§23. Remarques finales.

1./ Faute de temps, je me borne à indiquer le principe du calcul de $L(1,\chi)=\sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n}$ et la formule finale pour le nombre de classes.

Comme $\chi(n)$ est une fonction arithmétique de période $|D|$, c'est une combinaison linéaire des $|D|$ fonctions linéairement indépendantes $e^{\frac{2i\pi}{|D|}kn}$ $(k=0,1,\dots,|D|-1)$:

$$\chi(n)=\sum_{k=0}^{|D|-1} c_k\, e^{\frac{2i\pi}{|D|}kn}$$

On vérifie que $c_0=0$, car $0=\sum_{n=1}^{|D|}\chi(n)=|D|c_0$. Par suite,

$$L(1,\chi)=\sum_{k=1}^{|D|-1} c_k \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2i\pi k}{|D|}n}}{n}=\sum_{k=1}^{|D|-1}-c_k\log\left(1-e^{\frac{2i\pi k}{|D|}}\right),$$

en tenant compte de ce que $-\log(1-z)=\sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$ pour $|z|=1, z\neq 1$.

On peut calculer les coefficients c_k ; la plus grande difficulté consiste dans la détermination du signe des expressions que l'on obtient. La formule finale pour le nombre de classes, conjecturée par Jacobi en 1832 et prouvée par Dirichlet en 1838, est

$$h = \begin{cases} \dfrac{-1}{|D|} \displaystyle\sum_{k=1}^{|D|-1} k\,\chi(k) & \text{si } D < -4 \\[2ex] \dfrac{-1}{2\log \varepsilon} \displaystyle\sum_{k=1}^{D-1} \chi(k) \log \sin \dfrac{\pi k}{D} & \text{si } D > 0 . \end{cases}$$

Par exemple, si $D = -p$, p premier $\equiv 3 \pmod 4$, on obtient $h = \dfrac{B-A}{p}$ où B est la somme des non-résidus quadratiques $(\bmod p)$ et A la somme des résidus quadratiques $(\bmod p)$ dans la suite $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Ainsi, pour $p = 23$, les résidus quadratiques sont $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18$, et les non-résidus $5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22$, d'où $A = 92$, $B = 161$ et $h = \dfrac{161-92}{23} = \dfrac{69}{23} = 3$.

Pour la démonstration complète, on peut consulter, outre les ouvrages cités ci-dessous, une rédaction de mon cours du semestre d'été 1965 faite par O. Burlet.

2. Ce cours doit avoir préparé l'auditeur à aborder de nombreuses questions très intéressantes: théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques, extension de la théorie des formes quadratiques binaires au cas d'un discriminant quelconque, théorie

des corps de nombres algébriques de degré n quelconque, etc.

Parmi les nombreux ouvrages traitant de ces questions, je me borne à en citer trois, ceux qui m'ont été le plus utile :

E. Hecke. Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen.

S.I Borewicz, I.R. Šafarevič : Zahlentheorie (traduit du russe, Birkhäuser Verlag).

P. Samuel. Théorie algébrique des nombres.

On pourra consulter aussi mon cours de 1958-59 rédigé par P. Besson, et pour le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques le Chapitre I de "Torsion et Type simple d'homotopie", Lectures Notes in Mathematics 48 (Springer-Verlag).

Un ouvrage de caractère plus élémentaire mais néanmoins très intéressant et des plus recommandable aux débutants est :

H. Davenport. The higher arithmetic (An Introduction to the Theory of Numbers).