

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 1999

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(-x)}{\cos x - \cos 2x}$
2. Trouver les parties réelles et imaginaires des nombres complexes z tels que $z^2 = \frac{2 - 2i}{-1 - i}$.
3. Soit $f(x, y) := \frac{y^2}{2x - 3}$. Dessiner, au point $(2, 1)$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur maximale de α pour laquelle cette population tend vers 0 ?
5. Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x, y) := (x + 1)y$ sur le rectangle $R := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2\}$.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de c la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 5 \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ?

Barême : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne)

Que va répondre MAPLE à l'instruction suivante :

```
diff(2*a*x*y,a);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de juillet 1999

1. Une population de cellules s'est multipliée par 3.5 en 2 heures. Combien de temps lui faudra-t-il pour se multiplier par 7.
2. Trouver les parties réelles et imaginaires des nombres complexes z tels que $z^3 = -1$.
3. Soit $f(x, y) := \frac{e^{x^2}}{2y}$. Dessiner, au point $(0, -\frac{1}{2})$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles cette population tend vers 0 ?
5. Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x, y) := x \cos(xy)$ sur le rectangle $R := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & e^x \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ?

Barème : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
diff(a^2*b,a) - diff(b+a*b^2,b);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 1999

1. Une population de cellules s'est multipliée par 1.5 en 2 heures. Quel temps lui faut-il pour se multiplier par 3 ?
2. Quel est l'angle entre les vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(-1, 3, 3)$?
3. On considère un système dynamique dont l'ensemble des états est $[0, 1]$ et qui évolue selon la loi $f(u) := \frac{5}{2}u(1 - u)$. Que se passera-t-il si l'on part d'un état initial $u(0) = 1/2$.
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles cette population ne tend pas vers 0 ?
5. Quels sont les points du plan qui sont des minima locaux pour la fonction $f(x, y) = \cos x + \sin y$?
6. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & \sin x \\ \sin x & 1 \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ?

Barême : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 1 to 9 by 2 do (n+1)/2 od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2000

1. Dessiner, dans le plan, le nombre complexe $\frac{(2 - 2i)^2}{1 + i}$.
2. Trouver la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = t^3(2x - 1)$ telle que $x(0) = 1$.
3. Soit $f(x, y) := y \ln(2x - y)$. Dessiner, au point $(1, 1)$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles cette population ne tend pas vers 0 ?
5. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x, y) := xy$ sur la surface Σ , où Σ est portion de disque dessinée ci-contre.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $M := \begin{pmatrix} u & 2 \\ 2 & u \end{pmatrix}$ a-t-elle une valeur propre nulle ? Quel sera l'angle entre les vecteurs propres de M ? (*Indication : on peut répondre à cette dernière question sans faire de calcul.*)

Barème : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) 8. Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 0 to 4 by 2 do (n-1)*n od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 2000

1. Soit $z := 1 - \frac{1+i}{1-i}$. Dessiner, dans le plan, z et son conjugué.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x}}{\sin 3x}$.
3. Calculer $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$ (donner une formule exacte).
4. Une population, divisée en 4 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$. Le coefficient u n'est pas connu. Que peut-on dire de l'évolution de cette population ?
5. Calculer $\int_{\Sigma} f$, où $f(x, y) := e^{-xy}$ et Σ est la région du plan ci-contre.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $\begin{pmatrix} u & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ a-t-elle $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre ?

Barême : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 3 to 12 by 3 do (n-2)^2*b od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2001

1. Dessiner, dans le plan, le nombre complexe $z = \frac{1+i}{1+2i}$ ainsi que son conjugué.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de u les vecteurs $(u, 2, -5)$ et $(u, 1, 1)$ sont-ils perpendiculaires ?
3. Soit $f(x, y) := \frac{y^2}{x^2 + y}$. Dessiner, au point $(2, 1)$, le gradient de f et la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Trouver la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = \frac{1 - \cos 2t}{x}$ telle que $x(0) = 3$.
5. On considère le système dynamique dont l'ensemble des états est $\mathbf{R} - \{0\}$ et qui évolue selon la loi $f(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Quels sont les états stationnaires et quels sont ceux qui sont stables ?
6. Trouver tous les minima locaux dans \mathbf{R}^3 de la fonction $f(x, y, z) = \cos 2x + \sin y - \cos z$.

Barême : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
polarplot(2*u,u=Pi/2..3*Pi/2);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de juin 2001

1. Dessiner, dans le plan, les nombres complexes solutions de l'équation $z^2 = i$.
2. Quels sont le(s) vecteur(s) de norme 1 qui sont perpendiculaires au plan passant par les 3 points $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ et $(-1, 0, 1)$?
3. Calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0$ telle que $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 2$.
5. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de natalité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur minimale de α pour laquelle cette population ne tend pas vers l'extinction ?
6. Pour quelles valeurs de a la fonction $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + axy$ a-t-elle un extremum en 0 ? Est-ce alors un maximum ou un minimum ?

Barême : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 1 to 7 by 3 do (n+1)*(-1)^n; od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 2001

1. Dessiner, dans le plan, le conjugué du nombre complexe $\frac{-1+i}{1+i}$.
2. Quels sont le(s) vecteur(s) dans le plan de norme 1 qui sont perpendiculaires au vecteur $(1, 2)$?
3. Dessiner, au point $(\pi/4, \pi/2)$ le gradient et la tangente à la courbe de niveau de la fonction $\sin x e^{\cos y}$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0$ telle que $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = -2$.
5. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de natalité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur minimale de α pour laquelle cette population ne tend pas vers l'extinction ?
6. Dessiner la région du plan $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 2 \leq x \leq \infty\}$ et calculer $\int_{\Sigma} \frac{y}{x^2} \, dA$.

Barême : 1 bonne par question.

7. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) Que va répondre MAPLE pour le programme suivant ?

```
for n from 2 to 6 by 2 do (-2)^n; od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2002

1. On considère le système dynamique dont l'ensemble des états est $\mathbf{R} - \{0\}$ et qui évolue selon la loi $f(x) := x^2 + x - \frac{1}{5}$. Quels sont les états stationnaires et quels sont ceux qui sont stables ?
2. Trouver la solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$ telle que $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 2$.
3. Dessiner, au point $(2, 1)$ le gradient et la tangente à la courbe de niveau de la fonction $g(x, y) := \frac{x + y}{1 - x^2}$.
4. Quel est l'angle en degré entre les vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Dessiner la région du plan $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3 \text{ et } 1 \leq y \leq 2x\}$ et calculer la valeur moyenne sur Σ de la fonction $h(x, y) = xy^2$.

Barême : 1.2 bonne par question.

6. (Question supplémentaire : 1/2 bonne) Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): polarplot(2, u=Pi/2..3*Pi/4);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de juin 2002

1. Dessiner dans le plan les solutions de l'équation $z^3 = -2i$.
2. Trouver la solution de l'équation différentielle $\dot{x} - x \cos 2t = 0$ telle que $x(0) = 2$.
3. Calculer $\int_0^2 t^2 e^t dt$ (réponse par une formule exacte).
4. Trouver tous les minima de la fonction $f(x, y) = \cos 2x + \sin 3y$.
5. a) Les vecteurs $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (0, 2, 1)$ et $a_3 = (1, 2, 0)$ forment-ils une base de \mathbf{R}^3 ?
b) si “oui”, trouver les coordonnées de $z = (1, 1, 1)$ dans cette base.

Barême : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): polarplot(1.5, u=3*Pi/2..7*Pi/4);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session d'octobre 2002

1. Dessiner dans le plan le nombre complexe $\frac{3-2i}{2+3i}$ ainsi que son carré.
2. On considère le système dynamique $(\mathbf{R} - \{0\}, f)$ avec $f(x) := \frac{x}{2} + \frac{a}{x}$. Quels sont les états stationnaires et quels sont ceux qui sont stables ?
3. Soit $f(x, y) = \operatorname{tg}(xy^2)$. Dessiner, au point $(\sqrt{\pi}, 1/4)$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Trouver tous les maxima de la fonction $f(x, y) = \cos 3x + \sin 4y$.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2u \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ admet-elle $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre ? Quelle sont alors ses valeurs propres ?

Barême : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
for m from 4 to 6 do 2^m*x; od;
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de février 2003

1. Dessiner dans le plan le nombre complexe $z := 2i + \frac{1}{2-2i}$ ainsi que son conjugué.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de u la matrice $\begin{pmatrix} u & -2u & u \\ 0 & u & 1 \\ 1 & -1 & u \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
3. Soit $f(x, y) = -\sin(\pi/4 + 2xy^2)$. Dessiner, au point $(\pi/4, 1)$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Dessiner la région du plan $\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ et } x-1 \leq y \leq 2x\}$ et calculer la valeur moyenne de la fonction $g(x, y) = \frac{y}{x}$ sur Ω .
5. Pour quelle(s) valeur(s) de c la matrice $\begin{pmatrix} 2 & c \\ c & 3 \end{pmatrix}$ a-t-elle deux valeurs propres réelles positives ?

Barème : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): polarplot(2*u, u=Pi/2..2*Pi);
```

Examen de Mathématiques générales A – Session de juillet 2003

1. Dessiner dans le plan le nombre complexe les solutions de l'équation $z^3 = -i$.
2. Une population, divisée en 3 classes d'âge, a des coefficients de survie et de fécondité correspondants à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles cette population ne tend pas vers 0 ?
3. Soit $f(x, y) = -\sin(\frac{x}{y})$. Représenter graphiquement, au point $(\pi, 3)$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .
4. Dessiner la région du plan $\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ et } -x \leq y \leq 2\}$ et calculer la valeur moyenne de la fonction $g(x, y) = xy$ sur Ω .
5. Trouver tous les minima locaux de la fonction $f(x, y) = \sin x + \cos 2y$.

Barême : 1.2 bonne par question.

(Question supplémentaire : 1/2 bonne)

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): polarplot(Pi*u, u=Pi/3..2*Pi/3);
```

ATTENTION : ces examens ne recouvrent pas l'ensemble des sujets possibles. D'autres questions pourront apparaître. Voir à cet effet la rubrique "examen" sur la page WEB <http://www.unige.ch/math/mgene>.

FACULTÉ des SCIENCES
Examen de Mathématiques générales A

Février 2005

Nom :
Prénom :
Section :

Répondre sur ces feuilles
(vous pouvez utiliser le verso);
justifiez clairement vos réponses.

1. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$?

2. Donner les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Donner **Un** vecteur propre de cette matrice.

3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1-a \\ 1-a & 1+a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M est-elle inversible ?

4. Trouver les extrema locaux de la fonction $f(x, y, z) = d - (x - a)^2 - (2y - b)^2 - (z - c)^2$ (a, b, c et d sont des constantes).

5. Soit

$$f(x, y) = (1 - x) \exp(2x - 3y).$$

Dessiner, au point $(-1, \frac{1}{10})$, le gradient de f ainsi que la tangente à la courbe de niveau de f .

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ?

```
with(plots): plot([[0,1.2],[2,3.5]],style=point);
```

FACULTÉ des SCIENCES
Examen de Mathématiques générales A

Octobre 2005

Nom :
Prénom :
Section :

Répondre sur ces feuilles
(vous pouvez utiliser le verso);
justifiez clairement vos réponses.

1. (Croissance exponentielle) Une population de cellules s'est multipliée par trois en une heure. Combien de temps met cette population pour se multiplier par 4?

2. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$?

3. Donner les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner **Un** vecteur propre de cette matrice (expliciter les calculs).

-
4. Pour quelles valeurs du paramètre a le système suivant possède-t-il une solution unique?

$$x + y - z = 0, \quad 2x + 3y + az = 0, \quad x + ay + 3z = 0,$$

Donner cette solution.

5. Trouver les extrema locaux de la fonction $f(x, y) = xy - x^4 - 2y^2 + 3$ (classifier ces points, i.e. montrer que ce sont des minima ou des maxima).

6. Que devrait faire MAPLE pour le programme suivant ? $f := (x, y) \rightarrow xy - x^4 - 2y^3 + 3$:
with(plots): plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2);