

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 1999

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(-x)}{\cos x - \cos 2x}$
2. Trouver les parties réelles et imaginaires des nombres complexes z tels que $z^2 = \frac{2-2i}{-1-i}$.
3. Soit $f(x, y) := \frac{y^2}{2x-3}$. Dessiner, au point $(2, 1)$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur maximale de α pour laquelle cette population tend vers 0 ?
5. Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x, y) := (x+1)y$ sur le rectangle $R := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2\}$.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de c la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 5 \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ?

Barème : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*)

Que va répondre MAPLE à l'instruction suivante :

`diff(2*a*x*y,a);`

Examen de Mathématiques générales A – Session de juillet 1999

1. Une population de cellules s'est multipliée par 3.5 en 2 heures. Combien de temps lui faudra-t-il pour se multiplier par 7.
2. Trouver les parties réelles et imaginaires des nombres complexes z tels que $z^3 = -1$.
3. Soit $f(x, y) := \frac{e^{x^2}}{2y}$. Dessiner, au point $(0, -\frac{1}{2})$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles cette population tend vers 0 ?
5. Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x, y) := x \cos(xy)$ sur le rectangle $R := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & e^x \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ?

Barème : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

`diff(a^2*b,a) - diff(b+a*b^2,b);`

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 1999

1. Une population de cellules s'est multipliée par 1.5 en 2 heures. Quel temps lui faut-il pour se multiplier par 3 ?
2. Quel est l'angle entre les vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(-1, 3, 3)$?
3. On considère un système dynamique dont l'ensemble des états est $[0, 1]$ et qui évolue selon la loi $f(u) := \frac{5}{2}u(1 - u)$. Que se passera-t-il si l'on part d'un état initial $u(0) = 1/2$.
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles cette population ne tend pas vers 0 ?
5. Quels sont les points du plan qui sont des minima locaux pour la fonction $f(x, y) = \cos x + \sin y$?
6. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & \sin x \\ \sin x & 1 \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ?

Barème : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

for n from 1 to 9 by 2 do (n+1)/2 od;

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2000

1. Dessiner, dans le plan, le nombre complexe $\frac{(2-2i)^2}{1+i}$.
2. Trouver la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = t^3(2x-1)$ telle que $x(0) = 1$.
3. Soit $f(x, y) := y \ln(2x - y)$. Dessiner, au point $(1, 1)$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles cette population ne tend pas vers 0 ?
5. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x, y) := xy$ sur la surface Σ , où Σ est portion de disque dessinée ci-contre.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $M := \begin{pmatrix} u & 2 \\ 2 & u \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ? (*Indication : on peut répondre à cette dernière question sans faire de calcul.*)

Barème : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) 8. Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 0 to 4 by 2 do (n-1)*n od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 2000

1. Soit $z := 1 - \frac{1+i}{1-i}$. Dessiner, dans le plan, z et son conjugué.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x}}{\sin 3x}$.
3. Calculer $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$ (donner une formule exacte).
4. Une population, divisée en 4 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$. Le coefficient u n'est pas connu. Que peut-on dire de l'évolution de cette population ?
5. Calculer $\int_{\Sigma} f$, où $f(x, y) := e^{-xy}$ et Σ est la région du plan ci-contre.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $\begin{pmatrix} u & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ a-t-elle $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre ?

Barème : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 3 to 12 by 3 do (n-2)^2*b od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2001

1. Dessiner, dans le plan, le nombre complexe $z = \frac{1+i}{1+2i}$ ainsi que son conjugué.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de u les vecteurs $(u, 2, -5)$ et $(u, 1, 1)$ sont-ils perpendiculaires ?
3. Soit $f(x, y) := \frac{y^2}{x^2 + y}$. Dessiner, au point $(2, 1)$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Trouver la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = \frac{1 - \cos 2t}{x}$ telle que $x(0) = 3$.
5. On considère le système dynamique dont l'ensemble des états est $\mathbf{R} - \{0\}$ et qui évolue selon la loi $f(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Quels sont les états stationnaires et quels sont ceux qui sont stables ?
6. Trouver tous les minima locaux dans \mathbf{R}^3 de la fonction $f(x, y, z) = \cos 2x + \sin y - \cos z$.

Barème : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
polarplot(2*u, u=Pi/2..3*Pi/2);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de juin 2001

1. Dessiner, dans le plan, les nombres complexes solutions de l'équation $z^2 = i$.
2. Quels sont le(s) vecteur(s) de norme 1 qui sont perpendiculaires au plan passant par les 3 points $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ et $(-1, 0, 1)$?
3. Calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0$ telle que $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 2$.
5. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de natalité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur minimale de α pour laquelle cette population ne tend pas vers l'extinction ?
6. Pour quelles valeurs de a la fonction $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + axy$ a-t-elle un extremum en 0? Est-ce alors un maximum ou un minimum ?

Barème : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 1 to 7 by 3 do (n+1)*(-1)^n; od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 2001

1. Dessiner, dans le plan, le conjugué du nombre complexe $\frac{-1+i}{1+i}$.
2. Quels sont le(s) vecteur(s) dans le plan de norme 1 qui sont perpendiculaires au vecteur $(1, 2)$?
3. Dessiner, au point $(\pi/4, \pi/2)$ le gradient et la tangente à la courbe de niveau de la fonction $\sin x e^{\cos y}$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$ telle que $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = -2$.
5. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de natalité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur minimale de α pour laquelle cette population ne tend pas vers l'extinction ?
6. Dessiner la région du plan $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 2 \leq x \leq \infty\}$ et calculer $\int_{\Sigma} \frac{y}{x^2}$.

Barême : 1 bonne par question.

7. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 2 to 6 by 2 do (-2)^n; od;
```


Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2002

1. On considère le système dynamique dont l'ensemble des états est $\mathbf{R} - \{0\}$ et qui évolue selon la loi $f(x) := x^2 + x - \frac{1}{5}$. Quels sont les états stationnaires et quels sont ceux qui sont stables ?
2. Trouver la solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$ telle que $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 2$.
3. Dessiner, au point $(2, 1)$ le gradient et la tangente à la courbe de niveau de la fonction $g(x, y) := \frac{x + y}{1 - x^2}$.
4. Quel est l'angle en degré entre les vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Dessiner la région du plan $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3 \text{ et } 1 \leq y \leq 2x\}$ et calculer la valeur moyenne sur Σ de la fonction $h(x, y) = xy^2$.

Barème : 1.2 bonne par question.

6. (*Question supplémentaire : 1/2 bonne*) Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): polarplot(2, u=Pi/2..3*Pi/4);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de juin 2002

1. Dessiner dans le plan les solutions de l'équation $z^3 = -2i$.
2. Trouver la solution de l'équation différentielle $\dot{x} - x \cos 2t = 0$ telle que $x(0) = 2$.
3. Calculer $\int_0^2 t^2 e^t dt$ (réponse par une formule exacte).
4. Trouver tous les minima de la fonction $f(x, y) = \cos 2x + \sin 3y$.
5. a) Les vecteurs $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (0, 2, 1)$ et $a_3 = (1, 2, 0)$ forment-ils une base de \mathbf{R}^3 ?
b) si “oui”, trouver les coordonnées de $z = (1, 1, 1)$ dans cette base.

Barême : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

`with(plots): polarplot(1.5, u=3*Pi/2..7*Pi/4);`

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 2002

1. Dessiner dans le plan le nombre complexe $\frac{3-2i}{2+3i}$ ainsi que son carré.
2. On considère le système dynamique $(\mathbf{R} - \{0\}, f)$ avec $f(x) := \frac{x}{2} + \frac{a}{x}$. Quels sont les états stationnaires et quels sont ceux qui sont stables ?
3. Soit $f(x, y) = \operatorname{tg}(xy^2)$. Dessiner, au point $(\sqrt{\pi}, 1/4)$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Trouver tous les maxima de la fonction $f(x, y) = \cos 3x + \sin 4y$.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2u \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ admet-elle $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre ? Quelles sont alors ses valeurs propres ?

Barème : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
for m from 4 to 6 do 2^m*x; od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2003

1. Dessiner dans le plan le nombre complexe $z := 2i + \frac{1}{2-2i}$ ainsi que son conjugué.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $\begin{pmatrix} u & -2u & u \\ 0 & u & 1 \\ 1 & -1 & u \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
3. Soit $f(x, y) = -\sin(\pi/4 + 2xy^2)$. Dessiner, au point $(\pi/4, 1)$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Dessiner la région du plan $\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ et } x-1 \leq y \leq 2x\}$ et calculer la valeur moyenne de la fonction $g(x, y) = \frac{y}{x}$ sur Ω .
5. Pour quelle(s) valeur(s) de c la matrice $\begin{pmatrix} 2 & c \\ c & 3 \end{pmatrix}$ a-t-elle deux valeurs propres réelles positives ?

Barème : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): polarplot(2*u, u=Pi/2..2*Pi);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de juillet 2003

1. Dessiner dans le plan le nombre complexe les solutions de l'équation $z^3 = -i$.
2. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles cette population ne tend pas vers 0 ?
3. Soit $f(x, y) = -\sin(\frac{x}{y})$. Représenter graphiquement, au point $(\pi, 3)$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Dessiner la région du plan $\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ et } -x \leq y \leq 2\}$ et calculer la valeur moyenne de la fonction $g(x, y) = xy$ sur Ω .
5. Trouver tous les minima locaux de la fonction $f(x, y) = \sin x + \cos 2y$.

Barème : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): polarplot(Pi*u, u=Pi/3..2*Pi/3);
```

ATTENTION : ces examens ne recouvrent pas l'ensemble des sujets possibles. D'autres questions pourront apparaître. Voir à cet effet la rubrique "examen" sur la page WEB <http://www.unige.ch/math/mgene>.

Nom :

Prénom :

Section :

Répondre sur ces feuilles

(vous pouvez utiliser le verso);

justifiez clairement vos réponses.

1. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$?

2. Donner les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Donner **Un** vecteur propre de cette matrice.

3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1-a \\ 1-a & 1+a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M est-elle inversible ?

4. Trouver les extrema locaux de la fonction $f(x, y, z) = d - (x - a)^2 - (2y - b)^2 - (z - c)^2$ (a, b, c et d sont des constantes).

5. Soit

$$f(x, y) = (1 - x) \exp(2x - 3y).$$

Dessiner, au point $(-1, \frac{1}{10})$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): plot([[0,1.2],[2,3.5]],style=point);
```

Nom :	Répondre sur ces feuilles
Prénom :	<i>(vous pouvez utiliser le verso);</i>
Section :	<i>justifiez clairement vos réponses.</i>

1. (Croissance exponentielle) Une population de cellules s'est multipliée par trois en une heure. Combien de temps met cette population pour se multiplier par 4?

2. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$?

3. Donner les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner **Un** vecteur propre de cette matrice (expliciter les calculs).

-
4. Pour quelles valeurs du paramètre a le système suivant possède-t-il une solution unique?

$$x + y - z = 0, \quad 2x + 3y + az = 0, \quad x + ay + 3z = 0,$$

Donner cette solution.

5. Trouver les extrema locaux de la fonction $f(x, y) = xy - x^4 - 2y^2 + 3$ (classifier ces points, i.e. montrer que ce sont des minima ou des maxima).

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ? $f := (x, y) \rightarrow xy - x^4 - 2y^3 + 3$:
`with(plots): plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2);`