa série de Fourier et on définit la fonction F par :

$$F(x) = -\frac{a_0}{2}x + \int_0^x f.$$

Montrer que F est continue, à variation bornée, 2π-périodique et que :

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos kx+\frac{a_k}{k}\sin kx\right).$$

Ainsi on a l'égalité : $\int_0^x f=\frac{1}{2}a_0x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b_k}{k}(1-\cos kx)+\frac{a_k}{k}\sin kx\right)$.

Exercice 7.6. Déduire de l'exercice précédent que si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique et que sa série de Fourier est $a_0/2+\sum a_k\cos kx+b_k\sin kx$, alors :

$$f'(x)\sim\sum k(b_k\cos kx-a_k\sin kx).$$

Exercice 7.7. Pour f de période 2π, intégrable sur $[0,2\pi]$, montrer la formule

$$\sigma_n(f,x)=a_0/2+\sum_1^{n-1}(1-\frac{k}{n})(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

En l'appliquant à $f(x)=\pi/2-x/2$ pour $x\in[0,2\pi]$ et en utilisant $|\sigma_n(f,x)|\leqslant\sup|f|$, on en déduit

$$|\sum_1^{n-1}\frac{\sin kx}{k}|\leqslant\pi/2+1,\ x\in\mathbb{R}.$$

8. Application de la théorie des séries de Fourier

Proposition 8.1. Formule de Poisson. *Soit f une fonction continue sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction u définie dans le disque unité $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$ par*

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}f(e^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi,\quad 0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi, \tag{8.1}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et résout le problème de Dirichlet dans le disque :

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\quad\text{dans}\quad\mathbb{D}\quad\text{et}\quad\lim_{r\to1}u(re^{i\theta})=f(e^{i\theta}),\ \forall\theta\in[0,2\pi]. \tag{8.2}$$

La fonction $(r,\theta)\mapsto\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ est le noyau de Poisson.

Preuve. On passe en coordonnées polaires. On cherche donc $u(r,\theta)$ telle que

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0.$$

La méthode de la séparation des variables donne, pour $u(r,\theta)=v(r)w(\theta)$:

$$v''(r)w(\theta)+\frac{1}{r}v'(r)w(\theta)+\frac{1}{r^2}v(r)w''(\theta)=0,$$

donc

$$r^2\frac{v''}{v}(r)+r\frac{v'}{v}(r)=-\frac{w''}{w}(\theta)=\lambda\geqslant0,$$

puisque r et θ sont des variables indépendantes. La dernière équation a pour solution générale $C_+e^{i\sqrt{\lambda}\theta}+C_-e^{-i\sqrt{\lambda}\theta}$. Comme on veut que w soit réelle $2\pi-$périodique, il faut que $\lambda=k^2$, avec $k\in\mathbb{Z}$ et alors $w(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta$.

Pour v, on doit avoir

$$r^2v''(r) + rv'(r) - k^2v(r) = 0.$$

Donc $v(r) = r^k$, avec $k \geqslant 0$ pour raison de continuité en 0.
En sommant les solutions particulières trouvées, on obtient, sous réserve de convergence :

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty r^k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \tag{8.3}$$

avec

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \cos k\varphi \,\mathrm{d}\varphi, \;\; b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \sin k\varphi \,\mathrm{d}\varphi.$$

Comme f est continue, ses coefficients de Fourier sont bornés ; par suite, la série (8.3) converge uniformément pour $r \leqslant r_0 < 1$. Il en est de même des dérivées en r et θ, donc u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans le disque ouvert. La convergence uniforme permet d'échanger Σ et $\int$. D'où

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(1 + 2\sum_1^\infty r^k \cos k(\theta - \varphi)\big) f(e^{i\varphi}) \,\mathrm{d}\varphi.$$

Pour $|z| < 1$, on a :

$$1 + 2\sum_1^\infty z^k = 1 + \frac{2z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1 + 2i \operatorname{Im} z - |z|^2}{1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2}.$$

En prenant $z = re^{i(\theta-\varphi)}$, on obtient

$$1 + 2\sum_1^\infty r^k \cos k(\theta - \varphi) = \operatorname{Re}(1 + 2\sum r^k e^{ik(\theta-\varphi)}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

ce qui donne la formule de Poisson (8.1). La deuxième condition de (8.2) se montre en vérifiant que si $r_n \to 1$, alors la suite de fonctions

$$\theta \mapsto \frac{1}{2\pi}\frac{1 - r_n^2}{1 - 2r_n \cos\theta + r_n^2}$$

est une suite de Dirac $2\pi-$périodique (cf. Exercice 8.1). □

Proposition 8.2. Inégalité isopérimétrique. *Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable de longueur L. Si A est l'aire de l'intérieur de Γ, alors $A \leqslant L^2/4\pi$. De plus, l'égalité a lieu si, et seulement si, Γ est un cercle.*

Preuve. Méthode de A. Hurwitz (1859-1919).
En faisant une homothétie de rapport $2\pi/L$, on peut supposer $L = 2\pi$.
Par approximation, il suffit de démontrer le résultat pour une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et même $\mathcal{C}^1$ en arrondissant les angles.
Soit $\delta : [a,b] \to \mathbb{C}$ une paramétrisation de Γ. On peut donc supposer $\delta'(t) \neq 0$. La fonction $s \mapsto \int_a^s |\,\mathrm{d}\delta| := \varphi(s)$ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ sur $[0,2\pi]$. De plus, $\varphi'(t) = |\delta'(t)|$. On peut donc paramétrer Γ par $t \mapsto \delta(\varphi^{-1}(t)) =: \gamma(t)$, $t \in [0,2\pi]$. Par suite $\delta(s) = \gamma(\varphi(s))$, $\forall s \in [a,b]$. D'où $|\delta'(s)| = |\gamma'(\varphi(s))|\varphi'(s) = |\gamma'(\varphi(s))||\delta'(s)|$ et donc $|\gamma'(t)| = 1$, $\forall t \in [0,2\pi]$.

Écrivons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Les préliminaires ci-dessus donnent

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 1, \ \forall t \in [0, 2\pi].$$

Développons en séries de Fourier :

$$x(t) = a_0/2 + \sum (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad y(t) = c_0/2 + \sum (c_k \cos kt + d_k \sin kt).$$

Quitte à faire une translation, on peut supposer $a_0 = c_0 = 0$. D'après l'Exercice 7.6 :

$$x'(t) = \sum (kb_k \cos kt - ka_k \sin kt), \quad y'(t) = \sum (kd_k \cos kt - kc_k \sin kt).$$

L'égalité de Parseval pour x' et y' donne

$$\int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2) = \pi \sum_1^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) = 2\pi.$$

La formule de Green-Riemann (cf. Théorème A) pour une courbe $\mathcal{C}^1$ et l'Exercice 6.6 donnent :

$$A = \int_\Gamma x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) \, \mathrm{d}t = \pi \sum_1^{\infty} k(a_k d_k - b_k c_k).$$

Donc

$$2\pi - 2A = \pi \sum \big((ka_k - d_k)^2 + (kb_k + c_k)^2 + (k^2 - 1)(c_k^2 + d_k^2)\big) \geqslant 0.$$

L'inégalité isopérimétrique est démontrée. Si l'inégalité ci-dessus est une égalité, on aura :

$$ka_k - d_k = 0, \ kb_k + c_k = 0, \ c_k = d_k = 0, \ \forall k > 1 \quad \text{et} \quad a_1 = d_1, \ b_1 = -c_1.$$

En se souvenant que $a_1^2 + b_1^2 = 1$, on peut écrire $a_1 = \cos\alpha$, $b_1 = \sin\alpha$. D'où

$$x(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t = \cos\alpha \cos t + \sin\alpha \sin t = \cos(t - \alpha) \quad \text{et} \quad y(t) = \sin(t - \alpha).$$

On a montré que Γ est le cercle unité. □

Proposition 8.3. Théorème de Weierstrass. *Toute fonction continue sur* $[a, b]$ *est limite uniforme de polynômes restreints à* $[a, b]$.

Preuve. On peut suposer $[a, b] = [0, \pi]$. Prolongeons $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi])$ en une fonction continue $2\pi-$périodique et approchons-la uniformément par un polynôme trigonométrique $\sigma_n(f)$. Comme la série de Taylor d'un polynôme trigonométrique converge uniformément dans $[-\pi, \pi]$, on a approché f en norme uniforme par un polynôme. □

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 8.1. Vérifier que la suite de fonctions

$$\theta \mapsto \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r_n^2}{1 - 2r_n \cos\theta + r_n^2}, \quad r_n \nearrow 1,$$

est une suite de Dirac $2\pi-$périodique.

Exercice 8.2. D'Alembert (1717-1783). Le problème des cordes vibrantes

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, && && \text{dans} \quad]0, L[\times]0, \infty[, \\ &u(x,0) = f(x), && \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), && \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \\ &u(0,t) = 0, && u(L,t) = 0, && \text{pour} \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

a été résolu formellement au début du paragraphe 6. Vérifier que si f et g sont restrictions à $[0, L]$ de deux fonctons F et G impaires $2L-$périodiques, avec $F \in \mathcal{C}^2$ et $G \in \mathcal{C}^1$, alors la solution s'écrit

$$u(x,t) = \frac{1}{2}F(x+ct) + \frac{1}{2}F(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,\mathrm{d}s.$$

Exercice 8.3. Résoudre, en séparant les variables :

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0, \pi[\times]0, 5[, \\ u(x,0) = x(\pi - x), \quad u(x,5) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(0,y) = u(\pi, y) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant 5. \end{gathered}$$

Exercice 8.4. Chercher une solution $u \in C^2(]-\pi, \pi[\times]0, \infty[)$ du problème

$$\text{(C)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{dans} \quad]-\pi, \pi[\times]0, \infty[, \\ &u(\pm\pi, t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0+) = x \quad \text{si} \quad -\pi < x < \pi. \end{aligned}$$

Remarquer que $u(x,t) = Ax + B$, avec $A,\ B \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation (C) et en déduire une solution du problème

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{dans} \quad]-\pi, \pi[\times]0, \infty[, \\ &v(\pm\pi, t) = \pm 1 \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad v(x, 0+) = 0 \quad \text{si} \quad -\pi < x < \pi. \end{aligned}$$

9. Transformation de Fourier

La méthode des séries de Fourier permet de décomposer des fonctions périodiques. Pour passer aux fonctions sur $\mathbb{R}$ non périodiques on remplace les séries par des intégrales. Supposons que f est une fonction $2\pi\lambda-$périodique, avec λ grand. Alors d'après le corollaire 7.4,

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx/\lambda} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)e^{-int/\lambda}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $u_n = n/\lambda$. Alors

$$\sum_{-N}^{N} c_n e^{inx/\lambda} = \sum_{-N}^{N}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)e^{-iu_n t}\,\mathrm{d}t\Big)e^{iu_n x}(u_{n+1} - u_n).$$

Quand N et λ tendent vers l'infini, les deux membres convergent formellement vers

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, \mathrm{d}t) e^{iux} \, \mathrm{d}u.$$

Définition 9.1. Soit $\mathcal{RG}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions complexes absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ (intégrale de Riemann généralisée). La *transformée de Fourier de* $f \in \mathcal{RG}(\mathbb{R})$ est la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{9.1}$$

Proposition 9.2. Lemme de Riemann-Lebesgue. *Soit f une fonction absolument intégable sur $\mathbb{R}$. Alors $\widehat{f}$ est uniformément continue et tend vers 0 à l'infini.*

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $M > 0$ tel que $(\int_{-\infty}^{-M} + \int_{M}^{\infty})|f| < \varepsilon$. D'où, pour ξ et $\eta \in \mathbb{R}$:

$$2\pi|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ix\xi} - e^{-ix\eta}||f(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon + M|\xi - \eta| \int_{-M}^{M} |f|,$$

où la dernière majoration utilise (4.1) : $|e^{-ix\xi} - e^{-ix\eta}| \leqslant \sup_\tau |ixe^{-ix\tau}||\xi - \eta|$. La continuité uniforme de $\widehat{f}$ en découle.
Comme $2\pi|\widehat{f}(\xi)| \leqslant |\int_{-M}^{M} e^{-ix\xi} f(x) \, \mathrm{d}x| + \varepsilon$, le lemme de Riemann-Lebesgue 7.11 donne $2\pi|\widehat{f}(\xi)| < 2\varepsilon$ si $|\xi|$ est assez grand. □

Théorème 9.3. Formule d'inversion de Fourier. *Si f est une fonction localement à variation bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{\rho \to \infty} \int_{-\rho}^{\rho} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

Preuve. Pour $\rho > 0$, on introduit une fonction F_ρ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$F_\rho(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} (\lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} e^{-it\xi} f(t) \, \mathrm{d}t) e^{it\xi} \, \mathrm{d}\xi. \tag{9.3}$$

Puisque

$$|\int_{|t| \geqslant n} e^{-it\xi} f(t) \, \mathrm{d}t| \leqslant \int_{|t| \geqslant n} |f(t)| \, \mathrm{d}t \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

la limite dans (9.3) est uniforme en ξ. On peut donc échanger limite et $\int$. D'où

$$F_\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} (\int_{-\rho}^{\rho} e^{i(x-t)\xi} \, \mathrm{d}\xi) f(t) \, \mathrm{d}t.$$

L'intégrale intérieure vaut $\displaystyle\frac{1}{i(x-t)} e^{i(x-t)\xi}\Big|_{-\rho}^{\rho} = \frac{2 \sin \rho(x-t)}{x-t}$ et par suite,

$$F_\rho x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-n}^{n} f(t) \frac{\sin \rho(x-t)}{x-t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{\sin \rho t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Séparons cette dernière intégrale en trois :

$$F_\rho x = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant 1}\frac{f(x-t)}{t}\sin\rho t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} f(x-t)\frac{\sin\rho t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} f(x-t)\frac{\sin\rho t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand ρ tend vers l'infini, le premier terme tend vers 0 d'après le lemme de Riemann-Lebesgue 9.2 puisque $t\mapsto\frac{f(x-t)}{t}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$. Le troisième terme tend vers $f(x-)/2$ par le lemme de Jordan 7.12 puisque f est à variation bornée sur $[0,1]$. Le deuxième terme tend vers $f(x-)/2$ par le lemme de Jordan et changement de variable. $\square$

Corollaire 9.4. *Soit f est une fonction continue, localement à variation bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $\widehat{f}$ est absolument intégrable alors*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{9.4}$$

Lemme 9.5.
a) f et $f'\in\mathcal{RG} \implies \widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$;
b) f et $xf\in\mathcal{RG} \implies \widehat{f}\in\mathcal{C}^1$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\widehat{xf}(\xi)$.

Preuve. a) En intégrant par parties, on a

$$i\xi\widehat{f}(\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}e^{-ix\xi} = -f(x)e^{-ix\xi}\big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et $f'\in\mathcal{RG}$, on voit que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existent ; ces limites sont nulles car $f\in\mathcal{RG}$.
b) Dérivation sous $\int$. $\square$

Définition 9.6. L'*espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz* est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, i.e.,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\mid f\in\mathcal{C}^\infty \quad\text{et}\quad \forall p,\ q\in\mathbb{N},\ \sup|x^p f^{(q)}(x)|<\infty\}.$$

Exemple 9.7. $x\mapsto e^{-x^2}$ est C^∞ à décroissance rapide.

Remarque 9.8.
1) $f\in\mathcal{S}\implies f'$ et $xf\in\mathcal{S}$ car $f'^{(q)}(x) = f^{(q+1)}(x)$ et $(xf)^{(q)}(x) = f^{(q)}(x) + qf^{(q-1)}(x)$;
2) $\mathcal{S}(\mathbb{R})\subset\mathcal{RG}(\mathbb{R})$ car $(1+x^2)|f(x)|\leqslant M$ entraîne $\int|f|<M\pi$;
3) $f\in\mathcal{S}\implies\widehat{f}\in\mathcal{S}$ d'après le lemme ;
4) $\widehat{\ }:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est bijective car la formule d'inversion s'applique.

Lemme 9.9. *Si f et g sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ alors*

$$\int f\widehat{g} = \int\widehat{f}g. \tag{9.5}$$

Preuve. L'intégrale double $\iint f(\xi)e^{-ix\xi}g(x)\,\mathrm{d}\xi dx$ converge absolument. On peut donc appliquer le théorème de Stolz pour les intégrales généralisées et obtenir

$$\int f(\xi)\Big(\int e^{-ix\xi}g(x)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\xi = \int\Big(\int f(\xi)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Corollaire 9.10. *Soit f continue, localement à variation bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $\widehat{f}$ est absolument intégrable alors*

$$\int f\bar{f} = 2\pi \int \widehat{f}\overline{\widehat{f}}. \tag{9.6}$$

Preuve. On peut appliquer (9.4) : $f(x) = \int e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. En prenant le conjugué :

$$\bar{f}(x) = \int e^{-ix\xi}\overline{\widehat{f}}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\widehat{\overline{\widehat{f}}}(x).$$

On utilise (9.5) avec $g := 2\pi\overline{\widehat{f}}$ et il vient puisque $\widehat{g} = \bar{f}$:

$$\int f\bar{f} = \int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g = 2\pi\int \widehat{f}\overline{\widehat{f}}.$$

□

Définition 9.11. Soient f et g sont des fonctions absolument intégrables et bornées sur $\mathbb{R}$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est absolument intégrable. La formule

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y, \tag{9.7}$$

définit une fonction $f * g$, la *convolée de f et g*.

Proposition 9.12. *On suppose que f et g sont des fonctions absolument intégrables et bornées sur $\mathbb{R}$. Alors*
(i) $f * g = g * f$;
(ii) $f * g \in \mathcal{RG}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1||g||_1$, $||f * g||_\infty \leqslant ||f||_\infty||g||_1$;
(iii) $\widehat{f * g} = 2\pi\widehat{f}\cdot\widehat{g}$.

Preuve. (i) $f * g(x) = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{a\to\infty}\int_{x-a}^{x+a} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z = g * f(x)$.
(ii) La fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est absolument intégrable dans $\mathbb{R}^2$ et puisque $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est absolument intégrable, le théorème de Stolz donne $f*g$ absolument intégrable. On a

$$\int |f*g|(x)\,\mathrm{d}x = \int\Big|\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big|\,\mathrm{d}x \leqslant \int\Big(\int |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\Big(\int |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\Big)|g(y)|\,\mathrm{d}y = ||f||_1||g||_1.$$

L'autre inégalité est immédiate :

$$|f*g|(x) \leqslant \int |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \sup|f|\int|g| = ||f||_\infty||g||_1.$$

(iii) C'est aussi une conséquence du théorème de Stolz :

$$\frac{1}{2\pi}\int (f*g)(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\Big(\int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Big)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\Big(\int f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\,\mathrm{d}x\Big)g(y)e^{-iy\xi}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int f(z)e^{-iz\xi}\,\mathrm{d}z\int g(y)e^{-iy\xi}\,\mathrm{d}y$$

□

Théorème 9.13. *La transformation de Fourier dans $\mathbb{R}$ est un isomorphisme de l'algèbre $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), *)$ sur $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), 2\pi\cdot)$, qui est une quasi-isométrie L^2, puisque $||f||_2 = \sqrt{2\pi}||\widehat{f}||_2$.*

Preuve. C'est une conséquence de la Remarque 9.8 pour la bijection, de la Proposition 9.12 pour les produits et du Corollaire 9.10 pour la quasi-isométrie. □

Remarque 9.14. En posant

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = 2\pi\widehat{\varphi}(2\pi\xi) = \int \varphi(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$$

pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on obtient une transformation $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ qui est une isométrie de l'algèbre $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), *)$ sur $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \cdot)$.

Proposition 9.15. *Soit u_0 une fonction continue, localement à variation bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction définie par*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi^2}\widehat{u}_0(\xi)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{9.8}$$

est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textit{dans} \quad \mathbb{R}\times]0,\infty[, \quad u(x,0+) = u_0(x), \quad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9.9}$$

Preuve. Si u est une solution de (9.9), on a

$$\begin{aligned}\int e^{-ix\xi}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x &= \frac{\partial}{\partial t}\int e^{-ix\xi}u(x,t)\,\mathrm{d}x = 2\pi\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) \\ &= \int e^{-ix\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x = -2\pi\xi^2\widehat{u}(\xi,t),\end{aligned}$$

pour autant que u, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ soient absolument intégrables. Donc $\widehat{u}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en t, avec paramètre ξ :

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t).$$

Compte tenu de la condition initiale $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi)$, on trouve

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)e^{-t\xi^2}.$$

Par hypothèse, $u_0 \in \mathcal{RG}$ et donc $\widehat{u}_0$ est bornée. Par suite, $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi,t)$ est uniformément à décroissance rapide, pour $t \geqslant \varepsilon > 0$. Par inversion de Fourier, u a la forme annoncée et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}\times]0,\infty[$. La formule d'inversion de Fourier donne $u(x,0) = u_0(x)$. La convergence de $u(x,t)$ vers $u_0(x)$ a lieu car u est continue dans $\mathbb{R}\times[0,\infty[$, puisque l'intégrale (9.8) converge uniformément pour $t \geqslant 0$ (convergence dominée).

□

Proposition 9.16. Formule sommatoire de Poisson. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction à variation bornée qui satisfait $f(x) = O(1/x^2)$, quand $|x| \to \infty$. Alors*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kL) = \frac{2\pi}{L}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(2\pi j/L) \quad \textit{ou bien} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kL) = \frac{1}{L}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}f(j/L). \tag{9.10}$$

Preuve. On pose

$$F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kL),\ x \in \mathbb{R}. \tag{9.11}$$

Puisque $f(x) = O(1/x^2)$ quand $|x| \to \infty$ et que $|x+kL| \geqslant |k|L - |x| \geqslant |k|L/2$ si $|x| \leqslant |k|L/2$, la somme converge uniformément pour $|x|$ borné. Donc F est continue. Elle est aussi $L-$périodique et à variation bornée dans $[0, L]$ car pour $0 = x_0 < x_1 < \dots x_n L =$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{|k|>N} |f(x+kL)| < 1/n, \quad \text{pour} x \in [0, L],$$

et donc

$$|F(x_{j+1}) - F(x_j)| \leqslant \sum_{|k|\leqslant N} |f(x+kL)| + 1/n$$

si bien que

$$\sum_0^{n-1} |F(x_{j+1}) - F(x_j)| \leqslant V(f) + 1.$$

Le théorème 7.13 de Jordan garantit la convergence de la série de Fourier de F :

$$F(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{2\pi jx/L}, \quad \text{où} \quad c_j = \frac{1}{L}\int_0^L F(y)e^{-2i\pi y/L}\,\mathrm{d}y.$$

On a, par convergence uniforme de la série (9.11) :

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{L}\int_0^L \sum_k f(y+kL)e^{-2i\pi jy/L}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{L}\sum_k \int_0^L f(y+kL)e^{-2i\pi jy/L}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{L}\sum_k \int_{kL}^{(k+1)L} f(y)e^{-2i\pi jx/L}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2i\pi jx/L}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{L}\widehat{f}(2\pi j/L). \end{aligned}$$

D'où

$$F(0) = \sum_j c_j = \frac{2\pi}{L}\sum_j \widehat{f}(2\pi j/L).$$

□

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 9.1. Soit $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ixt} dx.$$

Montrer que G vérifie l'équation différentielle $2G'(t) + tG(t) = 0$ et en conclure que $G(t) = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-a^2x^2}$ si $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.2. Soient b, c deux nombres réels tels que $c > 0$. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{-c(|x|-b)} \quad , \quad f_2(x) = e^{-(x-b)^2/c}.$$

Exercice 9.3. Résoudre l'équation différentielle $u'' - u = f \in \mathcal{RG}(\mathbb{R})$ en utilisant la transformation de Fourier.

10. Fonctions différentiables d'une variable complexe

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction complexe sur Ω. Puisqu'on met sur $\mathbb{C}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$, la continuité de f est claire. Il n'en est pas de même pour la différentiabilité :
a) $\mathbb{R}-$différentiabilité.
La donnée de f équivaut à la donnée de deux fonctions réelles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que $f = u + iv$. On dit que f ou (u, v) est $\mathbb{R}-$*différentiable au point* $(x_0, y_0) \in \Omega$ s'il existe une application $\mathbb{R}-$linéaire $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$(u, v)(x, y) = (u, v)(x_0, y_0) + A\cdot(x - x_0, y - y_0) + o(|(x - x_0, y - y_0)|), \quad |(x - x_0, y - y_0)| \to 0.$$

Dans ce cas, la matrice de A est la matice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0). \tag{10.1}$$

b) $\mathbb{C}-$différentiabilité.
Comme $\mathbb{C}$ a une structure de corps, on peut former un quotient différentiel et examiner l'existence de la limite suivante, pour $z_0 \in \Omega$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{10.2}$$

Si cette limite existe, on la désigne par $b \in \mathbb{C}$; dans ce cas, on a :

$$f(z) = f(z_0) + b \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad \text{quand} \quad z \to z_0. \tag{10.3}$$

Rappel. Tout espace vectoriel complexe a une structure d'espace vectoriel réel et toute application $\mathbb{C}-$linéaire est $\mathbb{R}-$linéaire, mais la réciproque est fausse. En dimension complexe 1, $B : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}-$linéaire si, et seulement si, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $B(h) = b\cdot h$ et $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}-$linéaire si, et seulement si,

$$A(k, l) = kA(1, 0) + lA(0, 1), \quad \forall k,\ l \in \mathbb{R}.$$

Par suite, une application $\mathbb{R}-$linéaire $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}-$linéaire si, et seulement si,

$$A(\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) = (\operatorname{Re} B(h), \operatorname{Im} B(h)), \quad \forall h \in \mathbb{C}.$$

C'est-à-dire, en prenant successivement $h = 1$ et $h = i$:

$$\begin{aligned} &A(1, 0) = (\operatorname{Re} B(1), \operatorname{Im} B(1)),\\ &A(0, 1) = (\operatorname{Re} B(i), \operatorname{Im} B(i)) = (\operatorname{Re} iB(1), \operatorname{Im} iB(1)) = (-\operatorname{Im} B(1), \operatorname{Re} B(1)), \end{aligned}$$

ou, en posant $\alpha = \operatorname{Re} B(1)$, $\beta = \operatorname{Im} B(1)$, si, et seulement si, la matrice de A est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, avec α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Définition 10.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in \Omega$ un point. On dit que f est $\mathbb{C}-$*différentiable en* z_0 si la limite de (10.2) existe. La valeur $f'(z_0)$ de cette limite est la $\mathbb{C}-$*dérivée* de f au point z_0.

Proposition 10.2. *1) Toute fonction $\mathbb{C}-$différentiable en z_0 est $\mathbb{R}-$différentiable en z_0, donc continue en z_0.*
2) Si f et g sont $\mathbb{C}-$différentiables en z_0, alors $f+g$, $f\cdot g$ et f/g, quand $g(z_0)\neq 0$, sont $\mathbb{C}-$différentiables en z_0.
3) La composée de deux fonctions $\mathbb{C}-$différentiables est $\mathbb{C}-$différentiable et on a la formule usuelle

$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\cdot f'(z_0).$$

Preuve. Vérifions 3). Pour $h\neq 0$, on écrit $\dfrac{g\circ f(z_0+h)-g\circ f(z_0)}{h}$ sous la forme

$$(10.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{g(f(z_0+h))-g(f(z_0))}{f(z_0+h)-f(z_0)}\dfrac{f(z_0+h))-f(z_0)}{h} & \text{si } f(z_0+h)\neq f(z_0),\\ 0 & \text{si } f(z_0+h)=f(z_0).\end{cases}$$

Si $f(z_0+h))\neq f(z_0)$ pour tout $h\neq 0$ voisin de 0, seule la première valeur est prise et elle tend vers $g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$. Sinon, il existe une suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^*$ qui tend vers 0 et telle que $f(z_0+h_n)=f(z_0)$; dans ce cas $f'(z_0)=0$. La première valeur de (10.4) tend vers $g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)=0$ qui est aussi la limite de la seconde valeur. □

Proposition 10.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma:[a,b]\to\Omega$ un chemin [continûment] différentiable et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction [continûment] $\mathbb{C}-$différentiable. Alors $f\circ\gamma$ est [continûment] différentiable.*

Preuve. Similaire. □

Application.(Cf. Lemme 4.5.) Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est continûment$\mathbb{C}-$différentiable et si le segment $[z_0,z_0+h]$ est contenu dans Ω, alors

$$(10.5)\qquad |f(z_0+h)-f(z_0)|\leqslant |h|\sup_{z\in[z_0,z_0+h]}|f'(z)|.$$

Mais il n'existe en général pas $z\in[z_0,z_0+h]$ tel que $|f(z_0+h)-f(z_0)|=|h|\cdot|f'(z)|$. En remplaçant f par $z\mapsto f(z)-(z-z_0)f'(z_0)$, dans (10.5) on obtient

$$(10.6)\qquad |f(z_0+h)-f(z_0)-hf'(z_0)|\leqslant |h|\sup_{z\in[z_0,z_0+h]}|f'(z)-f'(z_0)|.$$

Corollaire 10.4. *Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}-$différentiable et si $f'=0$, alors f est localement constante, i.e., constante au voisinage de chaque point.*

Exemple 10.5.
0) Les fonctions constantes sont $\mathbb{C}-$différentiables et leurs dérivées valent 0.
1) $f(z)=z$, $\forall z\in\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}-$différentiable et $f'=1$.
2) Les polynômes complexes et les fonctions rationnelles sont $\mathbb{C}-$différentiables où le dénominateur ne s'annule pas. (Appliquer la Proposition 10.2.)
3) $f(z)=\operatorname{Re} z$ n'est pas $\mathbb{C}-$différentiable. En effet, $(\operatorname{Re} h)/h$ n'a pas de limite quand $h\to 0$.
4) $z\mapsto e^z$ est $\mathbb{C}-$différentiable dans $\mathbb{C}$ et sa dérivée en z vaut e^z. En effet, on a $(e^{z+h}-e^z)/h=e^z(e^h-1)/h$ et $(e^h-1)/h=\sum_1^\infty h^{n-1}/n!$ tend vers 1 quand h tend vers 0.

5) Plus généralement, soit $\sum a_n z^n$ une *série entière convergente*, i.e., il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum a_n z_0^n$ converge. Alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < |z_0|$ et définit une fonction $\mathbb{C}-$différentiable f dans le disque $\mathbb{D}(0, |z_0|)$. On a

$$f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}.$$

Preuve. Puisque la série $\sum a_n z_0^n$ converge, son terme général tend vers 0 ; il existe donc $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour $|z| < |z_0|$, on a $|a_n z^n| = |a_n z_0^n||z/z_0|^n \leqslant M|z/z_0|^n$ et la convergence absolue de $\sum a_n z^n$ en découle par comparaison avec la série géométrique. La convergence est normale dans tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$, avec $r < |z_0|$. La série dérivée terme à terme converge aussi pour $|z| < |z_0|$ car

$$|n a_n z^{n-1}| = \frac{1}{|z_0|} |a_n z_0|^n n |z/z_0|^{n-1} \leqslant \frac{M}{|z_0|} |n^{1/(n-1)} z/z_0|^{n-1}$$

et $n^{1/(n-1)} \to 1$.

Pour voir la différentiabilité, il suffit de montrer la relation

$$\sum a_n (z+h)^n - \sum a_n z^n - h \sum n a_n z^{n-1} = o(|h|), \quad \text{quand } h \to 0,$$

pour $|z|$ et $|z+h| \leqslant r < |z_0|$. On écrit

$$(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1} = h\{(z+h)^{n-1} + \cdots + z^{n-1} - nz^{n-1}\},$$

et on constate les majorations suivantes :

(10.7)

$$|(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1}| \leqslant |h| 2nr^{n-1}, \quad (z+h)^n - z^n - hnz^{n-1} = o(|h|) \quad \text{quand } h \to 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de $\sum n|a_n| r^{n-1}$ donne l'existence d'un entier $N > 0$ tel que $\sum_N^\infty 2n|a_n| r^{n-1} < \varepsilon$. Par suite,

$$\sum_N^\infty |a_n| |(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1}| < \varepsilon h,$$

d'après la première formule de (10.7) et

$$\sum_0^{N-1} |a_n| |(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1}| < \varepsilon h$$

si $|h|$ est assez petit, d'après la deuxième formule de (10.7). □

6) Soit $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ continue, $\mathbb{C}-$différentiable en la deuxième variable z et $g \in \mathcal{VB}([a,b], \mathbb{C})$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ est continue dans $[a,b] \times \Omega$, alors

$$F(z) := \int_a^b f(x,z)\, \mathrm{d}g(x)$$

définit une fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ continûment $\mathbb{C}-$différentiable et

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\, \mathrm{d}g(x).$$

La preuve est identique à celle de la Proposition 4.6.

Proposition 10.6. Équations de Cauchy-Riemann. *Pour $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$ on a : f est $\mathbb{C}-$différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si, et seulement si, (u, v) est $\mathbb{R}-$différentiable en (x_0, y_0) et*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{10.8}$$

Preuve. C'est une conséquence des définitions et du rappel ci-dessus sur la correspondance entre application $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}-$linéaire. □

Remarque 10.7. L'existence des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y}$ et les égalités (10.8) n'entraînent pas la $\mathbb{C}-$différentiabilité. Les conditions plus fortes u, $v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et (10.8) pour tout $z_0 \in \Omega$ donnent f continûment $\mathbb{C}-$différentiable.

Proposition 10.8. *Soient u, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui satisfont (10.8) en chaque point. Si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ existent et sont continues, alors les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ existent et vérifient*

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Preuve. Il suffit de différentier les égalités (10.8) et d'utiliser les relations $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$. □

Remarque 10.9. On verra plus loin (Corollaire 11.7) que toute fonction $\mathbb{C}-$différentiable dans un ouvert est continûment $\mathbb{C}-$différentiable.

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 10.1. Vérifier que :

a) $z \mapsto \bar{z}$ est $\mathbb{R}-$différentiable dans $\mathbb{C}$ mais est nulle part $\mathbb{C}-$différentiable ;
b) $z \mapsto \operatorname{Log} z$ est $\mathbb{C}-$différentiable dans $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} \mid z \leqslant 0\}$;
c) $z \mapsto \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ est $\mathbb{C}$-différentiable dans $\mathbb{C}$.

Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto \operatorname{tg}(z) := \frac{\sin z}{\cos z}$ est-elle $\mathbb{C}-$différentiable ?

Exercice 10.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $F : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable et Γ une courbe rectifiable fermée dans Ω. Montrer que :

$$\int_\Gamma F'(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

Appliquer ce résultat à $\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^n} \, \mathrm{d}z$, où $n \neq 1$ (pourquoi ?) et Γ ne passe pas par a.

Exercice 10.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable ; on pose $f = u + iv$. Vérifier les assertions suivantes :

a) $u =$ constante $\Longrightarrow$ f est localement constante,

b) $u^2 + v^2 =$ constante $\Longrightarrow$ f est localement constante,

c) $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ définit une fonction $\mathbb{C}$-différentiable sur $\widetilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in \Omega\}$.

Exercice 10.4. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Exercice 10.5. Trouver le polynôme harmonique réel P le plus général de la forme $P(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Exercice 10.6. Déterminer l'image du disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ par les transformations suivantes :

$$z \mapsto \frac{1}{z}; \quad z \mapsto \frac{1-z}{1+z}; \quad z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}).$$

Exercice 10.7. Étudier la transformation de Joukowski (1847-1921) donnée par

$$J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \ :$$

domaine de définition, prolongement à $\hat{\mathbb{C}}$, préimages d'un point, image du cercle unité, du disque unité, image du cercle centré en $0.2 + 0.3i$ passant par -1.
http ://jwilson.coe.uga.edu/olive/Joukowski.Web/Joukowski.Paper.html

11. Théorie de Cauchy

Théorème 11.1. Théorème de Cauchy. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω. On suppose que le bord orienté ∂K de K est une réunion finie de courbes de Jordan rectifiables $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, orientées par la normale extérieure. Alors*

$$\sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} f = 0.$$

Preuve. Puisque les dérivées partielles des composantes u et v de f sont continues, on peut appliquer la formule de Green-Riemann (cf. Théorème A) à l'intégrale de f sur le bord ∂K de K :

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial K} (u+iv)(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_{\partial K} (u+iv)\,\mathrm{d}x + (-v+iu)\,\mathrm{d}y =$$
$$\iint_K (-\frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Les équations de Cauchy-Riemann (10.8) entraînent que la parenthèse ci-dessus est nulle, d'où le résultat. □

Proposition 11.2. Formule de Cauchy. *Soit f une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable dans un disque $\mathbb{D}(a,R)$. Alors, pour $0<r<R$, on a :*

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z, \tag{11.1}$$

où dans l'intégrale, le cercle est parcouru une fois dans le sens direct.

Remarque 11.3. Il suffit que f soit continûment $\mathbb{C}-$différentiable dans $\mathbb{D}(a,R)\setminus\{a\}$.

Preuve. La fonction $z\mapsto\dfrac{f(z)}{z-a}$ est continûment $\mathbb{C}-$différentiable dans $\mathbb{D}(a,R)\setminus\{a\}$. Prenons $K=\overline{\mathbb{D}(a,r)}\setminus\mathbb{D}(a,\varepsilon)$, pour $0<\varepsilon<r$ et appliquons le Théorème de Cauchy :

$$\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z-\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=0. \tag{11.2}$$

On écrit

$$\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z+\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

La première intégrale vaut $2i\pi f(a)$ et la deuxième est majorée par

$$\sup_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)-f(a)|\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{|\,\mathrm{d}z|}{|z-a|}=\sup_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)-f(a)|2\pi.$$

Le résultat découle de (11.2) puisque $\sup_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)-f(a)|$ tend vers 0 quand $\varepsilon\to 0$, car f est continue en a. □

Corollaire 11.4. *Soit $f:\mathbb{D}(a,R)\to\mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable et $z\in\mathbb{D}(a,R)$. Alors*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,\quad \textit{pour}\quad |z-a|<r<R. \tag{11.3}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème de Cauchy au domaine limité par les cercles $\{|\zeta-a|=r\}$ et $\{|\zeta-z|=\varepsilon\}$ où $r<R$ et $|z|+\varepsilon<r$. □

Corollaire 11.5. *Soit $f:\mathbb{D}(a,R)\to\mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable et $z\in\mathbb{D}(a,R)$. Alors*
1) f est indéfiniment $\mathbb{C}-$différentiable ;
2) $f^{(n)}(a)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$, pour $r<R$ et $n\in\mathbb{N}$;
3) $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ avec convergence normale dans $|z-a|\leqslant r<R$.

Preuve. 1) et 2) découlent de l'Exemple 10.5, 6), puisque la fonction $z\mapsto\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ est indéfiniment $\mathbb{C}-$différentiable et que sa $k-$ième dérivée $(\zeta,z)\mapsto\dfrac{k!f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}$ est continue dans $\mathbb{S}(a,r)\times\mathbb{D}(a,r)$.

Pour voir 3), on écrit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_0^\infty \big(\frac{z-a}{\zeta-a}\big)^n.$$

Cette série converge normalement dans $\mathbb{S}(a,r') \times \overline{\mathbb{D}}(a,r)$ si $r < r' < R$. En remplaçant dans (11.3) et en échangeant $\int$ et $\sum$, on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)\sum_0^\infty \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\Big)(z-a)^n.$$

La formule 2) donne le résultat. □

Le théorème suivant permet de montrer que toute fonction $\mathbb{C}-$différentiable est continûment $\mathbb{C}-$différentiable.

Théorème 11.6. Lemme de Goursat. *Soit f une fonction $\mathbb{C}-$différentiable dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si Γ est le bord orienté d'un rectangle contenu dans Ω, alors $\int_\Gamma f = 0$.*

Preuve. Soit R le rectangle de l'énoncé. On partage chacun des côtés en deux, d'où quatre rectangles R_1, R_2, R_3, R_4 de bords orientés Γ_1, …, Γ_4. On a

$$\int_\Gamma f = \Big(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}\Big) f.$$

Soit R^1 celui des rectangles R_1, …, R_4 pour lequel

$$\Big|\int_{\Gamma^1} f\Big| \geqslant \Big|\int_{\Gamma_j} f\Big|,\ j = 1,\dots,4.$$

On découpe le rectangle R^1 en quatre rectangles R^1_1, …, R^1_4 et on choisit parmi ceux-ci celui qui donne l'intégrale maximale. On le désigne par R^2. Par récurrence, on construit une suite de rectangles emboîtés $\{R^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ avec

$$\operatorname{diam} R^k = \frac{1}{2^k}\operatorname{diam} R,\ L(\Gamma^k) = \frac{1}{2^k}L(\Gamma) \quad\text{et}\quad \Big|\int_\Gamma f\Big| \leqslant 4^k\Big|\int_{\Gamma^k} f\Big|,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

L'intersection des rectangles R^k est réduite à un point a. Puisque f est $\mathbb{C}-$différentiable en a, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)| \leqslant \varepsilon|z-a|,\ \forall z \in R^k.$$

Puisque $z \mapsto f(a) + f'(a)(z-a)$ est une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable, l'intégrale $\int_{\Gamma^k}\big(f(a) + f'(a)(z-a)\big)\,\mathrm{d}z$ est nulle. D'où

$$\Big|\int_{\Gamma^k} f\Big| = \Big|\int_{\Gamma^k}\big(f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)\big)\,\mathrm{d}z\Big| \leqslant \varepsilon \sup_{z\in\Gamma^k}|z-a|L(\Gamma^k) = \varepsilon\frac{\operatorname{diam} R}{4^k}\,L(\Gamma).$$

On en déduit

$$\Big|\int_\Gamma f\Big| \leqslant 4^k\Big|\int_{\Gamma_k} f\Big| \leqslant \varepsilon \operatorname{diam} R\ L(\Gamma)$$

si bien que $\int_\Gamma f = 0$. □

Corollaire 11.7. *Si f est une fonction $\mathbb{C}-$différentiable dans un ouvert Ω, alors f admet localement une primitive ; elle est donc continûment $\mathbb{C}-$différentiable.*

Preuve. Soit $a+ib$ un point quelconque de Ω. Pour $\delta>0$ assez petit, le carré $C:=\,]a-\delta,a+\delta[+i]b-\delta,b+\delta[$ est contenu dans Ω. Pour $x+iy\in C$, on définit

$$F(x+iy)=\int_a^x f(s+ib)\,\mathrm{d}s+\int_b^y f(x+it)i\,\mathrm{d}t.$$

La Proposition 4.2 c) montre que la dérivée partielle $\partial F/\partial y$ existe et vaut $if(x+iy)$. D'après le Théorème de Goursat, l'intégrale de f sur le bord du rectangle de sommets $a+ib$, $x+ib$, $x+iy$, $a+iy$ est nulle. Donc

$$F(x+iy)=\int_b^y f(a+it)i\,\mathrm{d}t+\int_a^x f(s+iy)\,\mathrm{d}s,$$

ce qui permet de voir que $\partial F/\partial x$ existe et vaut $f(x+iy)$. Comme les deux dérivées partielles de F sont continues, les équations de Cauchy-Riemann (10.8) qui s'écrivent aussi

$$\frac{\partial F}{\partial y}=i\frac{\partial F}{\partial x},\tag{11.4}$$

montrent que F est $\mathbb{C}-$différentiable et $F'=f$. Par suite, F est continûment $\mathbb{C}-$différentiable dans C. Le corollaire 11.5 montre que F est inféfiniment différentiable, donc $F''=f'$ est continue. □

Le résultat suivant est une sorte de réciproque du théorème de Cauchy.

Proposition 11.8. Théorème de Morera. *Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_\Gamma f=0$ pour toute courbe rectifiable fermée Γ dans Ω. Alors f est $\mathbb{C}-$ différentiable.*

Preuve. Dans toute partie connexe de Ω, on choisit un point z_0 et on définit une fonction

$$F(z):=\int_{\gamma_z} f,$$

où γ_z est un chemin rectifiable reliant z_0 à z. La définition est cohérente, grâce à l'hypothèse. En procédant comme dans la preuve ci-dessus, on montre F est une primitive de f. Le corollaire 11.5 permet de conclure. □

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 11.1. Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue. Si f est $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, montrer que f est entière, c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 11.2. En calculant $\displaystyle\int\frac{dz}{z}$ sur deux contours, montrer la formule :

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\frac{2\pi}{ab}$$

Exercice 11.3. Donner les rayons de convergence des séries $\sum n^p z^n$, $\sum\frac{2^n}{n!}z^n, \sum\frac{n^3}{3^n}z^n$ et de la série de Taylor en 0 de $f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$.

Exercice 11.4. Soit $f = \sum a_n(z-z_0)^n$ une série convergente pour $|z-z_0| < R$. Montrer l'égalité de Parseval :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

pour tout $r < R$, et en déduire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|^2$$

Exercice 11.5. Vérifier que la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = 1/z$ n'admet pas de primitive, mais que sa restriction à $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leqslant 0\}$ en admet une. Laquelle ?

12. Fonctions holomorphes

Définition 12.1. Une fonction *holomorphe* dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction $\mathbb{C}-$différentiable dans Ω.
Notation : $\mathcal{O}(\Omega)$ désignera l'espace des fonctions holomorphes dans Ω.
Une fonction *entière* est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Rappel. La dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe, toute fonction holomorphe est indéfiniment $\mathbb{C}-$différentiable et même analytique, toute fonction holomorphe admet localement une primitive holomorphe. Pour les fonctions d'une variable complexe, il y a donc équivalence entre différentiable, continûment différentiable, indéfiniment différentiable, analytique.

Exemple 12.2. La fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$ est holomorphe comme quotient. Elle admet donc une primitive locale. Pour z voisin de 1, prenons

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta},$$

où $\gamma_z(t) = 1 + t(|z| - 1)$ si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_z(t) = |z|e^{i(t-1)}$ si $1 \leqslant t \leqslant \operatorname{Arg} z + 1$. Alors

$$F(z) = \operatorname{Log} z, \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Proposition 12.3. Inégalités de Cauchy. *Soit f une fonction holomorphe dans le disque $\mathbb{D}(a, R)$. Alors*

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{k!}{r^k} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|, \quad \textit{pour} \quad 0 < r < R,\ k \in \mathbb{N}. \tag{12.1}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le Corollaire 11.5 2) :

$$|f^{(k)}(a)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r^{k+1}} |\mathrm{d}\zeta| \leqslant \frac{k!}{r^k} \sup_{|\zeta-a|=r} |f(\zeta)|.$$

□

Corollaire 12.4. Théorème de Liouville. *Si une fonction entière f est à croissance polynomiale, i.e., $|f(z)| \leqslant C|z|^N$, $\forall z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme. Cas particulier : si f est bornée, alors elle est constante.*

Preuve. Puisque f est entière, le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 est infini. D'après (12.1) et la majoration $|f(z)| \leqslant Cr^N$ pour $|z| = r$, on a :

$$|f^{(k)}(0)| \leqslant \frac{k!Cr^N}{r^k} = Cr^{N-k}, k = 0, 1, \ldots$$

En faisant tendre r vers ∞, on voit que $f^{(k)}(0) = 0$ si $k > N$. □

Corollaire 12.5. Théorème de Weierstrass. *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω qui converge localement uniformément vers f. Alors f est holomorphe dans Ω et $\lim_{n\to\infty} f'_n = f'$.*

Preuve. 1. Soit D un disque fermé contenu dans Ω. La suite de fonctions $\{f_n|_D\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(D)$ avec la norme sup. Les inégalités de Cauchy montrent que la suite des dérivées $\{f'_n|_D\}_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(D)$. Comme cet espace est complet, $f'_n \to g \in \mathcal{C}^0(D)$. Puisque l'intégrale de f'_n est nulle sur tout chemin fermé tracé dans D, il en est de même pour g, par passage à la limite. En intégrant g sur un chemin reliant le centre du disque à un point quelconque, on montre comme au Corollaire 11.7 que f est une primitive de g. D'où le résultat.
2. On peut procéder plus directement : Si $\overline{\mathbb{D}(a,r)}$ est un disque fermé contenu dans Ω et si $r' < r$, la formule de Cauchy donne :

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}(a,r')}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par convergence uniforme de f_n vers f sur $\mathbb{S}(a,r)$, on en déduit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}(a,r')},$$

ce qui montre que f est holomorphe dans $\mathbb{D}(a,r')$. La formule

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

donne la convergence des dérivées. □

Corollaire 12.6. Théorème fondamental de l'Algèbre. *Si P est un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes, alors il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$.*

Preuve. On écrit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Puisque

$$P(z) = \big(a_n + \cdots + a_0/z^n\big)z^n,$$

on a $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$ et donc $\lim_{z\to\infty} 1/P(z) = 0$. Si $P(z) \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $1/P$ est une fonction entière bornée. D'après le théorème de Liouville $1/P$ est constant, donc $n = 0$. □

Théorème 12.7. Principe du prolongement analytique. *Soient $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Si Ω est connexe alors l'une des deux conditions suivantes :*

a) f est égale à g dans un ouvert non vide de Ω,

b) $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

entraîne $f = g$.

Preuve. Puisque a) entraîne b), il suffit de montrer que b) donne la conclusion. On peut supposer $g = 0$, en considérant $f - g$. Soit b un point quelconque de Ω. Par connexité, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \Omega$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'ensemble $I := \{t \in [0,1] \mid f^{(k)}(\gamma(t)) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}\}$ est fermé comme intersection de fermés ; il est aussi ouvert, car si toutes les dérivées de f sont nulles au point $\gamma(t)$, $f = 0$ dans un voisinage de $\gamma(t)$ et donc un voisinage de t est contenu dans I. Comme $I \neq \emptyset$ puisque $0 \in I$, ceci n'est possible que si $I = [0,1]$. On a montré $f(b) = 0$.
On peut faire un raisonnement similaire sans passer par les chemins. □

Théorème 12.8. Principe du maximum. *Pour $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$, on a :*
a) si $|f|$ a un maximum local en a, alors f est constante au voisinage de a ;
b) si Ω est connexe et si f a un maximum local, alors f est constante ;
c) si Ω est borné et si f se prolonge continûment à l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω, alors $\max_{\bar{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$.

Preuve. a) Supposons que $|f|$ a un maximum local en a, i.e., $|f(z)| \leqslant |f(a)|$, pour $z \in \overline{\mathbb{D}(a,r)} \subset \Omega$. La formule de Cauchy donne les inégalités suivantes :

$$|f(a)| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|}|\,\mathrm{d}z| \leqslant \frac{1}{2\pi}|f(a)|\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = |f(a)|.$$

On a donc partout des égalités et en particulier

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Ceci entraîne que $|f(a+re^{i\theta})| = |f(a)|$ pour tout θ car si on avait $|f(a+re^{i\theta_0})| < |f(a)|$, on aurait $|f(a+re^{i\theta})| < |f(a)|$ pour θ voisin de θ_0 par continuité et donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta < |f(a)|$.
En faisant varier r, on obtient que $|f|$ est constante dans un disque autour de a. L'Exercice 10.3 montre que f est constante dans ce disque.
b) Soit a un point où f a un maximum local. Alors f est égale à $f(a)$ dans un disque $\mathbb{D}(a,r) \subseteq \Omega$. On applique le principe du prolongement analytique 12.7 aux fonctions f et à la constante $f(a)$. Puisque Ω est connexe, $f = f(a)$.
c) Soit $z_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $|f(z_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |f|$. Si $z_0 \in \partial\Omega$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit Ω_0 la composante connexe de z_0. Par b), f est égale à $f(z_0)$ dans Ω_0 et par continuité dans $\overline{\Omega_0}$. D'où

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = |f(z_0)| = \max_{\partial\Omega_0} |f| \leqslant \max_{\partial\Omega} |f|.$$

□

Lemme 12.9. *Pour $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(a) = 0$ si $k < n$ mais $f^{(n)}(a) \neq 0$, il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que*

$$f(z) = (z-a)^n g(z),\ z \in \Omega \quad \text{et} \quad g(a) \neq 0.$$

Preuve. La fonction $z \mapsto f(z)/(z-a)^n =: g(z)$ est holomorphe dans $\Omega \setminus \{a\}$; elle se prolonge continûment à Ω en posant $g(a) := f^{(n)}(a)/n!$. Elle est donc holomorphe dans Ω d'après l'Exercice 11.1. □

Proposition 12.10. Principe des zéros isolés. *Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \Omega$ et $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\Omega \setminus \{a\}$ qui tend vers a. Si $f(a_j) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$ au voisinage de a.*

Preuve. Si f n'est pas nulle au voisinage de a, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Le Lemme 12.9 donne une fonction holomorphe g au voisinage de a avec $g(a_j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $g(a) \neq 0$. Ceci est impossible. □

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 12.1. Montrer que la convergence localement uniforme dans un onvert Ω de $\mathbb{C}$ est équivalente à la convergente uniforme sur tout compact de Ω.

Exercice 12.2. En intégrant la fonction $z \mapsto f(z)/(z-a)(z-b)$ sur des cercles de grands rayons, donner une nouvelle démonstration du théorème de Liouville lorsque f est holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$.

Exercice 12.3. Principe du minimum. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Montrer que si $|f|$ admet un minimum non nul sur Ω, alors f est constante.
Corollaire : Si $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est non constante et si Ω est borné, alors soit f s'annule en un point de Ω, soit $\min_\Omega |f| = \min_{\partial\Omega} |f|$.

Exercice 12.4. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $\mathbb{D}(0,R)$.
Pour $0 \leqslant r < R$, on définit $M(r) = \sup\{|f(z)| \mid |z| = r\}$. Montrer que
a) la fonction $r \mapsto M(r)$ est continue et croissante ;
b) cette fonction est strictement croissante si, et seulement si, f n'est pas constante.

Exercice 12.5. On définit la fonction Arctg par

$$\operatorname{Arctg} z = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}, \quad \text{pour} \quad |z| < 1,$$

où γ_z est un chemin rectifiable reliant 0 à z dans le disque $\mathbb{D}(0,1)$. Vérifier que la définition est cohérente et

$$\operatorname{Arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \pm \dots \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

Exercice 12.6. Montrer que le sous-espace des polynômes complexes n'est pas dense dans $\mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}(0,1)})$.

Exercice 12.7. On donne une fonction f holomorphe dans un disque $\mathbb{D}(a,R)$. Si $u := \operatorname{Re} f$, montrer que u a la propriété de la moyenne :

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta, \quad r < R.$$

En déduire que u satisfait au principe du maximum et du minimum.

13. Homotopie et homologie

Définition 13.1. Deux chemins γ_0, $\gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ sont *homotopes avec extrémités fixes dans* Ω s'il existe une fonction continue $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ telle que

$$\begin{aligned} &h(0,t) = \gamma_0(t), && h(1,t) = \gamma_1(t), \quad \forall t \in [0,1], \\ &h(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), && h(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1), \quad \forall s \in [0,1]. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Deux lacets ou chemins fermés γ_0, $\gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ sont *homotopes dans* Ω s'il existe une fonction continue $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ telle que

$$\begin{aligned} &h(0,t) = \gamma_0(t), \quad h(1,t) = \gamma_1(t), \quad \forall t \in [0,1], \\ &h(s,0) = h(s,1), \quad \forall s \in [0,1]. \end{aligned} \tag{13.2}$$

On utilise la notation suivante : $\gamma_0 \sim_\Omega \gamma_1$.

Exemple 13.2. 1) Si Ω est connexe, tous les lacets constants sont homotopes.
2) Si Ω est convexe, tous les chemins dans Ω ayant mêmes extrémités sont homotopes ; tout lacet dans Ω est homotope au lacet constant.

Définition 13.3. Un ouvert Ω dans $\mathbb{C}$ est *simplement connexe* si Ω est connexe et si tout lacet dans Ω est homotope au lacet constant.

Exemple 13.4. Un domaine Ω étoilé, i.e., il existe $a \in \Omega$ tel que le segment $[a,z]$ est contenu dans Ω, pour tout $z \in \Omega$, est simplement connexe.
L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est simplement connexe.

Théorème 13.5. *Pour Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) Ω est simplement connexe,
b) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe,
c) pour tout lacet γ dans Ω et $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, l'indice de γ par rapport à w est nul.

Théorème 13.6. Théorème de Cauchy homotopique. *Si f est une fonction holomorphe dans Ω et si γ_0, γ_1 sont des chemins homotopes rectifiables dans Ω, alors*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Application. Toute fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe admet une primitive.

Définition 13.7. Deux lacets rectifiables γ_0 et γ_1 dans un ouvert Ω sont *homologues dans* Ω si $n(\gamma_0, w) = n(\gamma_1, w)$ pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Notation : $\gamma_0 \approx_\Omega \gamma_1$.
Un lacet rectifiable γ dans Ω est *homologue à* 0 *dans* Ω s'il est homologue au lacet constant, i.e., si $n(\gamma, w) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Notation : $\gamma_0 \approx_\Omega 0$.

Proposition 13.8. *Deux lacets homotopes rectifiables sont homologues.*

Preuve. Soit γ_s le lacet paramétré par $t \mapsto h(s,t)$ où h est l'homotopie entre les lacets donnés. Alors $s \mapsto n(\gamma_s, w)$ est une fonction continue à valeurs entières, donc constante. □

Théorème 13.9. Théorème de Cauchy homologique. *Si f est une fonction holomorphe dans Ω et si γ_0 et γ_1 sont des lacets rectifiables homologues dans Ω, alors*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Preuve. C'est une conséquence du résultat suivant : □

Théorème 13.10. Formule générale de Cauchy. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ sont des lacets rectifiables dans Ω tels que*

$$\sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j, w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \tag{13.3}$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z-a} \, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j, a) f(a), \quad \forall a \in \Omega \setminus \bigcup_j \operatorname{supp} \gamma_j. \tag{13.4}$$

Preuve. Cas $m = 1$. On définit une fonction $\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{si } z \neq w, \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

Alors φ est continue et $\forall z \in \Omega$, la fonction $w \mapsto \varphi(z, w)$ est holomorphe dans Ω.
Soit $\Omega_0 := \{w \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \gamma \mid n(\gamma, w) = 0\}$. Alors Ω_0 est ouvert car l'indice varie continûment et ne prend que des valeurs entières (Théorème 5.7) et $\Omega \cup \Omega_0 = \mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est contenu dans Ω_0 par (13.3).
On définit encore une fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$g(w) = \begin{cases} \displaystyle\int_\gamma \varphi(z, w) \, \mathrm{d}z & \text{si } w \in \Omega, \\ \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} \, \mathrm{d}z & \text{si } w \in \Omega_0. \end{cases}$$

Les deux définitions coïncident dans $\Omega \cap \Omega_0$, car $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{z - w} \, \mathrm{d}z = f(w) 2i\pi n(\gamma, w) = 0$. Puisque $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et que $g(w) \to 0$ quand $w \to \infty$ (dans Ω_0), on a $g = 0$ par le théorème de Liouville 12.4. Donc

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} \, \mathrm{d}z = 2i\pi n(\gamma, w) f(w).$$

Pour m quelconque, le même raisonnement s'applique avec

$$\Omega_0 = \{w \in \mathbb{C} \setminus \bigcup \operatorname{supp} \gamma_j \mid \sum n(\gamma_j, w) = 0\}.$$

□

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 13.1. a) Montrer que toute courbe fermée dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est homotope à une courbe tracée sur le cercle unité.
b) Donner toutes les valeurs possibles de $\displaystyle\int_\gamma \frac{d\,z}{1+z^2}$ où γ est une courbe fermée rectifiable tracée dans $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

Exercice 13.2. On considère les lacets γ_1 et γ_2 définis par $\gamma_1(t) = -1 + e^{it}$, $\gamma_2(t) = 1 - e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Vérifier que γ_1 et γ_2 sont homologues dans $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$.
En suivant continûment la "fonction" $z \mapsto f(z) := \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{2}(z+1)}$ qui vaut $i\sqrt{\log 2}$ en $z = 0$ le long du lacet $\gamma := \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$, constater que la valeur de f obtenue à la fin du lacet γ est différente de celle du début. En déduire que γ_1 et γ_2 ne sont pas homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$.

Exercice 13.3. Définir une fonction holomorphe f dans $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ pour $a < b \in \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)}$ pour $x \in]b, \infty[$. Calculer $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

14. Points singuliers et résidus

Lemme 14.1. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\})$. Alors f se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{D}(a, r)$ si, et seulement si, l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*
a) f se prolonge continûment à $\mathbb{D}(a, r)$;
b) f est bornée au voisinage de 0 ;
c) $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

Preuve. Le théorème de Morera 11.8 montre que la condition a) est suffisante. Elle est trivialement nécessaire. La condition a) entraîne b), et b) entraîne c).
Si c) a lieu, alors la fonction g définie par $g(z) = (z-a)f(z)$ satisfait a) ; elle se prolonge donc en une fonction holomorphe dans le disque, nulle en a. D'après le Lemme 12.9, on peut écrire

$$g(z) = (z-a)^n h(h), \quad n \geqslant 1,$$

avec $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a, r))$. En divisant par $z - a$, il vient $f(z) = (z-a)^{n-1}h(z)$, ce qui donne un prolongement continu (holomorphe) de f. Donc c) entraîne a). □

Définition 14.2. Soit f une fonction holomorphe dans un disque épointé $\mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\}$. Si f n'admet pas de prolongement holomorphe à $\mathbb{D}(a, r)$, on dit que f a une *singularité isolée au point a*.

Remarque 14.3. Certains auteurs disent que f a une singularié supprimable ou virtuelle si f est bornée dans un disque épointé.

Définition 14.4. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\})$ une fonction singulière en a. Si $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, on dit que f a un *pôle en a*. Sinon, on dit que f a une *singularité essentielle en a*.

Proposition 14.5. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\})$. Alors f a un pôle en a si, et seulement si, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a, r))$ avec $h(a) \neq 0$ tels que*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \quad \textit{pour} \quad z \in \mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\}.$$

De manière équivalente, f admet le développement

$$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z-a)} + b_0 + b_1(z-a) + \ldots, \quad b_{-m} \neq 0, \tag{14.1}$$

pour $z \in \mathbb{D}(a,r) \setminus \{a\}$, où la série converge normalement dans $\overline{\mathbb{D}(a,r')}$, $r' < r$.

Preuve. Si (14.1) a lieu, alors $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ et ainsi f a un pôle en a. Réciproquement, supposons que f a un pôle en a ; alors f ne s'annule pas dans un disque épointé $\mathbb{D}(a,r') \setminus \{a\}$ et donc $1/f$ est holomorphe dans ce domaine. Comme la fonction $1/f$ est bornée, elle se prolonge en une fonction holomorphe g sur $\mathbb{D}(a,r')$ par le Lemme 14.1. On a $g(0) = 0$ et d'après le Lemme 12.9, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $h_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a,r'))$ avec $h_1(a) \neq 0$ telle que

$$g(z) = (z-a)^m h_1(z), \quad z \in \mathbb{D}(a,r').$$

Puisque g ne s'annule qu'en a, la fonction h_1 ne s'annule pas. La relation suivante a lieu :

$$f(z) = 1/g(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h_1(z)}, \quad z \in \mathbb{D}(a,r').$$

Il reste à prendre $h = 1/h_1$ et à constater que h se prolonge à $\mathbb{D}(a,r)$, puisque $h(z) = f(z)(z-a)^m$ pour $z \in \mathbb{D}(a,r') \setminus \{a\}$.
La formule (14.1) s'obtient en écrivant le développement de Taylor de h en a. □

Définition 14.6. L'entier m de la Proposition 14.5 est l'*ordre du pôle de f en a*. On a

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = \begin{cases} \infty & \text{si } k < m, \\ b_{-m} & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k > m. \end{cases} \tag{14.2}$$

La fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$z \mapsto \frac{b_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z-a)}$$

est la *partie principale de f en a*.

Proposition 14.7. Développement de Laurent. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a,R_2) \setminus \overline{\mathbb{D}(a,R_1)})$ une fonction holomorphe dans une couronne. Alors, pour $z \in \mathbb{D}(a,R_2) \setminus \overline{\mathbb{D}(a,R_1)}$, on a*

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j(z-a)^j, \quad \text{où} \quad b_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{j+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{14.3}$$

et $R_1 < r < R_2$. La série converge normalement dans la couronne fermée $\overline{\mathbb{D}(a,r_2)} \setminus \mathbb{D}(a,r_1)$, avec $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

Preuve. On applique la formule générale de Cauchy 13.10 à $\Omega = \mathbb{D}(a,R_2) \setminus \overline{\mathbb{D}(a,R_1)}$, γ_2 qui paramétrise le cercle de rayon r_2 dans le sens direct et γ_1 qui paramétrise le cercle de rayon r_1 dans le sens rétrograde. Pour $z \in \mathbb{D}(a,r_2) \setminus \overline{\mathbb{D}(a,r_1)}$, on a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{14.4}$$

Traitons la deuxième intégrale de (14.4). On a pour $|z-a| \geqslant r > r_1$ et $|\zeta - a| = r_1$:

$$|\zeta - a|/|z-a| \leqslant r_1/r < 1.$$

On développe en série la fraction

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = -\frac{1}{z-a}\sum_0^\infty \Big(\frac{\zeta - a}{z-a}\Big)^n.$$

Puisque la convergence est normale pour $|z-a| \geqslant r$ et $|\zeta - a| = r_1$, on peut échanger $\sum$ et $\int$ et obtenir

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_0^\infty \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r_1} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\zeta\Big)\frac{1}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{-\infty}^{-1} b_n (z-a)^n.$$

La première intégrale de (14.4) se traite comme dans la preuve du Corollaire 11.5. □

Corollaire 14.8. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\})$ avec le développement $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j(z-a)^j$. Alors*
a) f se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{D}(a,r)$ $\iff$ $b_j = 0,\ \forall j < 0$;
b) f a un pôle d'ordre m en a $\iff$ $b_j = 0,\ \forall j < -m$ et $b_{-m} \neq 0$;
c) f a une singularité essentielle en a $\iff$ $\{j < 0 \mid b_j \neq 0\}$ est infini.

Exemple 14.9. $z \mapsto e^z$ a une singularité essentielle à l'infini car en posant $w = 1/z$, on obtient

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!w^n}.$$

Théorème 14.10. Casorati-Weierstrass. *Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\})$ une fonction avec une singularité essentielle en a. Alors, pour tout $\delta \in]0,r[$, l'ensemble $f(\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. Ainsi, $\forall\delta \in]0,r[$ et $\forall c \in \mathbb{C}$, il existe une suite $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{D}(a,\delta)\setminus\{a\}$ telle que $f(z_j)$ tend vers c.*

Preuve. Supposons le contraire : $\exists\delta \in]0,r[$, $\exists c \in \mathbb{C}$ et $\exists\varepsilon > 0$ tels que $|f(z) - c| \geqslant \varepsilon$, pour tout $z \in \mathbb{D}(a,\delta)\setminus\{a\}$. Donc la fonction $g := 1/(f-c)$ est holomorphe et bornée dans $\mathbb{D}(a,\delta)\setminus\{a\}$. D'après le Lemme 14.1, g se prolonge à $\mathbb{D}(a,\delta)$. Si $g(a) = 0$, alors $1/g$ a un pôle en a et si $g(a) \neq 0$, alors $1/g$ est holomorphe. Comme $1/g = f - c$, on en déduit que f a un pôle en a ou que f est holomorphe. Donc f n'a pas une singularité essentielle en a. □

Exemple 14.11. Pour la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{1/z}$, on a $\exp(\mathbb{D}(0,\delta)) = \mathbb{C}^*$, pour tout $\delta > 0$.

Remarque 14.12. Un résultat plus précis de E. Picard (1856-1941) affirme que l'image de tout disque épointé centré en une singularité essentielle contient $\mathbb{C}$ sauf, au plus, un point.

Définition 14.13. Le *résidu de $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(a,r)\setminus\{a\})$ en a* est le coefficient b_{-1} dans le développement de Laurent (14.3) de f.
Notation : $\mathrm{Res}(f,a)$ ou $\mathrm{Res}_a f$ ou $\mathrm{Res}_{z=a} f(z)$.

Exemple 14.14. 1) Si f a un pôle d'ordre m en a, alors

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-a)^m f(z)\,|_{z=a}\,.$$

2) Soient f ef g holomorphes près de a telles que f a un zéro d'ordre m et g a un zéro d'ordre $m+1$ en a. Alors

$$\operatorname{Res}(\frac{f}{g},a) = (m+1)\frac{f^{(m)}(a)}{g^{(m+1)}(a)}.$$

Théorème 14.15. Théorème des résidus.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a_1,\dots,a_m\in\Omega$. Pour un chemin γ fermé rectifiable dans Ω qui évite $a_1,\dots,a_m$ et qui est homologue à 0 dans Ω, on a :

$$\int_\gamma f = 2\pi i\sum_1^m n(\gamma,a_j)\operatorname{Res}(f,a_j),\quad \textit{pour}\quad f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{a_1,\dots,a_m\}). \tag{14.5}$$

En particulier, si Γ est une courbe de Jordan rectifiable directe dans Ω dont l'intérieur $\operatorname{int}\Gamma$ *est contenu dans Ω, alors*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i\sum_j \operatorname{Res}(f,a_j)$$

où la somme ne porte que sur les j tels que $a_j\in\operatorname{int}\Gamma$.

Preuve. Soit γ_j un lacet circulaire dans Ω qui entoure $-n(\gamma,a_j)$ fois le point a_j. En prenant $\operatorname{supp}\gamma_j$ assez petit, on peut supposer $\operatorname{supp}\gamma_j\cap\operatorname{supp}\gamma=\emptyset$ et $\operatorname{supp}\gamma_j\cap\operatorname{supp}\gamma_k=\emptyset$, $\forall j\neq k$. Par construction

$$n(\gamma,a_j)+\sum_{k=1}^m n(\gamma_k,a_j)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant m,$$

car $n(\gamma_k,a_j)=0$ si $k\neq j$. Pour $w\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, on a aussi :

$$n(\gamma,w)+\sum_{k=1}^m n(\gamma_k,w)=0, \tag{14.6}$$

car tous ces indices sont nuls. Donc (14.6) a lieu $\forall w\in\mathbb{C}\setminus(\Omega\setminus\{a_1,\dots,a_m\})$.
La formule générale de Cauchy 13.10 donne

$$\int_\gamma f+\sum_k\int_{\gamma_k} f=0. \tag{14.7}$$

Pour calculer $\int_{\gamma_k} f$, la convergence uniforme de la série de Laurent permet d'écrire :

$$\int_{\gamma_k} f = \int_{\gamma_k}\sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l(z-a_k)^l\,\mathrm{d}z = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{\gamma_k} b_l(z-a_k)^l\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_k}\frac{b_{-1}\,\mathrm{d}z}{(z-a_k)} = 2\pi i n(\gamma_k,a_k)b_{-1},$$

car $z\mapsto(z-a_k)^l$ admet une primitive si $l\neq -1$ et (5.2) pour le terme restant. Donc

$$\int_{\gamma_k} f = -2\pi i n(\gamma,a_k)\operatorname{Res}(f,a_k).$$

En remplaçant ceci dans (14.7), on obtient la formule (14.5). $\square$

Exemple 14.16.

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \tag{14.8}$$

Preuve. L'intégrale converge car l'intégrant se comporte comme $1/x^2$ quand $x \to \infty$. Par parité, on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

On ferme ce contour en suivant un demi-cercle de rayon R centré en 0 dans le demi-plan supérieur ; d'où un lacet γ_R. La fonction $z \mapsto \dfrac{z^2}{1+z^4} =: f(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}, e^{-i\pi/4}\}$. Ces quatre racines de -1 sont des pôles simples, donc le résidu de f en un de ces pôles a est égal à

$$\frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a}.$$

Le théorème 14.15 donne

$$\int_{\gamma_R} f = \int_{-R}^R \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} + \int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\theta}}{1+R^4e^{4i\pi\theta}}Rie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i\Big(\frac{1}{4e^{i\pi/4}} + \frac{1}{4e^{3i\pi/4}}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

La valeur absolue de l'intégrant de l'intégrale de 0 à π est majorée par $\dfrac{R^3}{R^4-1}$ si bien que cette intégrale tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Le résultat en découle. □

Exemple 14.17.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Preuve. La deuxième formule de la moyenne permet de voir que l'intégrale converge (pas de problème en 0). Par parité :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0,\ R\to\infty}\Big(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R\Big)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

On a $\dfrac{\sin x}{x} = \operatorname{Im}\dfrac{e^{ix}}{x}$. On va intégrer la fonction $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{z} =: f(z)$ sur le contour $\gamma_{r,R}$ formé par les deux intervalles $[-R,-r]$ $[r,R]$ et deux demi-cercles de rayon r et R centrés en 0. On doit éviter 0 car f a un pôle en 0.
Le théorème 14.15 donne

$$\int_{\gamma_{r,R}} f = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\pi^0 e^{ire^{i\theta}}i\,\mathrm{d}\theta + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}}i\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

La deuxième intégrale en θ tend vers 0 quand $R \to \infty$ d'après le lemme de Jordan 14.21. La première intégrale en θ tend vers $-i\pi$ quand $r \to 0$ par continuité. D'où,

$$\lim_{r\to 0,\ R\to\infty}\Big(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R\Big)\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = i\pi$$

et en prenant la partie imaginaire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \pi.$$

□

Exemple 14.18.

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \quad \text{pour} \quad a > 1.$$

Preuve. Quand $|z| = 1$, on a $z = e^{i\theta}$ et donc $\bar{z} = 1/z$. Par suite

$$a + \cos\theta = a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2 + 2az + 1}{2z} \quad \text{quand} \quad z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi].$$

D'où

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = -i\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1}.$$

La seule singularité de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z^2+2az+1}$ dans le disque est $-a + \sqrt{a^2-1}$ et c'est un pôle simple. Le résidu vaut

$$\frac{1}{2(-a+\sqrt{a^2-1}) + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

□

Exemple 14.19.

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = 0.$$

Preuve. L'intégrale converge car $\log x = O(x^{1/2})$ quand $x \to \infty$ et $\int_1^{\infty} x^{-3/2}\, \mathrm{d}x < \infty$. On prend la détermination de l'argument comprise entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. D'où une détermination du logarithme qui est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite d'argument $-\dfrac{\pi}{2}$. On choisit le contour $\gamma_{r,R}$ de l'Exemple 14.17.
On a

$$\mathrm{Res}_{z=i} \frac{\log z}{1+z^2} = \frac{\log 1 + i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4},$$

et donc

$$\int_r^R \frac{\log x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{\log R + i\theta}{1+R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta + \int_{-R}^{-r} \frac{\log|x| + i\pi}{1+x^2}\, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{0} \frac{\log r + i\theta}{1+r^2e^{2i\theta}} ire^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= 2i\pi^2/4.$$

Puisque $\log R = o(R)$ quand $R \to \infty$ et $r\log r = o(1)$ quand $r \to 0$, les intégrales en θ tendent vers 0. D'où

$$2\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x + i\pi\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = i\pi^2/2$$

Le résultat en découle. On a obtenu en outre $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi/2.$ □

Remarque 14.20. On peut aussi choisir la détermination de l'argument entre 0 et 2π et intégrer $\log^2 z/(1+z^2)$ sur le contour suivant : l'intervalle $[r,R]$, le cercle de rayon R, l'intervalle $[r,R]$ dans le sens opposé puis le cercle de rayon r rétrograde. Cette méthode donne aussi un résultat quand l'intégrant n'est pas pair, cf. Exercice 14.6.

Lemme 14.21. Lemme de Jordan.

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta < \pi/R, \quad R>0.$$

Preuve. On a

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

La fonction $\theta\mapsto\sin\theta$ est concave sur $[0,\pi/2]$ donc $\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta$, pour $\theta\in[0,\pi/2]$. En intégrant, il vient

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

□

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 14.1. Classer les singularités des fonctions $\dfrac{\sin z}{z}$, $\dfrac{1}{\cos z}$, $\dfrac{\log(1+z)}{z^2}$, $z^n\sin(\dfrac{1}{z})$.

Exercice 14.2. Donner les développements de Laurent de la fonction définie par $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes :

$$C_1=\left\{z\in\mathbb{C},\frac{1}{2}<|z|<1\right\} \quad , \quad C_2=\{z\in\mathbb{C},1<|z|<2\} \quad , \quad C_3=\{z\in\mathbb{C},2<|z|\}.$$

Exercice 14.3. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(a,r)\setminus\{a\}$ telle que :

$$\iint_{D(a,r)^*}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<+\infty$$

alors f se prolonge holomorphiquement à $D(a,r)$.

Exercice 14.4. Soit $f=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2^n}$. Vérifier que cette série converge pour $|z|<1$ et que f satisfait la relation $f(z)=z+f(z^2)$. En déduire que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de 1, ni au voisinage de -1, i, $-i$. Et finalement, f ne s'étend à aucun ouvert connexe contenant strictement $D(0,1)$.

Exercice 14.5. Par la méthode des résidus, calculer :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2acos\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

où a est un nombre réel tel que $a^2<1$

Exercice 14.6. Par la méthode des résidus, vérifier les formules suivantes :

$a)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha}}{(1+x)^m}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\alpha(\alpha+1)...(\alpha+m-2)}{(m-1)!\sin(\pi\alpha)} \quad , \quad m \geqslant 2, \quad 0<\alpha<1;$

$b)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{\log^2(a)-\log^2(b)}{2(a-b)} \quad , \quad a \neq b > 0\,;$

$c)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^b} = \frac{\pi}{b\sin(\frac{\pi}{b})} \quad , \quad b>1.$

Exercice 14.7. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+13}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

15. Fonctions méromorphes

Définition 15.1. Une fonction *méromorphe* dans un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe dans Ω sauf en des points isolés où elle peut avoir des pôles. L'ensemble des fonctions méromorphes dans Ω sera désigné par $\mathcal{M}(\Omega)$. On a $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$.

Remarque 15.2. Puisqu'une limite de pôles n'est pas une singularité isolée, l'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe n'a pas de point d'accumulation ; c'est un fermé discret.

Remarque 15.3. Une fonction $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ définit une fonction continue $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ en posant $f(a) = \infty$ si a est un pôle de f. On a mieux : $1/f$ est holomorphe près de a, d'après la Proposition 14.5 et elle s'annule en a.
Par analogie, on dit qu'une fonction définie au voisinage de l'infini est *holomorphe à l'infini* si $w \mapsto f(1/w)$ est holomorphe près de 0 et que f a un *pôle à l'infini* si $w \mapsto \dfrac{1}{f(1/w)}$ est holomorphe près de 0 et s'annule en 0.

Exemple 15.4. Pour deux polynômes P et Q, le quotient P/Q est une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

Théorème 15.5. *Si f est une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$, alors f est une fraction rationnelle.*

Preuve. L'ensemble des pôles de f est un sous-ensemble fermé de $\widehat{\mathbb{C}}$, il est donc compact. Comme il est discret, il est fini. Soient $z_1, \dots, z_k$ les pôles de f situés dans $\mathbb{C}$. Si m_j est l'ordre du pôle de f en z_j, on introduit le polynôme

$$Q(z) := (z-z_1)^{m_1} \dots (z-z_k)^{m_k}.$$

Alors la fonction Qf est entière avec un pôle éventuel à l'infini. Donc $|Q(z)f(z)| \leqslant C|z|^n$, pour $C>0$ et $n \in \mathbb{N}$ convenables. D'après le théorème de Liouville 12.4, Qf est un polynôme P de degré au plus n et donc $f = P/Q$. $\square$

Proposition 15.6. *Pour tout Ω ouvert dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions méromorphes $\mathcal{M}(\Omega)$ sur Ω a une structure de corps qui contient naturellement le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes. En fait, ces corps sont égaux (voir Corollaire 16.16 pour le cas $\Omega = \mathbb{C}$).*

Proposition 15.7. Principe de l'argument. *Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ une fonction méromorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On désigne par $z_0, z_1, \ldots$ la suite des zéros de f et par $p_0, p_1, \ldots$ la suite des pôles de f, répétés selon leurs multiplicités. Si γ est un chemin fermé rectifiable homologue à 0 dans Ω qui évite les zéros et les pôles de f, alors*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum n(\gamma, z_j) - \sum n(\gamma, p_k). \tag{15.1}$$

N.B. Les sommes sont finies. Quand γ est une courbe simple parcourue dans le sens direct, le second membre de (15.1) donne le nombre de zéros moins le nombre de pôles situés à l'intérieur de γ, comptés avec leurs multiplicités.

Preuve. Au voisinage du zéro z_j, il existe d'après la Proposition 12.10 une fonction g_j holomorphe avec $g_j(z_j) \neq 0$ telle que

$$f(z) = (z - z_j)^{m_j} g_j(z), \quad m_j > 0.$$

D'où

$$f'(z) = m_j(z - z_j)^{m_j - 1} g_j(z) + (z - z_j)^{m_j} g_j'(z) \quad \text{pour } z \text{ voisin de } z_j.$$

Donc

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{m_j}{z - z_j} + \frac{g_j'}{g_j}(z) \quad \text{pour } z \text{ voisin de } z_j,$$

et $\dfrac{g_j'}{g_j}$ est holomorphe près de z_j.
Au voisinage du pôle p_k de f, on a de même une fonction holomorphe h_k telle que

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{-n_k}{z - p_k} + \frac{h_k'}{h_k}(z) \quad \text{pour } z \text{ voisin de } p_k, \text{ avec } n_k > 0,$$

et $\dfrac{h_k'}{h_k}$ est holomorphe près de p_k.
Le résultat découle du théorème des résidus 14.15 puisque

$$\operatorname{Res}(f'/f, z_j) = m_j \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}(f'/f, p_k) = -n_k.$$

□

Corollaire 15.8. Théorème de Rouché. *Soient f et g des fonctions méromorphes dans un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{D}(a,r)}$ un disque fermé contenu dans Ω. Si f et g n'ont ni zéros ni pôles sur $\partial\mathbb{D}(a,r)$ et satisfont $|f + g| < |f| + |g|$ sur $\partial\mathbb{D}(a,r)$, alors*

$$\#Z(f) - \#P(f) = \#Z(g) - \#P(g), \tag{15.2}$$

où $\#Z(f)$ est le nombre de zéros (avec multiplicité) de f dans $\mathbb{D}(a,r), \ldots$ En particulier, quand f et g sont holomorphes, alors f et g ont le même nombre de zéros dans le disque.

Remarque 15.9. La formulation classique est $|f - g| < |f|$. La forme symétrique est due à I. Glicksberg en 1976.

Preuve. Pour $z \in \partial\mathbb{D}(a,r)$, on a $g(z) \neq 0$ et $\left|\frac{f}{g}(z)+1\right| < \left|\frac{f}{g}\right|(z)+1$; par continuité, cette inégalité a lieu aussi dans un voisinage U de $\partial\mathbb{D}(a,r)$. Soit

$$V := \{w \in \mathbb{C} \mid |w+1| < |w|+1\} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w+1| \neq |w|+1\}.$$

Alors $V = \mathbb{C} \setminus [0,\infty[$, car $|w+1| = |w|+1$ a lieu si, et seulement si, $\operatorname{Re} w = |w|$. La fonction holomorphe f/g envoie U dans V. La fonction $w \mapsto 1/w$ a une primitive $w \mapsto \log w$ dans V, en choisissant l'argument entre 0 et 2π ; par composition, on en déduit une primitive $\log f/g$ dans U de $\dfrac{(f/g)'}{f/g}$. Par suite, l'intégrale $\int_{\partial\mathbb{D}(a,r)} \dfrac{(f/g)'}{f/g}$ est nulle. L'égalité $\dfrac{(f/g)'}{f/g} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}$ et le principe de l'argument (Prop. 15.7) permettent de conclure. □

Application 1. Théorème fondamental de l'algèbre (voir Corollaire 12.6).

Preuve. Soit P un polynôme de degré $n > 0$: $P(z) = a_n z^n + \dots$. Puisque $\dfrac{P(z)}{a_n z^n}$ tend vers 1 quand $z \to \infty$, on a $\left|\dfrac{P(z)}{a_n z^n} - 1\right| < 1$ ou $|P(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|$ quand $|z| = R$ est assez grand. Par suite, P a le même nombre de racines que le polynôme z^n dans $\mathbb{D}(0,R)$, c'est-à-dire n. □

Application 2. Continuité des zéros d'un polynôme. Soit $P(\lambda,z) = a_n(\lambda)z^n + \dots + a_0(\lambda)$ un polynôme à coefficients dépendant continûment d'un paramètre λ. Si z_0 est une racine de $P(\lambda_0,\cdot)$ de multiplicité m, alors pour ε et $|\lambda-\lambda_0|$ assez petits, le polynôme $P(\lambda,\cdot)$ a m racines dans le disque $\mathbb{D}(z_0,\varepsilon)$.

Preuve. Comme $P(\lambda_0,\cdot)$ ne s'annule pas sur un cercle de rayon ε autour de z_0, il existe $c > 0$ tel que $|P(\lambda_0,z)| \geqslant c$ si $|z-a| = \varepsilon$. La dépendance continue des coefficients de P en λ donne l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$|\lambda-\lambda_0| < \delta,\ |z-z_0| = \varepsilon \Longrightarrow |P(\lambda,z) - P(\lambda_0,z)| < c \leqslant |P(\lambda_0,z)|.$$

□

Application 3. Lemme d'Hurwitz. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui converge localement uniformément vers f. On suppose que le disque fermé $\overline{\mathbb{D}(a,r)}$ est contenu dans Ω et que f ne s'annule pas sur $\partial\mathbb{D}(a,r)$. Alors, pour n assez grand, f_n et f ont le même nombre de zéros dans $\mathbb{D}(a,r)$.
On en déduit que si f_n converge localement uniformément vers f et que f_n ne s'annule pas dans $\mathbb{D}(a,r)$ pour n assez grand, alors soit $f = 0$, soit f ne s'annule pas dans $\mathbb{D}(a,r)$.

Application 4. Toute fonction holomorphe non constante dans un ouvert Ω est ouverte.

Preuve. Il suffit de montrer que $f(\Omega)$ est ouvert. Soit $b \in f(\Omega)$; il existe donc $a \in \Omega$ tel que $b = f(a)$. L'équation $f(z) - b = 0$ n'a que la solution $z = a$ dans un disque $\overline{\mathbb{D}}(a,r) \subseteq \Omega$ d'après le principe des zéros isolés. Par suite, $|f(z)-b| \geqslant s > 0$ quand $|z-a| = r$. Avec $b' \in \mathbb{C}$ tel que $|b'-b| < s$, on a

$$|f(z) - b' - (f(z)-b)| = |b'-b| < s \leqslant |f(z)-b| \quad \text{si } |z-a| = r.$$

Donc $f(z) = b'$ a au moins une solution dans le disque $\mathbb{D}(a, r)$, ce qui montre l'inclusion $f(\mathbb{D}(a, r)) \supseteq \mathbb{D}(b, s)$.

$\square$

Application 5. THÉORÈME D'INVERSION LOCALE. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ tel que $f'(a) \neq 0$. Alors f est localement inversible près de a et son inverse est holomorphe.

Preuve. Dans la preuve précédente, on peut ajouter que l'équation $f(z) = b'$, pour $|b' - b| < s$, a exactement une solution dans le disque $\mathbb{D}(a, r)$, donc f^{-1} est bien définie dans $\mathbb{D}(b, s)$. La différentiabilité de f^{-1} est immédiate puisque

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_o} = \frac{z - z_o}{f(z) - f(z_0)} \to \frac{1}{f'(z_0)}, \quad \text{quand } w \to w_0 \quad .$$

$\square$

Définition 15.10. Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On dit que la série $\sum u_m$ converge localement uniformément dans Ω si pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u_n n'a pas de pôle dans K pour $n \geqslant N$ et si la série $\sum\limits_{n \geqslant N} u_n$ converge uniformément sur K. La somme appartient donc à $\mathcal{M}(\Omega)$ et $(\sum u_n)' = \sum u_n'$ d'après le théorème de Weierstrass 12.5.

Exemple 15.11. $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$.

Preuve. La convergence est normale dans toute bande $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leqslant N\}$ car

$$|\operatorname{Re} z| \leqslant N \Longrightarrow |z - n|^2 \geqslant (\operatorname{Re} z - n)^2 \geqslant (n - N)^2 \quad \text{pour } n > N$$

et $\sum_{n > N} (n - N)^{-2} < \infty$. La somme de la série définit donc une fonction f qui est méromorphe dans $\mathbb{C}$, d'après la définition 15.10.
Un changement d'indice de sommation montre que f est périodique de période 1. Il est clair que f a un pôle double en 0 de partie principale $1/z^2$. On vérifie que $f(x+iy) \to 0$ quand $|y| \to \infty$, uniformément en x, car

$$\lim_{|y| \to \infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + iy - n)^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \lim_{|y| \to \infty} \frac{1}{(x + iy - n)^2} = 0$$

par convergence uniforme de la série dans la bande verticale $[0, 1] + i\mathbb{R}$.
On vérifie que $z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ a les mêmes propriétés. La différence $f - g$ est donc une fonction entière et bornée. Par Liouville, elle est nulle. $\square$

Théorème 15.12. THÉORÈME DE MITTAG-LEFFLER. *Soit $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ qui tend vers l'injfini et $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes avec $P_n(0) = 0$. Alors il existe une fonction méromorphe f dans $\mathbb{C}$ telle que la partie principale de f en b_n soit égale à $P_n(\dfrac{1}{z - b_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En fait, il existe des polynômes p_n et une fonction entière g tels que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_n(\frac{1}{z - b_n}) - p_n(z) \right) + g(z).$$

Preuve. On fait le développement de Taylor T_n de $P_n(\dfrac{1}{z-b_n})$ en 0 jusqu'à un certain ordre m_n à déterminer plus tard. Comme la fonction $z \mapsto P_n(\dfrac{1}{z-b_n})$ est holomorphe dans $\mathbb{D}(0,|b_n|)$, le lemme 15.13 donne la majoration suivante :

$$|P_n(z) - T_n(z)| \leqslant 2M_n\left(\frac{2|z|}{|b_n|}\right)^{m_n}, \quad \text{pour } |z| \leqslant |b_n|/4,$$

où $M_n = \sup_{|\zeta|=|b_n|/2} |P_n(\dfrac{1}{\zeta - b_n})|$.

Pour faire converger la série $\sum\big(P_n(z) - T_n(z)\big)$ pour tout z, il suffit de choisir m_n de sorte que $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/m_n}/|b_n| = 0$, par exemple $m_n \geqslant \log M_n$, puisque $M_n^{1/m_n}/|b_n| \leqslant e^{m_n/m_n}/b_n = e/b_n$ tend vers 0 par hypothèse. □

Lemme 15.13. Développement limité avec reste . *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{\mathbb{D}(0,R)}$. Pour $|z| < R$ et $k \in \mathbb{N}$, on a la formule*

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + ... + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}z^{k-1} + \frac{z^k}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^k(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{15.3}$$

Preuve. Dans la formule de Cauchy, on remplace $\dfrac{1}{\zeta - z}$ par

$$\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{\zeta^k} + \frac{z^k}{\zeta^k(\zeta - z)}$$

Le développement limité avec reste découle du Corollaire 11.5. □

Exemple 15.14. 1) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ ne converge pas, mais la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ converge et donne une fonction méromorphe avec les mêmes parties principales $\dfrac{1}{z-n}$ en $n \in \mathbb{N}$.

2) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$ ne converge pas absolument. Si on précise l'ordre suivant de $\mathbb{Z}$: $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ alors la série converge car elle devient

$$\frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \tag{15.4}$$

On montre que la somme vaut $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ en procédant comme à l'Exemple 15.11.

3) Si la série $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ converge, alors la série de fonctions méromorphes $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z-b_n}$ converge dans $\mathbb{C}$ car $|z - b_n| \geqslant \dfrac{1}{2}|b_n|$ si $|z| \leqslant M$ et n est grand.

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 15.1. Soit λ un nombre réel > 1. Montrer que l'équation $e^{-z} + z - \lambda = 0$ a exactement une solution dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Vérifier que cette solution est réelle.

Exercice 15.2. Avec les notations de l'application 5 ci-dessus, vérifier la formule suivante :

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z, \quad |w-b| < s.$$

Exercice 15.3. Vérifier les formules suivantes :

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-\frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad \pi \operatorname{tg} \pi z = 2z\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 - z^2}.$$

Exercice 15.4. (Méthode de Cauchy) Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe ayant des pôles simples aux points $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}^*$ et soit $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tendant vers l'infini tels que $R_k \neq |a_n|$ pour tous k, n. On suppose que $\sup_{|z|=R_k} |f(z)| \leqslant M < \infty$ pour tout k. Montrer que :

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Res}(f, a_n)\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Indication : Le théorème des résidus donne

$$f(z) = \sum_{|a_n|<R_k} \frac{\mathrm{Res}(f, a_n)}{z-a_n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Poser $z = 0$ et faire la différence.

Appliquer cette méthode pour montrer la formule : $\displaystyle\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}$.

Exercice 15.5. Décomposer en série de fractions simples la fonction f donnée par

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

16. Produits infinis de fonctions holomorphes

Pour définir le produit d'une infinité de nombres complexes $a_1, a_2, \ldots$, on essaie la définition suivante :

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge si} \quad \lim_{n\to\infty} a_1 \ldots a_n \quad \text{existe.} \tag{16.1}$$

Cette définition a les deux défauts majeurs suivants :
1) Si l'un des facteurs est nul, alors le produit converge.
2) Si $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim a_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_1 \ldots a_n = 0$ car $|a_n| \leqslant 1/2$ pour n assez grand, mais aucun des facteurs est nul.
Pour remédier à ces inconvénients, on corrige la définition comme suit :

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si : } a_n \neq 0,\ \forall n \geqslant 1,\ \lim_{n\to\infty} a_1 \ldots a_n \text{ existe et est différente de } 0. \tag{16.2}$$

Cette version est maintenant trop restrictive, car elle ne couvre pas les produits finis. Voici la version définitive :

Définition 16.1. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant N$ et $\lim_{p\to\infty} a_N a_{N+1} \dots a_{N+p}$ existe et est différente de 0. Dans ce cas, on écrit

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \dots a_{N-1} \lim_{p\to\infty} a_N a_{N+1} \dots a_{N+p} = a_1 \dots a_{N-1} \prod_{N}^{\infty} a_n.$$

Remarque 16.2. 1) Si le produit $\prod a_n$ converge, alors $\lim a_n = 1$. En effet, puisque $\lim_{N<n\to\infty} a_N \dots a_{n-1}$ est différente de 0, on peut écrire

$$\lim_{N<n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_N \dots a_n / \lim_{n\to\infty} a_N \dots a_{n-1} = 1.$$

2) Si le produit $\prod a_n$ converge, alors il est nul si, et seulement si, l'un des facteurs a_n est nul.

Proposition 16.3. *On suppose $a_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\prod_{1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \quad \Longleftrightarrow \sum_{1}^{\infty} \operatorname{Log} a_n \quad \textit{converge.}$$

Preuve. 1) Supposons que le produit converge. Sans perte de généralité, en modifiant a_1, on peut supposer que ce produit est égal à 1. Soit $A_n := a_1 \dots a_n$; pour n grand, a_n et A_n appartiennent au disque $\mathbb{D}(1,1)$ puisque a_n et A_n tendent vers 1. Comme $\operatorname{Log} zw = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$ pour z et $w \in \mathbb{D}(1,1)$ (cf. Exercice 1.6), on vérifie par récurrence la formule $\operatorname{Log} A_{n+k} = \operatorname{Log} A_n + \dots + \operatorname{Log} a_{n+k}$, pour n assez grand et $k \in \mathbb{N}$. Par suite, la série $\sum \operatorname{Log} a_n$ converge.
2) Il suffit de prendre l'exponentielle. □

Remarque 16.4. La convergence de $\sum \operatorname{Log}(1+u_n)$ n'est pas reliée à celle de $\sum u_n$ comme le montrent les exemples $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ et $v_n = (-1)^n/\sqrt{n} + 1/2n$. On a $\sum u_n$ converge et $\sum \operatorname{Log}(1+u_n)$ diverge, $\sum v_n$ diverge et $\sum \operatorname{Log}(1+u_n)$ converge.

Définition 16.5. Le produit infini $\prod_1^{\infty}(1+u_n)$ *converge absolument* s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \neq -1$ pour $n \geqslant N$ et si $\sum_N^{\infty} |\operatorname{Log}(1+u_n)|$ converge.

Proposition 16.6. *Le produit $\prod_1^{\infty}(1+u_n)$ converge absolument si, et seulement si, la série $\sum_1^{\infty} u_n$ converge absolument.*

Preuve. Il suffit de vérifier l'encadrement

$$\frac{1}{2}|z| \leqslant |\operatorname{Log}(1+z)| \leqslant 2|z|, \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{16.3}$$

En effet, si $\prod(1+u_n)$ converge absolument, alors $\operatorname{Log}(1+u_n) \to 0$ et donc $1+u_n \to 1$, (16.3) s'applique ; si $\sum |u_n|$ converge, alors $u_n \to 0$ et (16.3) s'applique.
Pour vérifier (16.3), on fait le développement de Taylor

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \pm \dots, \quad |z| < 1.$$

D'où
$$|\operatorname{Log}(1+z)| \leqslant |z|(1+\frac{|z|}{2}+\dots) \leqslant |z|\frac{1}{1-|z|} \leqslant 2|z| \quad \text{si} \quad |z|<1/2.$$
D'autre part,
$$\frac{|z|}{2}+\frac{|z|^2}{3}+\dots \leqslant \frac{|z|}{2}(1+|z|+\dots) = \frac{|z|}{2}\frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{|z|}{2}2 = |z| \leqslant \frac{1}{2}$$
entraîne
$$|\operatorname{Log}(1+z)| \geqslant |z|(1-\frac{|z|}{2}-\frac{|z|^2}{3}-\dots) \geqslant \frac{|z|}{2}.$$
□

Remarque 16.7. 1) Si le produit $\prod a_n$ converge absolument, alors le produit $\prod a_{\sigma(n)}$ converge absolument pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ et ces produits sont égaux.
2) Si $\prod a_n$ et $\prod b_n$ convergent, alors $\prod a_n b_n$ converge et on a $\prod a_n b_n = \prod a_n \prod b_n$.

Définition 16.8. Soit $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ une suite de fonctions sur $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. On dit que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge* si, pour tout $z \in \Omega$, il existe $N(z) \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(z) \neq 0$ pour $n \geqslant N(z)$ et $\lim_{p\to\infty} f_N(z) f_{N+1}(z) \dots f_{N+p}(z)$ existe et est différente de 0.
Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformément* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(z) \neq 0$ pour $n \geqslant N$, $\forall z \in \Omega$ et si la suite $f_{N+1} \dots f_{N+p}$ converge uniformément, quand $p \to \infty$, vers une fonction qui ne s'annule en aucun point de Ω.
Le produit infini de fonctions $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ *converge normalement* si la série numérique $\sum \sup_{\Omega} |u_n|$ converge. On a clairement : si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge normalement, alors $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge uniformément et absolument.

Proposition 16.9. *Soient $u_1, \dots, u_n, \dots : \Omega \to \mathbb{C}$ des fonctions sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Si la série $\sum_1^{\infty} |u_n|$ converge uniformément, alors*
a) le produit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge uniformément et absolument ;
b) le produit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ est indépendant de l'ordre des facteurs ;
c) il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que les produits $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ et $(1+u_1)\dots(1+u_N)$ ont les mêmes zéros.

Preuve. Découle immédiatement des définitions. □

Corollaire 16.10. *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes non nulles dans Ω telle que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ converge localement uniformément. Alors le produit $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge localement uniformément vers $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. De plus, $Z(f) = \bigcup_1^{\infty} Z(f_n)$,* $\operatorname{ord}_a f = \sum \operatorname{ord}_a f_n$ *et*

$$\frac{f'}{f} = \sum_1^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}, \quad \textit{comme somme de fonctions méromorphes.} \tag{16.4}$$

Preuve. Vérifions la dernière affirmation. Soit D un disque fermé contenu dans Ω. Puisque seules un nombre fini de f_n s'annulent dans D, on peut supposer $f_n(z) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall z \in D$. Puisque $\prod_1^n f_k$ converge uniformément vers f sur D, la suite des dérivées $(\prod_1^n f_k)'$ converge uniformément vers f' (Corollaire 12.5). Comme
$$(\prod_1^n f_k)' = \sum_1^n (f_k'/f_k) \prod_1^n f_j$$

on obtient (16.4). □

Remarque 16.11. Si f est une fonction entière avec un zéro d'ordre m en $0 \in \mathbb{C}$ et un nombre fini de zéros non nuls $a_{m+1}, \dots, a_n$ répétés avec leurs multiplicités, alors il existe g entière telle que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{m+1}^{n} (1 - \frac{z}{a_j}), \quad \text{avec} \quad m \in [0, n]. \tag{16.5}$$

En effet, le quotient $h(z) : f(z)/z^m \prod_{m+1}^{n}(1 - \frac{z}{a_j})$ définit une fonction entière qui ne s'annule pas. L'image $h(\mathbb{C})$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$; on peut donc définir un logarithme dans $h(\mathbb{C})$ comme primitive de $z \mapsto 1/z$ (cf. Théorème 13.6) et prendre $g = \log h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ puisque $h = e^g$.
On veut généraliser ce résultat à f entière quelconque. On pourra prendre

$$z^m e^{g(z)} \prod_{m+1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_j})$$

pour autant que le produit converge localement uniformément, par exemple si la série $\sum_{m+1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_n|}$ converge. En général, il faut introduire des facteurs de convergence et remplacer le produit par

$$\prod_{m+1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n}) e^{p_n(z)},$$

avec des polynômes p_n. Comme

$$\mathrm{Log}(1 - \frac{z}{a_n}) + p_n(z) = -\frac{z}{a_n} - \frac{z^2}{2a_n^2} - \cdots + p_n(z),$$

le choix $p_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^k}{ka_n^k}$ convient si $\sum \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty$.

Définition 16.12. Pour $k \geqslant 0$, le *facteur élémentaire* E_k *d'ordre* k est la fonction

$$E_k(z) = (1 - z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}} \quad \text{si} \quad k > 0, \quad E_0(z) = (1 - z). \tag{16.6}$$

Pour $a \neq 0$, on a est immédiatement :

$$E_k(z/a) = 0 \iff z = a.$$

Lemme 16.13. *La majoration suivante a lieu pour* $|z| \leqslant 1$ *:*

$$|1 - E_k(z)| \leqslant |z|^{k+1}. \tag{16.7}$$

On en déduit que $E_k \to 1$ *localement uniformément dans le disque* $\mathbb{D}(0, 1)$.

Preuve. Puisque $E_k(0) = 1$, on a $(E_k - 1)(0) = 0$. En dérivant :

$$(E_k - 1)'(z) = e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}} \big(-1 + (1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1})(1 - z)\big) = -z^k e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}}$$
$$=: -z^k \sum_{0}^{\infty} b_j z^j,$$

où les coefficients b_j sont tous positifs ou nuls. En intégrant :

$$(E_k - 1)(z) = -\sum_0^\infty a_j z^{j+k+1} =: -z^{k+1} g(z), \tag{16.8}$$

avec $a_j = b_j/(j+k+1) \geqslant 0$. Donc

$$|g(z)| = |\sum_0^\infty a_j z^j| \leqslant \sum_0^\infty a_j |z^j| \leqslant g(1).$$

Comme $(E_k - 1)(1) = -1$, on a $g(1) = 1$ et la majoration (16.7) découle de (16.8). $\square$

Théorème 16.14. THÉORÈME DE WEIERSTRASS. *Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{C}^*$ qui tend vers l'infini. Alors il existe une fonction entière f qui s'annule exactement sur l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots\}$. En fait,*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_1^\infty E_{n-1}(z/a_n), \quad \textit{avec} \quad g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}). \tag{16.9}$$

Preuve. La convergence du produit (16.9) provient du Lemme 16.13. En effet,

$$|1 - E_{n-1}(z/a_n)| \leqslant |z/a_n|^n \leqslant (1/2)^n \quad \text{pour } |z| \leqslant |a_n|/2 \quad .$$

Le produit converge donc normalement dans tout disque de $\mathbb{C}$. $\square$

Exemple 16.15. Pour $a_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$, le produit infini $z\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}(1 - z/n)$ ne converge pas mais le produit

$$z \prod_{n\in\mathbb{Z}^*} (1 - z/n) e^{z/n}$$

converge puisque $|E_1(z/n) - 1| \leqslant |z|^2/n^2$. On a

$$z \prod_{n\in\mathbb{Z}^*} (1 - z/n) e^{z/n} = z \prod_1^\infty (1 - z^2/n^2) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \tag{16.10}$$

Cette relation se vérifie comme suit : Soit $f(z)$ le membre de gauche de (16.10). D'après (16.4) et l'Exemple 15.14 2), on a :

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{-2z}{n^2 - z^2} = \pi \operatorname{cotg} \pi z.$$

Posons $g(z) = \sin \pi z$. Alors $f'/f = g'/g$ et donc $(f/g)' = 0$. Par suite, $f = Cg$, avec $C \in \mathbb{C}$. Quand $z \to 0$, on a $f(z)/z \to 1$ et $g(z)/z \to \pi$. Donc $C = 1/\pi$ ce qui démontre (16.10).

Corollaire 16.16. *Toute fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions entières, i.e., $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \operatorname{Frac} \mathcal{O}(\mathbb{C})$.*

Preuve. Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. L'ensemble des pôles de F est dénombrable et sans point d'accumulation d'après la Remarque 15.2. D'après le Théorème 16.14, il existe une fonction entière g qui s'annule en chaque pôle de F, à l'ordre égal à l'ordre du pôle. Donc $f := Fg$ est une fonction entière, si bien que $F = f/g \in \operatorname{Frac} \mathcal{O}(\mathbb{C})$. $\square$

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 16.1. Etudier la convergence des produits

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1},\quad \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right),\quad \prod_{n=0}^{+\infty}(1+z^{2^n}).$$

Exercice 16.2. Constater que le produit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+i/n)$ diverge et que, par contre, le produit $\prod_{n=1}^{\infty}|1+i/n|$ converge.

Exercice 16.3. Vérifier la formule suivante :

$$\cos\pi z=\prod_{1}^{+\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

Exercice 16.4. Établir la formule $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n(1-z^n)}\right)$, pour $|z|<1$.

17. Les fonctions Γ et ζ

La fonction auxiliaire suivante est utile dans la définition de la fonction Γ d'Euler :

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{17.1}$$

Le produit converge localement uniformément dans $\mathbb{C}$ (cf. Exemple 16.15) et définit une fonction entière qui a des zéros simples sur les entiers négatifs. En comparant avec le développement de $\sin\pi z$ on obtient

$$zG(z)G(-z)=\frac{\sin\pi z}{\pi},\quad z\in\mathbb{C}.$$

Comme les fonctions $z\mapsto G(z-1)$ et $z\mapsto zG(z)$ ont les mêmes zéros, il existe $g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que

$$G(z-1)=zG(z)e^{g(z)}. \tag{17.2}$$

Lemme 17.1. Constante d'Euler. *La fonction g est constante et vaut*

$$\gamma:=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)\approx 0.57722$$

Preuve. On prend la dérivée logarithmique de (17.2) :

$$\sum_1^\infty\Big(\frac{1/n}{1+(z-1)/n}-\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty\Big(\frac{1/n}{1+z/n}-\frac{1}{n}\Big)+g'(z)$$

$$\sum_1^\infty\Big(\frac{1}{n-1+z}-\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty\Big(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n}\Big)+g'(z)$$

$$\frac{1}{z}-1+\sum_1^\infty\Big(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n+1}\Big)=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty\Big(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n+1}\Big)+\sum_1^\infty\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\Big)+g'(z).$$

Donc $g'(z)=0$ et $g(z)=\gamma$. Pour calculer γ, on pose $z=1$ dans (17.2) et il vient :

$$G(0)=1=G(1)e^\gamma=e^\gamma\lim_{n\to\infty}\tfrac{2}{1}\,\tfrac{3}{2}\cdots\tfrac{n+1}{n}e^{-1-\frac12-\cdots-\frac1n}=e^\gamma e^{-\left(1+\cdots+\frac1n-\log(n+1)\right)}.$$

$\square$

Définition 17.2. La *fonction* Γ *d'Euler* est définie par

$$\Gamma(z)=\frac{1}{ze^{\gamma z}G(z)}=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_1^\infty\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^{-1}e^{z/n},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}. \tag{17.3}$$

Ainsi Γ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec pôles simples sur $\mathbb{Z}_-$ et aucun zéro.

Proposition 17.3. *Les propriétés suivantes ont lieu, pour* $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ *:*

1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ *(équation fonctionnelle) ;*
2) $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ *(formule de Gauss) ;*
3) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ *(formule des compléments) ;*
4) $\Gamma(1)=1,\ \Gamma(n)=(n-1)!,\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.
5) $\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$ *(formule de doublement de Legendre) ;*

Preuve. 1) On a :

$$z\Gamma(z)=\frac{1}{e^{\gamma z}G(z)}=\frac{1}{e^{\gamma z}(z+1)G(z+1)e^\gamma}=\frac{1}{(z+1)e^{\gamma(z+1)}G(z+1)}=\Gamma(z+1).$$

2)

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_1^\infty\frac{n}{n+z}e^{z/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{z\log n}n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

3)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)=\frac{-z}{zG(z)e^{\gamma z}(-z)G(-z)e^{-\gamma z}}=\frac{1}{zG(z)G(-z)}=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

4) $\Gamma(1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!n}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ et $\Gamma(1/2)^2=\dfrac{\pi}{\sin\pi/2}=\pi$.

5) La formule de Gauss s'écrit aussi

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{z-1}}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

car $\lim_{n\to\infty} n/(z+n) = 1$. On en déduit

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 n^{2z-3/2}}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+1/2)\cdots(z+n-1/2)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 n^{2z-3/2} 2^{2n}}{2z(2z+1)(2z+2)\cdots(2z+2n-1)}.\end{aligned}$$

Pour $\Gamma(2z)$, on utilise la formule de Gauss avec n remplacé par $2n$:

$$\Gamma(2z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(2n)^{2z-1}}{2z(2z+1)\cdots(2z+2n-1)}.$$

En faisant le quotient, on obtient :

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{2^{1-2z}\Gamma(2z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!n^{1/2}}. \tag{17.4}$$

Comme cette dernière limite est indépendante de z, on peut la calculer en posant $z = 1$ dans (17.4). On trouve, d'après 1) et 4) :

$$\frac{\Gamma(1)\Gamma(3/2)}{2^{-1}\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(1/2)/2}{1/2} = \sqrt{\pi}.$$

□

N.B. Cette limite peut aussi être calculée avec la formule de Stirling.

Proposition 17.4. *Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ et $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui satisfait :*
a) $F(z+1) = zF(z)$, $\forall z \in \Omega$,
b) f est bornée sur la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2\}$.
Alors $F(z) = F(1)\Gamma(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Preuve. La fonction Γ satisfait a) d'après l'équation fonctionnelle. Elle satisfait aussi b) :

$$\begin{aligned}|\Gamma(z)| &= |\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\operatorname{Re} z}}{|z||z+1|\cdots|z+n|}\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z(\operatorname{Re} z+1)\cdots(\operatorname{Re} z+n)} = \Gamma(\operatorname{Re} z), \quad \text{pour } \operatorname{Re} z \geqslant 1.\end{aligned}$$

L'équation fonctionnelle a) permet de prolonger F au domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ en une fonction méromorphe ; en effet, on écrit

$$F(z) = \frac{F(z+1)}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

et on constate que le membre de droite est une fonction méromorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ avec un pôle simple en 0 de résidu $F(1)$.

Par récurrence sur n, la relation $F(z) = \dfrac{F(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ permet de prolonger F au domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -n-1\}$ avec des pôles simples en $0, -1, \ldots, -n$ et on a :

$$\operatorname{Res}(F, -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\frac{F(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} = (-1)^n \frac{F(1)}{n!}.$$

Soit g la fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = F(z) - F(1)\Gamma(z)$. Alors g satisfait a) et b) ; elle est donc bornée dans la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2\}$. Le calcul des résidus ci-dessus montre que g est entière. On ne peut pas lui appliquer le théorème de Liouville mais on considère encore une fonction auxiliaire $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ définie par :

$$h(z) = g(z)g(1-z).$$

On a

$$h(z+1) = g(z+1)g(-z) = zg(z)g(-z) = -g(z)(-z)g(-z) = -g(z)g(1-z) = -h(z).$$

Donc h est bornée. Par Liouville, h est constante, égale à $h(1) = g(0)g(1) = 0$. Par suite, en divisant $h(z)$ par $g(1-z)$, on trouve que g est nulle, comme fonction méromorphe. Elle est donc nulle. □

Corollaire 17.5. Formule d'Euler. *Pour* $\operatorname{Re} z > 0$, *on a* $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Preuve. L'intégrale converge uniformément et absolument dans $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant A < \infty\}$ puisque $\int_0^\infty t^{\delta-1}\,\mathrm{d}t < \infty$ et $\int_1^\infty t^{A-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t < \infty$. Donc $F(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit une fonction F holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z\}$. De plus, la majoration

$$|F(z)| \leqslant \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = F(\operatorname{Re} z)$$

montre que F est bornée dans la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2\}$. L'équation fonctionnelle se vérifie en intégrant par parties :

$$zF(z) = \int_0^\infty zt^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty t^z(-e^{-t})\,\mathrm{d}t + t^z e^{-t}\Big]_0^\infty = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,\mathrm{d}t = F(z+1).$$

Il reste à appliquer la Proposition 17.4. □

Définition 17.6. La *fonction* ζ *de Riemann* est définie pour $\operatorname{Re} z > 1$ par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \tag{17.5}$$

La série converge uniformément dans la bande $1 < 1 + \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant A < \infty$. Donc ζ est holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 1\}$.

Proposition 17.7. *La fonction* ζ *admet un prolongement méromorphe au demi-plan* $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ *avec un unique pôle simple situé au point* 1 *de résidu* 1.

Preuve. On intègre par parties (cf. Proposition 3.13) :

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \sum_2^\infty n^{-z} = \int_{1/2}^\infty \frac{\mathrm{d}[t]}{t^z} = z\int_{1/2}^\infty \frac{[t]}{t^{z+1}}\,\mathrm{d}t = z\int_1^\infty \frac{[t]}{t^{z+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= z\int_1^\infty \frac{[t]-t}{t^{z+1}}\,\mathrm{d}t + z\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^z} = z\int_1^\infty \frac{[t]-t}{t^{z+1}}\,\mathrm{d}t + \frac{z}{z-1}, \qquad \operatorname{Re} z > 1.\end{aligned}$$

Puisque $|[t]-t| \leqslant 1$, la dernière intégrale converge pour $\operatorname{Re} z > 0$, ce qui montre que ζ est méromorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. L'affirmation sur le résidu découle aussi de cette formule. □

Proposition 17.8. Formule d'Euler. *Lorsque* $\operatorname{Re} z > 1$, *on a :*

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{1}{1-p_k^{-z}}, \tag{17.6}$$

où p_k *est le* $k-$*ième nombre premier* > 1.

Preuve. Le produit converge localement uniformément car le produit des inverses

$$\prod_{k=1}^\infty (1-p_k^{-z})$$

converge localement uniformément puisque $\sum p_k^{-z}$ converge localement uniformément. Pour $k = 1, 2, \ldots$ on a

$$\frac{1}{1-p_k^{-z}} = \sum_{\alpha_k=0}^\infty p_k^{-z\alpha_k}.$$

En faisant le produit des m premières de ces sommes, on obtient :

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1-p_k^{-z}} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=1}^\infty \frac{1}{p_1^{z\alpha_1}\cdots p_m^{z\alpha_m}} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j^z}, \tag{17.7}$$

où n_j parcourt l'ensemble des entiers dont les facteurs premiers appartiennent à l'ensemble $\{p_1, \ldots, p_m\}$. On a utilisé la décomposition unique des entiers en facteurs premiers. Quand m tend vers l'infini, le membre de droite de (17.7) tend vers $\zeta(z)$ et le membre de gauche tend vers le produit infini de (17.6). □

Corollaire 17.9. *La fonction* ζ *ne s'annule pas dans* $\{\operatorname{Re} z > 1\}$.

Proposition 17.10. *Pour* $\operatorname{Re} z > 1$, *la formule suivante a lieu :*

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. On part de la formule d'Euler (Corollaire 17.5), on multiplie par n^{-z} et on somme :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty n^z s^{z-1}e^{-ns}\,\mathrm{d}s, \quad n = 1, 2, \dots \\
\Longrightarrow n^{-z}\Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-nt}\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \dots \\
\Longrightarrow \zeta(z)\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{z-1}e^{-nt}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty t^{z-1}e^{-nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{z-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{z-1}\frac{1}{e^t-1}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

Le prolongement analytique de la fonction $\Gamma\cdot\zeta$ se fait en jouant sur les formules suivantes :

$$\frac{1}{z} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^{z-1}\,\mathrm{d}t & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ \displaystyle -\int_1^\infty t^{z-1}\,\mathrm{d}t & \text{si } \operatorname{Re} z < 0. \end{cases} \tag{17.8}$$

Théorème 17.11. Équation fonctionnelle de Riemann. *La fonction ζ de Riemann admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec un unique pôle simple en 1 de résidu 1. C'est une conséquence de la formule suivante :*

$$\zeta(z) = 2^z\pi^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\zeta(1-z), \quad z \neq 1. \tag{17.9}$$

Preuve. La Proposition 17.10 et (17.8) avec z remplacé par $z-1$ donnent

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{1}{e^t-1}t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Puisque $\dfrac{1}{e^t-1} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2} + O(t)$, quand $t \to 0$, la première intégrale ci-dessus converge pour $\operatorname{Re} z > 0$. La deuxième intégrale définit une fonction entière. Par suite, la fonction $\Gamma\cdot\zeta$ admet un prolongement méromorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ avec un unique pôle simple en 1 de résidu 1. On le savait déjà, cf. Proposition 17.7.
On peut écrire $\Gamma(z)\zeta(z)$ sous une autre forme en utilisant encore (17.8) :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\zeta(z) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)t^{z-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \quad -1 < \operatorname{Re} z < 1 \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \quad -1 < \operatorname{Re} z < 0.
\end{aligned}$$

En appliquant la méthode de Cauchy (cf. Exercice 15.5) à la fonction méromorphe $t \mapsto \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2+4\pi^2k^2}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}^*.$$

Donc

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t^z}{t^2+4\pi^2k^2}\,dt, \quad -1 < \operatorname{Re} z < 0. \tag{17.10}$$

En vue d'échanger la somme et l'intégrale, on a besoin de tester la convergence uniforme on dominée de l'intégrale. L'inégalité $t^2+4\pi^2k^2 \geqslant 4\pi^2k^2$ permet de voir que l'intégrale de (17.10) limitée à l'intervalle $]0,1]$ converge uniformément.

Les minorations $t^2+4\pi^2k^2 \geqslant \dfrac{1-\varepsilon}{2}t^2 + \dfrac{1+\varepsilon}{2}(2\pi k)^2 \geqslant t^{1-\varepsilon}(2\pi k)^{1+\varepsilon}$ pour $0<\varepsilon<1/2$, appliquer l'inégalité de Hölder pour la deuxième, donnent

$$\frac{t^{\operatorname{Re} z}}{t^2+4\pi^2k^2} \leqslant \frac{1}{t^{1+\varepsilon}k^{1+\varepsilon}}, \quad -1 < \operatorname{Re} z = -2\varepsilon < 0.$$

On en déduit la convergence uniforme de l'intégale de (17.10) limitée à l'intervalle $[1,\infty[$. D'où

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{2t^z}{t^2+4\pi^2k^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}} \sum_1^\infty (2k\pi)^{z-1},$$

la dernière égalité provient du calcul de l'intégrale par la méthode des résidus (voir Exercice 14.6 a)). On a donc démontré la formule suivante

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}} 2^{z-1}\pi^{z-1}\zeta(1-z), \quad -1 < \operatorname{Re} z < 0.$$

En posant $w = 1-z$, il vient :

$$\Gamma(1-w)\zeta(1-w) = \frac{\pi^{1-w}}{\cos\frac{\pi(1-w)}{2}} 2^{-w}\zeta(w), \quad 1 < \operatorname{Re} w < 2.$$

La formule (17.9) pour $1 < \operatorname{Re} z < 2$ en découle. Le membre de droite de (17.9) est une fonction méromorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z < 1\}$ puisque ζ est méromorphe dans $\{0 < \operatorname{Re} z\}$, donc ζ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}$. $\square$

Remarque 17.12. L'équation fonctionnelle de Riemann (17.9) montre que si $\zeta(z) = 0$ et $\operatorname{Re} z < 0$, alors

$$2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin\frac{\pi z}{2} = 0,$$

donc $\pi z = -2k\pi$ ou $z = -2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ puisque Γ ne s'annule jamais et que $\zeta(1-z)$ ne s'annule pas quand $\operatorname{Re} z < 0$. Par conséquent, dans le complémentaire de la bande $\{|\operatorname{Re} z - 1/2| < 1/2\}$, les seuls zéros de ζ sont -2, -4, ... On les appelle les *zéros triviaux* de ζ.

Proposition 17.13. $\zeta(1+iy) \neq 0$ *pour* $y \in \mathbb{R}$.

Preuve. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$2(1+\cos\theta)^2 = 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geqslant 0. \tag{17.11}$$

D'après la Proposition 17.8, la relation suivante a lieu :

$$\operatorname{Log}\zeta(z) = -\sum_{1}^{\infty} \operatorname{Log}(1-p_k^{-z}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_k^{-zn}}{n}, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

En prenant la partie réelle, on obtient :

$$\log|\zeta(x+iy)| = \operatorname{Re}\operatorname{Log}\zeta(x+iy) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_k^{-xn}}{n}\cos(ny\log p_k).$$

La minoration suivante provient de (17.11) :

$$\log|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| = \sum_{n,k} \frac{p_k^{-xn}}{n}(3+4\cos\theta_{n,k}+\cos 2\theta_{n,k}) \geqslant 0,$$

où $\theta_{n,k} = ny\log p_k$. On en déduit

$$|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| \geqslant 1, \quad \text{pour } x>1 \text{ et } y \in \mathbb{R}. \tag{17.12}$$

Supposons que $\zeta(1+iy_0)$ s'annule pour $y_0 \neq 0$. Alors $\zeta^4(1+\varepsilon+iy_0) = O(\varepsilon^4)$, quand $\varepsilon \to 0$. Puisque ζ a un pôle simple en 0, on a : $\zeta^3(1+\varepsilon) = O(\varepsilon^{-3})$. Par suite, puisque $\zeta(1+\varepsilon+2iy_0) = O(1)$, le comportement suivant a lieu :

$$\zeta^3(1+\varepsilon)\zeta^4(1+\varepsilon+iy_0)\zeta(1+\varepsilon+2iy_0) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

ce qui contredit (17.12). □

Corollaire 17.14. Théorème des nombres premiers. *Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x est asymptotiquement égal à $x/\log x$, quand $x \to \infty$.*

Preuve. Elle nécessite quelques outils supplémentaires, en particulier la transformation de Mellin. Voir le livre de G. Tenenbaum [15]. □

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 17.1. Démontrer la formule $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+(-1)^n z/n\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+z/2)\Gamma(1/2-z/2)}$.

Exercice 17.2. En choisissant bien z dans le produit infini de $\sin \pi z$, vérifier la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\times 2\times \ldots \times (2n)^2}{1\times 3\times 3\times \ldots \times (2n-1)^2(2n+1)} = \prod_{1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Comparer avec (17.4).

Exercice 17.3. Si $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, montrer les formules $\psi(z+1)-\psi(z) = \dfrac{1}{z}$ et $\psi(1-z)-\psi(z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{tg}\pi z}$.

18. Transformation de Laplace

Certaines fonctions ont une transformée de Fourier qui se prolonge au plan complexe, comme par exemple les fonctions intégrables à support compact :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi+i\eta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-ix\xi+x\eta} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi+i\eta\in\mathbb{C}.$$

Quand f a un support limité à gauche et qu'elle est bornée, l'intégrale ci-dessus a des chances de converger pour $\eta<0$. Il est d'usage de considérer une intégrale du type

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

qui définit pour f localement intégrable et bornée sur $\mathbb{R}_+$, une fonction holomorphe de z dans $\{\operatorname{Re} z>0\}$ et continue dans $\{\operatorname{Re} z\geqslant 0\}$.

Définition 18.1. Soit $f : [0,\infty[\to\mathbb{C}$ une fonction intégrable sur tout intervalle fini. L'*abscisse de convergence* $\sigma_c(f)$ *de* f est égale à l'infini si $\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge pour tout $z\in\mathbb{C}$ et à $\inf\{\operatorname{Re} z \mid \int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge$\}$ sinon. L'*abscisse de convergence absolue* $\sigma_a(f)$ *de* f est égale à l'infini si $\int_0^\infty |e^{-zt}f(t)|\,\mathrm{d}t=\infty$, $\forall z\in\mathbb{C}$ et à $\inf\{\operatorname{Re} z \mid \int_0^\infty |e^{-zt}f(t)|\,\mathrm{d}t<\infty\}$ sinon.
On a $\sigma_c(f)\leqslant\sigma_a(f)$.

Exemple 18.2. 1) Si f est définie par $f(t)=\sin(e^t)$, alors $\sigma_c(f)=-1$ et $\sigma_a(f)=0$ puisque $\displaystyle\int_0^\infty e^{-zt}\sin(e^t)\,\mathrm{d}t=\int_1^\infty \frac{\sin s}{s^{z+1}}\,\mathrm{d}s$.
2) Si $f(t)=O(e^{\alpha t})$ pour $t\to\infty$, alors $\sigma_a(f)\geqslant\alpha$.

Lemme 18.3. *Soit* $f : [0,\infty[\to\mathbb{C}$ *intégrable sur tout intervalle fini et* $z_0\in\mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re} z>\sigma_c(f)$*. Alors l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Preuve. Par définition de $\sigma_c(f)$, il existe $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $\sigma_c(f)<\operatorname{Re} z_0<\operatorname{Re} z$ et l'intégrale $\int_0^\infty e^{-z_0t}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Soit $g(x)=\int_0^x e^{-z_0t}f(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existe et que g est bornée sur n'importe quel intervalle fini, la fonction g est bornée. D'après l'exemple 4.3, on a la formule suivante pour $h\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$:

$$\int_0^x h(t)e^{-z_0t}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}g(t).$$

On en déduit en particulier,

$$\int_0^x e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x e^{-(z-z_0)t}e^{-z_0t}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x e^{-(z-z_0)t}\,\mathrm{d}g(t).$$

En intégrant par parties on obtient

$$\int_0^x e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t=e^{-(z-z_0)t}g(t)\big]_0^x+(z-z_0)\int_0^x e^{-(z-z_0)t}g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{18.1}$$

Le terme tout intégré vaut $e^{-(z-z_0)x}g(x)$ et il tend vers 0 quand x tend vers l'infini, car $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re} z_0$. L'intégrale restante tend vers $(z-z_0)\int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}g(t)\,\mathrm{d}t$ car elle est absolument convergente puisque g est bornée. □

Lemme 18.4. *Soit* $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ *intégrable sur tout intervalle fini et* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-z_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument. Alors l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument et uniformément dans la bande* $\{\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0\}$.

Preuve. L'inégalité triangulaire pour les intégrales montre la convergence uniforme :

$$\int_0^\infty |e^{-zt} f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty |e^{-z_0 t} f(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{18.2}$$

□

Définition 18.5. La *transformée de Laplace de* $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ intégrable sur tout intervalle fini est la fonction $\mathcal{L}f$ sur $\{\operatorname{Re} z > \sigma_c(f)\}$ donné par

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 18.6. Pour $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{L}f(z) = \dfrac{n!}{z^{n+1}}$.

.

Proposition 18.7. *Pour* $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ *intégrable sur tout intervalle fini, la transformée de Laplace* $\mathcal{L}f$ *de* f *est une fonction holomorphe dans le demi-plan* $\{\operatorname{Re} z > \sigma_c(f)\}$.

Preuve. La relation (18.1) permet de voir que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément dans tout secteur tronqué

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z - z_0) \geqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(z - z_0)| \leqslant C \operatorname{Re}(z - z_0)\},$$

où C et ε sont des réels positifs. L'holomorphie de $\mathcal{L}f$ résulte du lemme suivant : □

Lemme 18.8. *Soit* $g : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{C}$ *une fonction continue, holomorphe en la première variable dans un ouvert* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$*. Si l'intégrale* $\displaystyle\int_0^\infty g(z, t)\,\mathrm{d}t$ *converge localement uniformément dans* Ω*, alors elle définit une fonction holomorphe.*

Preuve. On écrit l'intégrale comme une somme d'intégrales sur des intervalles bornés :

$$\int_0^\infty g(z, t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} g(z, t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après l'Exemple 10.5 6), chacune des intégrales de droite est holomorphe dans Ω. La somme converge localement uniformément dans Ω et le résultat découle du théorème de Weierstrass 12.5. □

Proposition 18.9. *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *une fonction différentiable avec* f' *intégrable sur tout intervalle fini. Alors* $\sigma_a(f) \leqslant \max(0, \sigma_c(f'))$ *et*

$$\mathcal{L}f'(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0) \quad \textit{pour} \quad \operatorname{Re} z > \max(0, \sigma_c(f')). \tag{18.3}$$

Preuve. Pour $x > 0$, on intègre par parties :

$$\int_0^x e^{-zt} f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-zt} f(t)\big]_0^x + z\int_0^x e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{-zx} f(x) - f(0) + z\int_0^x e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour voir (18.3), il suffit de montrer la relation $\lim_{x\to\infty} e^{-zx} f(x) = 0$.

Soit $g(x) = \int_0^x e^{-zt} f'(t)\,\mathrm{d}t$. On a :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{zt}\,\mathrm{d}g(t)\,\mathrm{d}t = e^{zx}g(x) - z\int_0^x e^{+zt}g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{18.4}$$

Posons $\lim_{x\to\infty} g(x) = g(\infty)$ et utilisons la relation $z\int_0^x e^{z(t-x)}\,\mathrm{d}t + e^{-zx} = 1$ qui donne, puisque $\mathrm{Re}\, z > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} z\int_0^x e^{z(t-x)}\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} z\int_0^x e^{z(t-x)}g(\infty)\,\mathrm{d}t = g(\infty). \tag{18.5}$$

De (18.4) et (18.5), on tire

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^{-zx}f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-zx}(f(x)-f(0)) &= g(\infty) - \lim_{x\to\infty} z\int_0^x e^{+z(t-x)}g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\lim_{x\to\infty} z\int_0^x e^{+z(t-x)}(g(t)-g(\infty))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Cette dernière limite est nulle car elle est du type

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}u(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec } \alpha > 0,\ u \text{ bornée et } \lim_{x\to\infty} u(x) = 0.$$

Comme $f(t) = o(e^{\mathrm{Re}\, zt})$, quand $t \to \infty$, l'abscisse de convergence absolue de f est inférieure ou égale à $\mathrm{Re}\, z$. $\square$

Théorème 18.10. *Pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue, on a la formule d'inversion suivante :*

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, z=\beta} \frac{\mathcal{L}f(z)}{z^2}e^{tz}\,\mathrm{d}z, \quad \textit{pour} \quad \beta > \max(0, \sigma_a(f)). \tag{18.6}$$

N.B. En général, la fonction $z \mapsto \mathcal{L}f(z)e^{tz}$ est bornée sur $\{\mathrm{Re}\, z = \beta\}$. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma_a(f) < \mathrm{Re}\, z_0 < \beta$. Alors $\int_0^\infty e^{-z_0 t}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et l'inégalité (18.2) s'applique. Mais ceci ne garantit pas que l'intégrale $\displaystyle\int \mathcal{L}f(z)e^{tz}\,\mathrm{d}z$ converge.

Preuve. L'intégrale de (18.6) converge absolument car $z \mapsto \mathcal{L}f(z)e^{tz}$ est une fonction bornée sur la droite $\{\mathrm{Re}\, z = \beta\}$. Posons

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, z=\beta} \frac{\mathcal{L}f(z)}{z^2}e^{tz}\,\mathrm{d}z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On remplace $\mathcal{L}f$ par sa valeur et on échange l'ordre d'intégration ce qui est permis par convergence absolue :

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, z=\beta} \frac{e^{tz}}{z^2}\int_0^\infty f(s)e^{-sz}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty f(s)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\, z=\beta} \frac{e^{(t-s)z}}{z^2}\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}s$$

L'intégrale sur la droite verticale se calcule aisément par la méthode des résidus : si $t < s$ on ferme par un demi-cercle dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, z > \beta\}$ et on trouve 0 car $\beta > 0$; si $t < s$ on ferme par un demi-cercle dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, z < \beta\}$ et on trouve le résidu en 0, soit $t - s$. D'où

$$F(t) = \int_0^t (t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

La fonction F est deux fois différentiable et

$$F'(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s, \quad F''(t) = f(t),\ t \geqslant 0.$$

□

Corollaire 18.11. *Si f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et a une abscisse de convergence absolue finie, alors $\mathcal{L}f = 0$ entraîne $f = 0$.*

Corollaire 18.12. Formule d'inversion de Laplace. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et si $f(0) = f'(0) = 0$, alors*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} z=\beta} \mathcal{L}f(z)e^{tz}\,\mathrm{d}z, \quad \textit{pour} \quad \beta > \max(0, \sigma_a(f)). \tag{18.7}$$

Preuve. On applique le Théorème 18.10 à f'' et on utilise (18.3)

$$f''(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} z=\beta} \frac{\mathcal{L}f''(z)}{z^2}e^{tz}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} z=\beta} \mathcal{L}f(z)e^{tz}\,\mathrm{d}z.$$

□

✠✠✠✠✠✠✠

Exercice 18.1. Vérifier les correspondances suivantes :

$f(t)$	$t^\nu \log t$	$\dfrac{1-t}{t}$	$\sin \omega t$
$\mathcal{L}f(z)$	$\dfrac{\Gamma'(\nu) - \Gamma(\nu)\operatorname{Log} z}{z^\nu}$	$1 + \dfrac{1}{z}$	$\dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$.

Exercice 18.2. On définit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ par $f(t) = \pi e^t \sin \pi t$. Donner les abscisses de convergence et de convergence absolue de f. Pour $\operatorname{Re} z > 0$, vérifier la formule

$$\mathcal{L}f(z) = 1 - \frac{z(z+1)}{\pi^2}\mathcal{L}f(z+2),$$

et en déduire que $\mathcal{L}f$ est entière.

Exercice 18.3. Vérifier que la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \log t$ est $z \mapsto -\dfrac{\operatorname{Log} z + \gamma}{z}$, où γ est la constante d'Euler.

Exercice 18.4. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur tout intervalle fini.
a) Si $\alpha := \limsup_{t\to\infty} \dfrac{\log|f(t)|}{t}$ et $\varepsilon > 0$, montrer que l'intégrale $\mathcal{L}f(z)$ converge absolument et uniformément dans $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geqslant \alpha + \varepsilon\}$. En particulier, $\sigma_a(f) \leqslant \alpha$.
b) Si $\beta := \lim_{t\to\infty} \dfrac{\log|f(t)|}{t}$ existe, montrer l'inégalité $\sigma_a(f) \geqslant \beta$.

Exercice 18.5. Soit y la solution du problème

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

où a_0, a_1, a_2, y_0, y_1 sont des nombres réels donnés et f est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ avec $\sigma_c(f) \in \mathbb{R}$. Montrer que y satisfait

$$\mathcal{L}y(z) = \frac{\mathcal{L}f(z) + a_2(y_1 + zy_0) + a_1 y_1}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z > \sigma_c(f).$$

Exemple : Résoudre par cette méthode l'équation

$$y''(t) + y(t) = e^{-t} \quad \text{avec } y_0, y_1 \text{ quelconques.}$$

Annexe

Théorème A. Formule de Green-Riemann *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et K un compact de Ω dont le bord ∂K est une réunion finie de courbes de Jordan rectifiables, orientées par la normale extérieure. Si P et Q sont deux fonctions continûment différentiables sur Ω, alors*

$$\int_{\partial K} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Preuve. On commence par le cas où K est l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant f(x)\}, \quad \text{avec} \quad f \in \mathcal{CM}^1([a,b],\mathbb{R}).$$

Le théorème de Stolz et le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral permettent d'écrire

$$-\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_a^b (\int_c^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b [P(x,f(x)) - P(x,c)]\,\mathrm{d}x.$$

L'intégrale curviligne se calcule aisément puisque les contributions des bords verticaux de K sont nulles :

$$\int_{\partial K} P\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,c)\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,f(x))\,\mathrm{d}x.$$

On a donc montré

$$\int_{\partial K} P\,\mathrm{d}x = -\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{18.8}$$

Pour montrer l'autre relation, on introduit une fonction auxiliaire $U(x,y) := \int_c^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta$. Alors U est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \int_c^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Par suite les dérivées mixtes secondes de U existent et sont égales à $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
La formule de dérivation des fonctions composées donne la relation suivante :

$$\int_\gamma \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$$

si γ est une courbe fermée $\mathcal{CM}^1$ dans Ω. Dans notre cas, on obtient

$$\int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x.$$

Il reste à appliquer (18.8) avec P remplacé par $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ pour obtenir

$$\int_{\partial K} Q\,\mathrm{d}y = \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \iint_K \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Le cas d'un compact

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant g(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}, \quad \text{avec} \quad g \in \mathcal{CM}^1([a,b],\mathbb{R})$$

est démontré par symétrie.
La formule est vraie pour les compacts qu'on peut décomposer en un nombre fini de compacts $K_1, \ldots, K_n$ du type précédent car l'intégrale sur une partie du bord de K_j non contenue dans ∂K s'annule avec l'intégrale sur une partie du bord du compact adjacent.
Le cas général est obtenu par approximation cf. [12]. $\square$

Références

1. L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill, 1979, # 30/62.
2. T. Apostol, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley, 1957, # 27/51.
3. M.A. Armstrong, *Basic topology*, Springer, 1983, # 55/164.
4. J.C. Burkill and H. Burkill, *A second course in mathematical analysis*, Cambridge University Press, 1970, # 27/152.
5. H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961, # 30/101.
6. J. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer, 1973, # 30/152.
7. H. Dym and H.P. McKeen, *Fourier series and integrals*, Academic Press, 1972, # 42/62.
8. W. Fulks, *Complex variables*, M. Dekker, 1993, # 30/268.
9. T.W. Gamelin, *Complex analysis*, Springer, 2001, # 30/300.
10. R. Godement, *Analyse mathématique II et III*, Springer, 1998, # 27/274.
11. E. Hairer and G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001, # 27/256.
12. C.B. Morrey and M.H. Protter, *Intermediate calculus*, Springer, 1971, # 27/58.
13. R. Remmert, *Theory of complex functions*, Springer, 1991, # 30/213.
14. M. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1978, # 27/95.
15. G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Société mathématique de France, 1995, # 10/401.
16. G. P. Tolstov, *Fourier series*, Dover, 1962, # 42/115.
17. J.S Walker, *Fourier analysis*, Oxford University Press, 1988, # 42/110.
18. G. Wanner, *Polycopié d'Analyse II*, Université de Genève, 1998, # 27/273.

Index