Généralités : 1) On trouve sur la page WEB **http://www.unige.ch/math/mgene** des indications supplémentaires, des corrections, etc. Lisez les “conseils généraux” sur MAPLE.

2) Pour être executée et affichée, une commande MAPLE doit se terminer par ";". Pour l'executer sans affichage, terminer par ":".

---

1. Calculs : a) Calculer $(a+b)^3$, $(a+b+c)^3$. Pour obtenir les développements, utiliser la commande **expand**. *Pour voir comment elle se manipule, tapez* **??expand** *et cliquez dans "exemples"; pour faire des essais, on peut copier-coller l'un ou l'autre des exemples.*

b) Calculer $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$. En général, combien y a-t-il de termes dans le développement de $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^m$? Réfléchissez et essayez.

c) Calculer 200!. Quel est l'ordre de grandeur de ce nombre (commande **evalf(200!)**)? Pourquoi un nombre comme 200! se termine-t-il par tant de zeros ?

2. Dérivées (premières, secondes, etc, intégrales). Essayez **??diff** et **??int**. Vérifier les dérivées vues aux exercices

$$x^4\cos(2x),\ (e^x+e^{-x})/2,\ a^x,\ \tan(x).$$

Graphisme : Les graphes des fonctions de $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ s'obtiennent directement par **plot**. Pour les autres, tapez d'abord **with(plots):** (une fois pour toutes), qui charge les programmes supplémentaires de graphisme. La commande **with(plots);** affiche toutes les possibilités de MAPLE en graphisme.

3. Dessiner, pour $x\in[0,5\pi]$, le graphe de $sinx$, de $sin(x+1)$, de $sin2x$. Comment ces graphes diffèrent-ils ? Tracer, les deux premières courbes sur le même graphe (voir **??plot**).

4. Croissance logistique. Le biologiste T. Carlson a étudié une population de levures (saccharomyces). Les mesures décrivent l'évolution de la taille de cette population. Le temps t est mesuré en heures. $N(t)$ donne un nombre proportionnel à la taille de cette population à l'instant t. Dans la liste ci-dessous, la notation $[3,47.2]$ signifie $N_3=47.2$, $t_i=3$, où l'on pose $N_i=N(t_i)$, $t_i=0,1,\cdots,18$:

[0,9.6], [1,18.3], [2,29], [3,47.2], [4,71.1],[5,119.1], [6,174.6], [7,257.3], [8,350.7], [9,441]

[10,513.3], [11,559.7],[12,594.8], [13,629.4], [14,640.8], [15,659.6], [16,655.9], [17,659.6], [18,661.8]

On aimerait représenter la croissance de cette population à l'aide d'une fontion logistique de la forme $N(t)=K/(1+c\exp(-Lt)$. Pour faire ceci, on doit estimer les paramètres K, c et L, en utilisant les mesures ci-dessus. On remarque que la nouvelle fonction $Y(t)=\ln((K-N(t))/N(t))=\ln(c)-Lt$ est affine en t. On suppose ici que le paramètre K est estimé par $K=665$.

a) Représenter les mesures $[t_i,N_i]$, $i=0\cdots18$ en utilisant la commande
plot([[0,9.6],[1,18.3]],style=point)

b) Pour transformer les mesures, utiliser la fonction **Y:= x-> evalf(ln((665-x)/x));** représenter graphiquement les mesures transformées $\{[t_i, Y(N_i)];\ i = 0 \cdots 18\}$.

c) Le graphe obtenu est proche d'une droite affine d'équation $Y = \ln(c) - Lt$. On désire estimer les paramètres c et L par la méthode des moindres carrés. Pour ceci, on utilise

```
with(stats):fit[leastsquare[[t,Y]]]([[0,1,2],[Y(9.6),Y(18.3),Y(29)]]);
```

d) Superposer les mesures expérimentales et la fonction estimée en procédant comme suit:

```
a:=plot([[0,9.6],[1,18.3],[2,29]],style=point,color=red,symbol=circle):
N:= t-> 665/(1+exp(4.16-0.531*t)): b:=plot(N(t), t=0..18, color=blue): display([a,b]);
```

5. *Courbes en coordonnées polaires; commande* **polarplot** *(avec* **with(plots)**). Tracer les courbes suivantes en coordonnées polaires:

a) $r(t) = \cos(mt),\ t \in [0, 2\pi],\ m \in \mathbf{N}$. Faire varier l'entier m. Quelle courbe trouve-t-on lorsque $m = 1$.

b) $r(t) = \cos^2(\frac{t}{2}),\ t \in [0, 2\pi]$ et $r(t) = \cos^2(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}),\ t \in [0, 2\pi]$ (cardioïdes). Que se passe-t-il lorsque l'on remplace, comme ici, t par $t + a$ dans la paramétrisation d'une courbe en coordonnées polaires ?

c) $r(t) = t,\ t \in [0, 8\pi]$ (spirale d'Archimède). Comment faire la même spirale tournant dans l'autre sens (s'éloignant de l'origine en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre).

6. *Courbes paramétrées dans l'espace; commande* **spacecurve** *avec* **with(plots)**.

a) Tracer la courbe dans l'espace paramétrée par $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ (hélice).

b) Trouver 3 changements qui donnent une hélice qui tourne dans l'autre sens.

c) Que se passe-t-il si l'on change la paramétrisation en $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t), t)$ ou en $t \mapsto (\cos t, \sin t, 2t)$?

7. *Graphes 3d.* Tracer le graphes des fonctions $f, g, h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ suivantes

$$f(x,y) := x^2 + 2\,y^2 \quad , \quad g(x,y) := x^2 - 2\,y^2 \quad , \quad h(x,y) = \sin x \cos y$$

Commande : **plot3d**. *On peut faire tourner le graphe (cliquer dessus et glisser la souris en laissant le bouton pressé; appuyer ensuite sur "entrée". Le style "patch" donne de bons résultats graphiques).*

Utiliser le paquetage LinearAlgebra à l'aide de **with(LinearAlgebra);**. Pour entrer une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on peut procéder par colonnes en entrant $<< a, b > \mid < c, d >>$; ou par lignes en entrant $<< a|c >, < b|d >>$;.

1. Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer $\det A$, A^{-1} et A^m pour quelques valeurs de m. Peut-on trouver une formule générale pour A^m ?

2. Les vecteurs $a_1 := (1, 1, 1)$, $a_2 := (1, 0, 1)$ et $a_3 := (0, 1, 2)$ forment-ils une base de $\mathbf{R}^3$? Si oui, quelles sont les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans cette base ? (formule (2.24) du polycopié, p. 31).

3. *Matrices particulières* a) matrice diagonales : essayer **DiagonalMatrix(**$< 1, 2, 3, 4, 5 >$**);**, **DiagonalMatrix([1$5]);**, **DiagonalMatrix([a$4]);**.

b) *matrices données par une fonction :* essayer **f:= (i,j)−>(-1)^(i+j); Matrix(6,6,f);**. On a rencontré ce genre de matrice au cours. Où ?

4. *Evolution du nombre de cas de sida*

Les mesures suivantes donnent le nombre cumulé de cas de sida aux USA entre 1980 et 1987:

$$(1, 158),\ (2, 767),\ (3, 2787),\ (4, 7198),\ (5, 15454),\ (6, 28629),\ (7, 50280),$$

où pour chaque paire $(i, N(i))$, $i = 1 \cdots 7$, i représente l'année et $N(i)$ le nombre de cas répertoriés après i années.

a) Transformer les données afin de faire une représentation graphique des mesures dans une échelle doublement logarithmique, **plot([[ln(1),ln(158)], [ln(2),ln(767)]],style=point)** . Les mesures transformées semblent être alignées sur une droite. Estimer sa pente.

b) Ceci suggère que le nombre de cas de sida Y se laisse approximer comme

$$Y = Y(t) = at^3,$$

ou plus généralement comme

$$Y = Y(t) = c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0,$$

pour certaines constantes c_j, $j = 0 \cdots 3$. On désire estimer ces constantes. On peut établir 7 équations en les c_j en procédant comme suit:

$$158 = c_3 1^3 + c_2 1^2 + c_1 1^1 + c_0,$$

$$767 = c_3 2^3 + c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0,\ etc.$$

Sous forme matricielle, ce système de 7 équations devient $N = AC$ où

$$A := \begin{pmatrix} 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2^1 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3^1 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4^1 & 1 \\ 5^3 & 5^2 & 5^1 & 1 \\ 6^3 & 6^2 & 6^1 & 1 \\ 7^3 & 7^2 & 7^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 158 \\ 767 \\ 2787 \\ 7198 \\ 15454 \\ 28629 \\ 50280 \end{pmatrix}.$$

Ce système ne possède une solution unique que si les mesures $(i, N(i))$ sont telles que la relation cubique est exactement vérifiée, ce qui n'est pas le cas. La méthode des moindres carrés estime le vecteur colonne C en cherchant le minimum dans $\mathbf{R^4}$ de la norme euclidienne

$$||N - AC||^2,$$

comme fonction de C. L'unique solution $\hat{C}$ est alors donnée par

$$\hat{C} = (A^T A)^{-1} A^T N.$$

b) Definir la matrice A et le vecteur colonne N. Calculer $\hat{C}$ à l'aide de Maple. Indication: **B:=Transpose(A); U:=B.A; W:=MatrixInverse(U); C:=W.B.N;.**

c) Superposer ensuite les mesures et la courbe obtenue en utilisant

a:=plot([[1,158],[2,767]],style=point,color=red,symbol=circle):

b:=plot($c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t^1 + c_0$**, t=1..7, color=blue): display([a,b]):**

Mathématiques Générales 2005-2006
Travaux Pratiques MAPLE, Série 3
A rendre pour fin janvier

Utiliser le paquetage LinearAlgebra à l'aide de with(LinearAlgebra) ;.

1. Résoudre l'exercice 2 de la série 5 portant sur l'évolution temporelle d'une forêt **à l'aide du logiciel Maple**. Soient A_t et B_t le nombre d'arbres de type A et B après t années. On a vu que l'évolution temporelle de l'état de la forêt est donnée par

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix},$$

où p et q sont deux nombres tels que $0 < p, q < 1$. Posons

$$M = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Commande Maple : **M := Matrix([[p,1-q], [1-p,q]]) ;**

a) Diagonaliser la matrice M, i.e. trouver une matrice P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$, où D de la forme

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{avec } |\lambda| < 1.$$

Commande Maple : **Eigenvectors(M) ;** (pour plus d'indications sur cette commande, utiliser la commande **? Eigenvectors ;**).

b) Montrer que l'état (A_t, B_t) du système dynamique après t itérations est donné par

$$\begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix} = PD^tP^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire que la limite (A_∞, B_∞) est donnée par

$$\begin{pmatrix} A_\infty \\ B_\infty \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix},$$

puis calculer cette limite en utilisant Maple.

d) Montrer que cette limite ne dépend que de la taille initiale de la population N_0.

e) Montrer que le rapport A_∞/B_∞ vaut $(1-q)/(1-p)$, quelle que soit la taille initiale de la population N_0.

2. Utiliser la règle de l'Hospital pour calculer la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(-x)}{\cos(x) - \cos(2x)}.$$

Commandes Maple pour définir une fonction f(x) et pour calculer sa dérivée : f(x) :=x*sin(x) ; diff(f(x),x) ;

3. Soit
$$f(x, y) = (1 - x)\exp(2x - 3y).$$
C'est une fonction de deux variables, qui à chaque point (x, y) du plan où $f(x, y)$ est définie associe le nombre $f(x, y)$. La représentation graphique d'une telle fonction peut-être obtenue en utilisant Maple à l'aide du paquetage with(plots).
Commandes Maple : **with(plots) :f(x,y) :=(1-x)*exp(2*x-3*y) ;plot3d(f(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=boxed) ;**

4.

a) Utiliser Maple afin de donner les représentations graphiques des fonctions :

$$f_1(x, y) = \sin(xy),\ \ f_2(x, y) = \sin(x)\cos(y),\ \ f_3(x, y) = \sin(x/y), g(x, y) = x\exp(-x^2-y^2).$$

b) Essayer la commande **plot3d(g(x,y), x=-2..2, y=-2..2, color=x) ;**

5. Donner la représentation graphique des lignes de niveau de la fonction
$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$
en utilisant la commande Maple **plot3d(f(x,y),x=-10..10,y=-10..10,thickness=3) ;** puis **plot3d(f(x,y),x=-10..10,y=-10..10,thickness=3,style=contour) ;**

6. On considère la fonction
$$f(x, y) = (1 - x)\exp(2x - 3y).$$
Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de cette foncion.