

---

Felice Ronga

Notes de géométrie algébrique

---



Genève, MMVI ap. J.-C.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>I Introduction</b>	<b>1</b>
Le théorème de Bézout dans le plan	1
La conchoïde de Nicomède	2
<b>II Variétés affines</b>	<b>5</b>
II.1 Premiers contacts : le théorème de l'hexagone de Pascal	5
II.2 La topologie de Zariski	8
Idéaux	8
Anneaux noethériens	8
Anneaux factoriels	8
Anneau principaux	8
Ensembles algébriques affines	9
Topologie de Zariski sur $\mathbb{K}^n$	10
Topologie de Zariski et topologie transcendantale	10
Le théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz)	11
II.3 Décomposition en composantes irréductibles	12
II.4 Anneaux de fonctions régulières et morphismes	13
Fonctions régulières et rationnelles	13
Morphismes	13
Morphismes rationnels	14
II.5 Anneaux locaux	15
II.6 Idéaux définissant des ensembles finis de points	16
II.7 Extensions d'anneaux	17
II.8 Extensions de corps	20
II.8.1 Rappels	20
II.8.2 Base de transcendance	20
II.8.3 Le lemme de normalisation de Noether	22
II.8.4 Une preuve du Nullstellensatz	22
II.8.5 Dérivations	24
II.9 Propriétés de la dimension	26
II.10 Exercices	26
<b>III Variétés projectives</b>	<b>29</b>
III.1 Premiers contacts	29
III.2 Ensembles algébriques projectifs	31
III.3 Passage de l'anneau affine au projectif	32
III.4 Dimension des variétés projectives	32
III.5 Produits d'espaces projectifs et élimination	32
III.6 Le théorème de Bézout, première version et premières applications	32
III.6.1 Le théorème de Bézout	32
III.6.2 Définition des points d'inflexion des courbes planes	33

III.6.3	Courbes polaires . . . . .	34
III.6.4	Polaire, Hessienne et points d'inflexion . . . . .	35
III.7	Le théorème de Bézout avec multiplicités . . . . .	36
<b>A</b>	<b>Variétés différentiables</b>	<b>41</b>
I.1	Rappels : Théorème des fonctions implicites et de l'application inverse . . . . .	41
I.2	La notion de variété différentiable . . . . .	41
I.2.1	Espace tangent et dérivées d'applications . . . . .	43
I.2.2	Variétés algébriques et variétés $\mathcal{C}^\infty$ . . . . .	44
I.2.3	Le principe de la conservation du nombre . . . . .	45
I.3	Exercices . . . . .	46
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>
	<b>Index</b>	<b>48</b>

# Table des figures

I.1	La conchoïde de Nicomède . . . . .	2
I.2	Instrument pour faire la trisection de l'angle . . . . .	3
II.1	L'hexagone de Pascal . . . . .	7
II.2	Le théorème de Pappus . . . . .	27



# Chapitre I

## Introduction

Le but original de la géométrie algébrique est l'étude des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  décrits par des équations polynomiales.

Par exemple, dans le plan  $\mathbb{R}^2$  on peut définir le cercle  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  ou l'ellipse  $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 - 1 = 0$ . Par contre, la spirale qui s'écrit en coordonnées polaires  $\rho = \rho_0 e^{-\theta}$  n'admet pas d'équation polynomiale.

Bien que l'inspiration nous vienne à l'origine de  $\mathbb{R}^n$ , il convient de passer à l'espace  $\mathbb{C}^n$  pour avoir des résultats qui s'expriment bien. Par exemple, prenons un polynôme de degré  $d$  à une variable complexe :

$$f_{\mathbb{C}}(z) = z^d + c_1 z^{d-1} + \dots + c_d \quad , \quad a_i \in \mathbb{C} \quad .$$

On sait que l'ensemble de ses racines est constitué de  $d$  points, à condition de compter ces racines avec leur multiplicité. Par contre, si

$$f_{\mathbb{R}}(x) = x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}$$

on peut seulement dire que le nombre de racines, comptées avec leur multiplicité, est de la forme  $d - 2k$ , avec  $0 \leq k \leq d/2$ , où  $2k$  est le nombre de racines non réelles, en nombre pair car elles viennent par paires conjuguées.

**Le théorème de Bézout dans le plan** Nous allons voir maintenant un énoncé approximatif du théorème de Bézout et esquisser quelques-unes de ses applications.

Supposons d'avoir deux courbes planes, d'équations  $f(x, y) = 0$  et  $g(x, y) = 0$ , où  $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$  ou  $\mathbb{C}[x, y]$  sont des polynômes de degré respectivement  $d$  et  $e$ ; on notera par  $\Gamma_f$  et  $\Gamma_g$  les courbes correspondantes.

**Théorème I.0.1** (Théorème de Bézout). *Si  $\Gamma_f \cap \Gamma_g$  est constitué d'un nombre fini de points, alors ce nombre est  $d \cdot e$ .*

Dans le cas particulier où  $g(x, y) = y$ ,  $\Gamma_f \cap \Gamma_g$  est constitué des racines de  $f(x, 0)$ , et on retrouve la situation plus haut, à condition que  $f(x, 0)$  soit effectivement de degré  $d$ .

Ce théorème n'est pas entièrement correct tel quel, il y a des précautions à prendre :

- prenons  $f(x, y) = y - x^2$ ,  $g(x, y) = y - \alpha x$ , où  $\alpha$  est une constante; alors  $d = 2$ ,  $e = 1$ . Mais :
  - si  $\alpha \neq 0$ ,  $f$  et  $g$  ont en commun les 2 points  $(0, 0)$  et  $(\alpha, \alpha^2)$ , conformément à l'énoncé de Bézout, autant sur  $\mathbb{R}$  que sur  $\mathbb{C}$
  - si  $\alpha$  tend vers 0, ces deux points viennent se confondre en le seul point  $(0, 0)$
- D'autre part, si on fait tendre  $\alpha$  vers  $\infty$ , ce qui revient à prendre la droite  $g(x, y) = x$ , le point  $(\alpha, \alpha^2)$  tend vers l'infini et disparaît à la fin.
- Si on prend  $g(x, y) = y^2 - \varepsilon$  :
  - lorsque  $\varepsilon > 0$ , on trouve deux points d'intersection  $(\varepsilon, \pm\sqrt{\varepsilon})$

- lorsque  $\varepsilon$  passe de valeurs positives à des valeurs négatives, ces deux points viennent se confondre, puis deviennent imaginaires (i.e. non réels).

Ceci suggère que pour avoir un énoncé correct il faut :

- travailler sur  $\mathbb{C}$  ; après, dans la mesure du possible, on essayera d'avoir des résultats sur  $\mathbb{R}$
- compter les points d'intersection avec multiplicité
- compter les points à l'infini

Enfin, si on veut travailler sur  $\mathbb{R}$ , on peut dire seulement que  $\Gamma_f \cap \Gamma_g$  est constitué de  $d \cdot e - 2k$  points, où  $0 \leq k \leq d \cdot e/2$ .

Note : il semble que Bézout, dans sa première version du théorème qui porte son nom, ait oublié de tenir compte des points à l'infini!

**La conchoïde de Nicomède** C'est une courbe algébrique, dont la découverte est attribuée à Nicomède (300 a.C.), que les grecs anciens ont utilisé pour construire un instrument permettant diviser un angle en 3 parties égales (trisection d'un angle); on sait par ailleurs qu'il n'est pas possible en général de faire la trisection à l'aide de la règle et du compas uniquement.

Soit  $\ell$  une droite et  $Q$  un point fixés dans le plan. La conchoïde de Nicomède est le lieu des points  $P(x, y)$  tels que la droite mobile  $\delta$  par  $P$  et  $Q$  coupe  $\ell$  en un point  $S$  qui est à une distance fixée  $a$  de  $P$ .

Si on prend un système de coordonnées tel que  $Q$  est l'origine et  $\ell$  la droite parallèle à l'axe  $OX$ , à une distance  $b$  de l'origine, on a :

$$\frac{y-b}{z} = \frac{y}{x}, \text{ où } z = \sqrt{a^2 - (y-b)^2}$$

(voir figure I.1), d'où l'on tire l'équation :

$$(y-b)^2(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$$

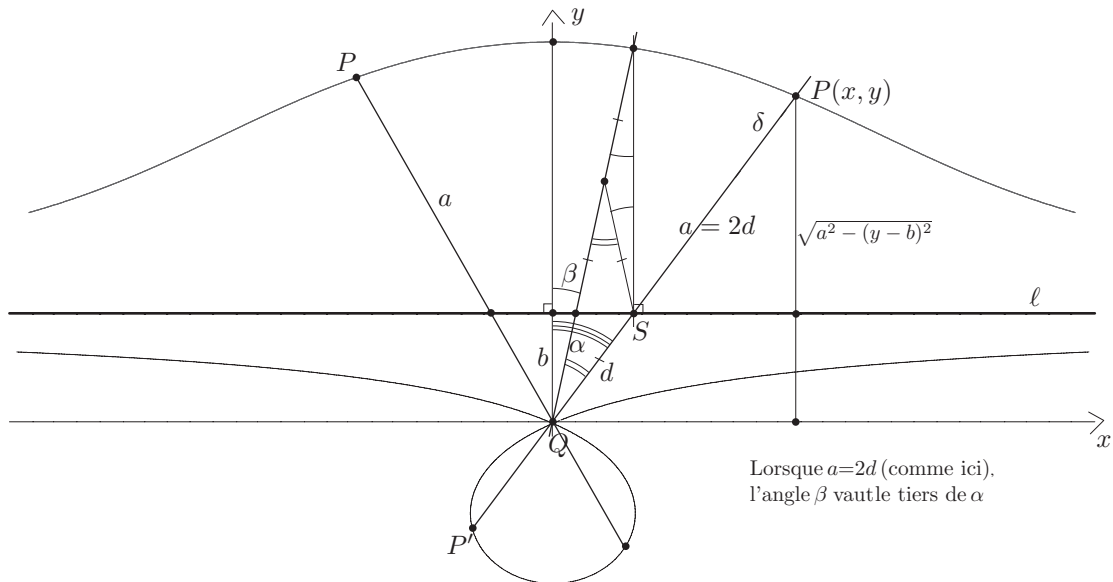


Figure I.1: La conchoïde de Nicomède

Il s'agit d'une courbe de degré 4, dont seulement la partie supérieure est utilisée pour la trisection de l'angle. Voici comment on procède. Etant donné un angle  $\alpha$ , on place son sommet en  $Q$  et un de ses côtés sur l'axe  $OY$ ; si  $d$  désigne la longueur du segment joignant  $Q$  à l'intersection de l'autre côté de l'angle  $\alpha$  avec  $\ell$ , on choisit  $a = 2d$ .

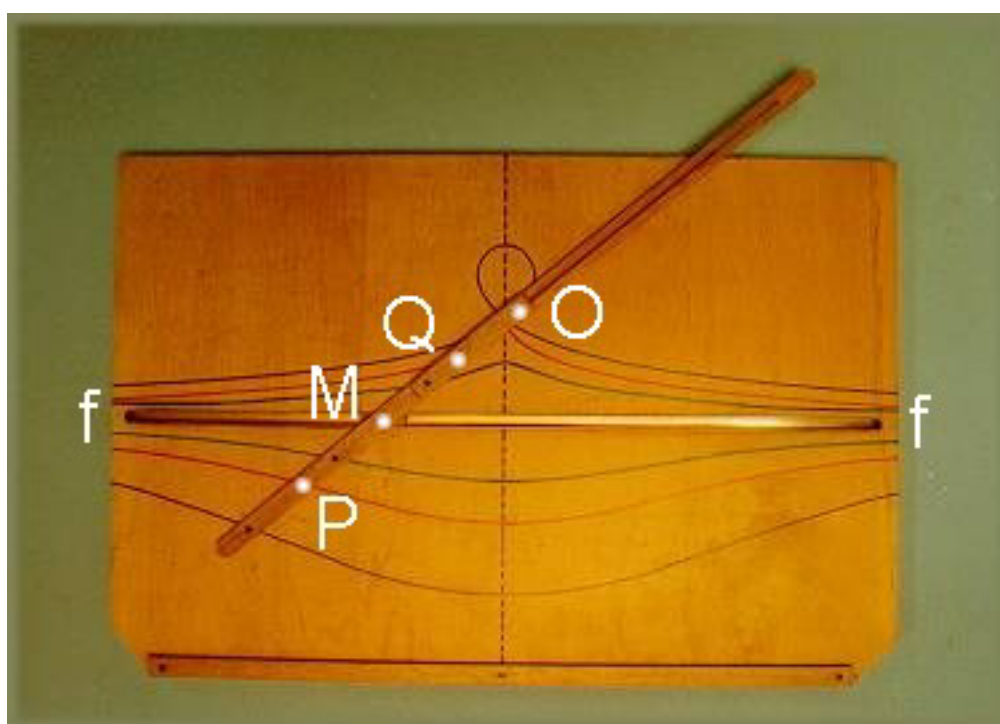


Figure I.2: Instrument pour faire la trisection de l'angle



# Chapitre II

## Variétés affines

On désignera par  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique nulle, par exemple  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On notera  $\mathbb{K}[x, y]$  l'espace des polynômes en  $x$  et  $y$ , à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , et  $\mathbb{K}[x, y]_d$  le sous-espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à  $d$ ; il est de dimension  $\binom{d+2}{2}$ .

### II.1 Premiers contacts : le théorème de l'hexagone de Pascal

Une courbe algébrique plane est déterminée par une équation de la forme  $f(x, y) = 0$ , où  $f \in \mathbb{K}[x, y]$ . Notons que si on remplace  $f$  par  $\lambda \cdot f$ , où  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , on obtient la même courbe. Par définition, l'espace des courbes de degré  $d$  est l'espace des droites par l'origine de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}[x, y]_d$ , qu'on désigne par  $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x, y]_d)$ ; en d'autres termes :

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}[x, y]_d) = \mathbb{K}[x, y] \setminus \{0\} / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence qui identifie  $f, g \in \mathbb{K}[x, y] \setminus \{0\}$  si elles sont sur une même droite par l'origine, c'est-à-dire s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $g = \lambda \cdot f$ . Pour justifier pleinement cette définition, il faudrait savoir que si  $f$  et  $g$  sont de même degré et définissent la même courbe, alors il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $g = \lambda \cdot f$ , ce qui nécessite de supposer que  $f$  est réduite et d'utiliser le Nullstellensatz de Hilbert; on en reparlera au § suivant.

**Remarque II.1.1.** Un polynôme de degré  $d$  s'écrit sous la forme

$$f(x, y) = \sum_{i, j \geq 0, i+j \leq d} a_{i, j} x^i y^j$$

avec  $a_{i, j} \in \mathbb{K}$ . Mais il se peut que les termes avec  $i + j = d$  soit tous nuls; c'est le prix à payer pour que  $\mathbb{K}[x, y]_d$  soit un espace vectoriel. Si on veut préciser que  $f$  comporte des termes de degré  $d$  non nuls, on dit que  $f$  est de degré strictement égal à  $d$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}^2$  et  $f \in \mathbb{K}[x, y]_d$ ; la condition que la courbe définie par  $f$  passe par  $P$  s'écrit :  $f(P) = 0$ , qui est une condition linéaire en  $f$ . Si  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}^2$ , on pose :

$$V_{P_1, \dots, P_k}^d = \{f \in \mathbb{K}[x, y]_d \mid f(P_1) = \dots = f(P_k) = 0\} \quad ;$$

c'est l'espace vectoriel des équations de courbes de degré  $d$  qui passent par  $P_1, \dots, P_k$ . Il est obtenu en imposant  $k$  conditions linéaires sur les éléments de  $\mathbb{K}[x, y]_d$ ; on peut donc s'attendre à ce que cet espace soit de dimension  $\dim(\mathbb{K}[x, y]_d) - k = \frac{(d+2)d+1}{2} - k$ , tout au moins si les points  $P_1, \dots, P_k$  ne sont pas dans des positions particulières. Les deux propositions suivantes donnent, dans des cas particuliers, des conditions explicites pour que la dimension de  $V_{P_1, \dots, P_k}^d$  soit effectivement ce qu'on attend.

**Proposition II.1.2.** Soient  $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{K}^2$  des points distincts, tels que 4 d'entre eux ne sont pas alignés. Alors il passe une et une seule conique par  $P_1, \dots, P_5$ .

*Preuve:* L'espace vectoriel  $\mathbb{K}[x, y]_2$  est de dimension  $\binom{2+2}{2} = 6$ ; il suffit de démontrer que l'on a :

$$\mathbb{K}[x, y]_2 \supsetneq V_{P_1}^2 \supsetneq V_{P_1, P_2}^2 \supsetneq \cdots \supsetneq V_{P_1, \dots, P_5}^2$$

car dans cette suite chaque espace s'obtient à partir du précédent par une condition linéaire; si l'inclusion est stricte, la dimension chute exactement de 1 à chaque fois, et donc  $V_{P_1, \dots, P_5}^2$  est de dimension 1 :  $V_{P_1, \dots, P_5}^2 = \{\lambda \cdot f \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ , et  $f \in \mathbb{K}[x, y]_2 \setminus \{0\}$  est l'équation de la conique cherchée.

Rappelons que  $\mathbb{K}[x, y]_2$  contient aussi les polynômes de degré un. Tout d'abord, il est clair que

$$\mathbb{K}[x, y]_2 \supsetneq V_{P_1}^2$$

car on peut trouver une conique  $q_1$  ne passant pas par  $P_1$  : par exemple, si  $P_1 = (a, b)$ , on prend  $q_1(x, y) = x + y - a - b + 1$ . Nous allons donc construire une suite de conique  $q_2, \dots, q_5$ ,  $q_i$  passant par  $P_1, \dots, P_{i-1}$  mais pas par  $P_i$ .

Si parmi les  $P_i$  il y en a 3 qui sont alignés, on peut supposer que ce soient  $P_1, P_2, P_3$ . On prend pour  $q_2$  l'équation d'une droite passant par  $P_1$  mais pas par  $P_2$ . Soit  $\varphi_3$  l'équation d'une droite passant par  $P_2$  mais pas par  $P_3$  : on peut prendre alors  $q_3 = q_2 \cdot \varphi_3$ .

Si  $P_1, P_2, P_3$  sont sur une même droite d'équation  $\varphi_4$ ,  $P_4$  ne sera pas sur cette droite, ni  $P_5$ , et on peut prendre  $q_4 = \varphi_4$ . Puis on choisit l'équation d'une droite  $\varphi_5$  par  $P_4$  mais pas par  $P_5$ , et alors  $q_5 = \varphi_4 \cdot \varphi_5$  sera une conique par  $P_1, P_2, P_3, P_4$  mais pas par  $P_5$ .

Par contre, si  $P_1, P_2, P_3$  ne sont pas alignés,  $P_2, P_3, P_4$  ne le sont pas non plus, et on peut choisir pour  $q_4$  le produit des équations d'une droite par  $P_1, P_2$  avec l'équation d'une droite par  $P_3$ , pas par  $P_4$ , et enfin pour  $q_5$  on prend le produit des équations des droites par  $P_1, P_2$  et  $P_3, P_4$ .

*q. e. d.*

Nous allons établir un résultat du même type pour les cubiques. Cependant, nous allons supposer que certains des points sont en position spéciale ( $P_1, \dots, P_6$  sur une conique non dégénérée), parce qu'il nous sera utile sous cette forme, mais aussi parce que cela sera utile pour faire la démonstration. On dit qu'une conique est non dégénérée si elle ne contient pas de droites.

**Proposition II.1.3.** *Soient  $P_1, P_2, \dots, P_8 \in \mathbb{K}^2$  des points distincts, et supposons que  $P_1, \dots, P_6$  soient sur une conique  $q$  non dégénérée, ne contenant ni  $P_7$  ni  $P_8$ . Alors l'espace vectoriel*

$$V_{P_1, \dots, P_8}^3$$

*est de dimension 2.*

*Preuve:* Notons que  $\mathbb{K}[x, y]_3$  est de dimension  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ , et donc l'affirmation consiste à dire que les conditions de passer par  $P_1, \dots, P_8$  sont linéairement indépendantes. Il nous suffit alors de montrer que :

$$\mathbb{K}[x, y] \supsetneq V_{P_1}^3 \supsetneq \cdots \supsetneq V_{P_1, \dots, P_8}^3$$

ce que nous ferons de manière analogue à la preuve de **1.2** : pour montrer que la première des inclusions est stricte, on prend une droite qui ne passe pas par  $P_1$ ; pour les autres, on va définir des équations de cubiques  $c_i$ ,  $i = 2, \dots, 8$ , avec  $c_i$  passant par  $P_1, \dots, P_{i-1}$  mais pas par  $P_i$ .

Tout d'abord, remarquons que 3 des  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, P_6$  ne sont pas alignés sur une même droite; sinon, l'équation de la conique restreinte à une telle droite s'annulerait en 3 points distincts, donc elle serait identiquement nulle, et la conique serait alors dégénérée.

- $c_2$  : on prend l'équation d'une droite par  $P_1$ , pas par  $P_2$
- $c_3$  : l'équation de la droite par  $P_1, P_2$
- $c_4$  : le produit de  $c_3$  par l'équation d'une droite par  $P_2$ , pas par  $P_3$
- $c_5$  : le produit de l'équation de la droite par  $P_1, P_2$  par l'équation de la droite par  $P_3, P_4$
- $c_6$  : le produit de  $c_5$  par l'équation d'une droite par  $P_5$ , pas par  $P_6$

- $c_7$  : la conique  $q$
- $c_8$  : le produit de  $q$  avec l'équation d'une droite par  $P_7$ , pas par  $P_8$ .

(voir figure II.1)

*q. e. d.*

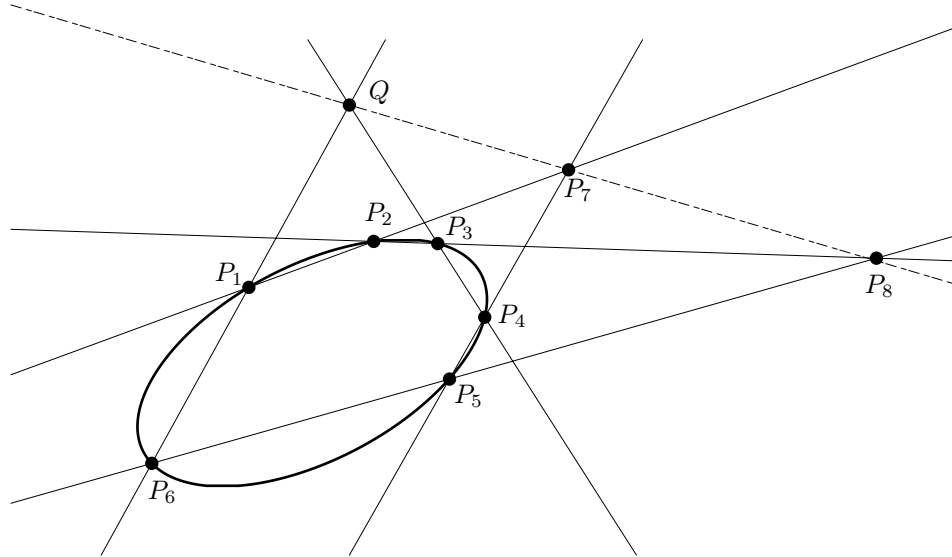


Figure II.1: L'hexagone de Pascal

**Théorème II.1.4** (Théorème de l'hexagone de Pascal). *Les 3 intersections des paires de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique non dégénérée sont alignés.*

On suppose implicitement que ces 3 intersections existent, c'est-à-dire que les côtés opposés ne sont pas parallèles.

*Preuve:* Soient  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  les sommets successifs de l'hexagone et posons :

$$P_7 = \overline{P_1P_2} \cap \overline{P_4P_5} \quad , \quad P_8 = \overline{P_2P_3} \cap \overline{P_5P_6} \quad , \quad Q = \overline{P_3P_4} \cap \overline{P_6P_1} \quad ;$$

nous devons montrer que  $P_7, P_8$  et  $Q$  sont alignés (voir figure II.1.)

Soient :

- $f$  l'équation de la cubique qui est réunion des 3 droites  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_3P_4}$  et  $\overline{P_5P_6}$
- $g$  l'équation de la cubique qui est réunion des 3 droites  $\overline{P_2P_3}, \overline{P_4P_5}$  et  $\overline{P_6P_1}$
- $h$  l'équation de la cubique qui est réunion de la conique et de la droite  $\overline{P_7P_8}$ .

Alors,  $V(f)$  et  $V(g)$  ont en commun les 8 points  $P_1, \dots, P_8$ , ainsi que  $Q$ , et comme  $V(f) \neq V(g)$ , on ne peut avoir de relation de la forme  $g = \lambda \cdot f$ ,  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . D'après 1.3, l'espace vectoriel  $V_{P_1, \dots, P_8}^3$  est de dimension 2, donc  $f$  et  $g$  en forment une base. D'autre part,  $h(P_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , donc  $h \in V_{P_1, \dots, P_8}^3$ , et on peut l'écrire sous la forme :

$$h = \lambda \cdot f + \mu \cdot g \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad .$$

Il en suit que

$$h(Q) = \lambda \cdot f(Q) + \mu \cdot g(Q) = 0$$

ce qui implique que  $Q$ , qui ne peut pas être sur la conique, est forcément sur la droite  $\overline{P_7P_8}$ .

## II.2 La topologie de Zariski

On commence par quelques rappels d'algèbre commutative élémentaire (voir par exemple [2]). Soit  $A$  un anneau commutatif avec unité.

On désigne par  $A[X]$  l'anneau des polynômes à coefficients dans  $A$ . Les éléments de  $A[X]$  s'écrivent sous la forme :

$$f(X) = \sum_{h=0}^d a_h X^h \quad , \quad a_h \in A \quad .$$

L'anneau  $A[X_1, \dots, X_n]$  des polynômes en les  $n$  variables  $X_1, \dots, X_n$  est défini par induction sur  $n$  :  $A[X_1, \dots, X_n] = (A[X_1, \dots, X_{n-1}])[X_n]$ . Notons que la multiplication des polynômes en fait une  $A$ -algèbre, c'est-à-dire un  $A$ -module muni d'une multiplication (ici la multiplication des polynômes), qui est une application bilinéaire.

**Idéaux** Un idéal de  $A$  est un sous-ensemble  $\mathcal{A} \subset A$  qui est un sous- $A$  module de  $A$  :

$$a, b \in \mathcal{A} \Rightarrow a + b \in \mathcal{A} \quad ; \quad a \in \mathcal{A}, c \in A \Rightarrow c \cdot a \in \mathcal{A} \quad .$$

Si  $\Lambda \subset A$  est un sous-ensemble quelconque, on notera  $\langle \Lambda \rangle$  l'idéal engendré par  $\Lambda$ ; c'est l'ensemble des éléments de la forme

$$\sum_{h=1}^k a_h \lambda_h \quad , \quad \text{avec } a_h \in A, \lambda_h \in \Lambda \quad .$$

**Anneaux noethériens** On dit que  $A$  est noethérien si tout idéal  $\mathcal{A} \subset A$  est de génération finie, c'est-à-dire qu'il existe  $a_1, \dots, a_N \in \mathcal{A}$  tels que  $\mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$ . Cela équivaut à dire que si  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_h \subset \dots$  est une suite croissante infinie d'idéaux, elle est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe  $N$  tel que  $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_N$  si  $h \geq N$ .

Le théorème de la base de Hilbert affirme que si l'anneau  $A$  est noethérien, alors l'anneau  $A[X]$  est aussi noethérien, et par conséquent l'anneau  $A[X_1, \dots, X_n]$  est noethérien, pour tout  $n$ . En particulier, tout corps  $K$  est noethérien, puisque ses seuls idéaux sont  $\langle 0 \rangle$  et  $K$  lui-même; donc l'anneau  $K[X_1, \dots, X_N]$  est noethérien.

**Anneaux factoriels** Une unité  $u \in A$  est un élément qui possède un inverse. On dit que  $a \in A$  est premier si ce n'est pas une unité et si

$$a = b \cdot c \Rightarrow b \text{ ou } c \text{ est une unité} \quad .$$

L'anneau  $A$  est dit factoriel si tout élément  $a \in A \setminus \{0\}$  possède une décomposition  $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_N$ , où les  $a_h$  sont premiers, de manière essentiellement unique : toute autre décomposition du même type s'obtient en permutant les  $a_h$  et en les multipliant par des unités. On a le

**Théorème II.2.1.** *Si  $A$  est factoriel, alors  $A[X]$  est factoriel.*

Tout corps est factoriel, par conséquent l'anneau  $K[X_1, \dots, X_n]$  est factoriel.

**Anneau principal** Un anneau est dit principal si tout idéal est principal, c'est-à-dire de la forme  $\langle a \rangle$ ,  $a \in A$ . Pour tout corps  $K$ , l'anneau  $K[X]$  est principal : si  $\mathcal{A} \subset A$  est un idéal non nul, on prend un élément non nul  $f \in \mathcal{A}$  dont le degré est minimal parmi les degrés des éléments non nuls de  $\mathcal{A}$ , et on montre que  $\mathcal{A} = \langle f \rangle$ .

Par contre  $K[X, Y]$  n'est pas principal : l'idéal  $\langle X, Y \rangle$  ne peut être engendré par un seul polynôme.

### Ensembles algébriques affines

**Définition II.2.2.** Un ensemble algébrique affine est un sous-ensemble  $X \subset \mathbb{K}^n$  tel qu'il existe une famille de polynômes  $\Lambda \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  telle que :

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in \Lambda\} \quad .$$

En d'autres termes,  $X$  est décrit par un ensemble  $\Lambda$  d'équations polynomiales. On notera :  $X = V(\Lambda)$ .

On dira aussi simplement que  $X$  est un ensemble algébrique, l'attribut "affine" ayant pour but de spécifier que c'est un sous-ensemble de  $\mathbb{K}^n$  plutôt de l'espace projectif, que nous considérerons au chapitre III.

Notons que  $\Lambda \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  et l'idéal engendré  $\langle \Lambda \rangle$  définissent le même sous-ensemble de  $\mathbb{K}^n$ . Mais puisque  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  est noethérien, il existe un ensemble fini  $f_1, \dots, f_k \in \Lambda$  de générateurs de  $\langle \Lambda \rangle$ , et alors  $V(\Lambda) = V(f_1, \dots, f_k)$  : tout ensemble algébrique peut en fait être défini par un ensemble fini d'équations polynomiales.

Les 2 propositions qui suivent donnent quelques propriétés élémentaires des relations entre les ensembles algébriques et les idéaux qui les définissent. Si  $A \subset \mathbb{K}^n$  est un sous-ensemble quelconque, on note  $\mathcal{I}(A)$  l'ensemble des polynômes qui s'annulent en tout point de  $A$ , qui est en fait un idéal :

$$\mathcal{I}(A) = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in A\} \quad .$$

### Proposition II.2.3.

- (1) Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  un idéal et  $X = V(\mathcal{A})$ . Alors  $\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{A}$ .
- (2) Soit  $X \subset \mathbb{K}^n$  un ensemble algébrique. Alors  $V(\mathcal{I}(X)) = X$ .
- (3) Si  $\Lambda \subset M \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , alors  $V(\Lambda) \supset V(M)$

La preuve est élémentaire et laissée au lecteur. Si on a une famille  $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  d'idéaux de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , on notera par  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$  l'idéal engendré par les  $\mathcal{A}_\lambda$ , qui peut s'exprimer ainsi :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda = \left\{ \sum_{h=1}^k a_h b_h \mid \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \Lambda, a_h \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n], b_h \in \mathcal{A}_{\lambda_h}, h = 1, \dots, k \right\} \quad .$$

Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  sont des idéaux, on désigne par  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  l'idéal engendré par les produits  $a \cdot b$ ,  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ .

**Proposition II.2.4.** Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  deux idéaux

- (1)  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow V(\mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A})$
- (2)  $V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}) = V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = V(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$  .
- (3) Si  $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille d'idéaux de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , alors :

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(\mathcal{A}_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda\right) \quad .$$

*Preuve:* L'affirmation 1) est évidente. Pour 2), nous allons montrer que

$$V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}) \quad .$$

Puisque  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , il suit de 1) que  $V(\mathcal{A}) \subset V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ ; de même,  $V(\mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ , et donc  $V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ .

Puisque  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ , il suit de a) que  $V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$ .

Pour la dernière inclusion, supposons que  $\mathcal{A} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  et  $\mathcal{B} = \langle g_1, \dots, g_\ell \rangle$ . Alors  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \langle f_i \cdot g_j, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, \ell \rangle$ . Soit  $x \in V(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$ ; si  $x \notin V(\mathcal{A})$ , il existe  $i$  tel que  $f_i(x) \neq 0$ , donc  $g_j(x) = 0 \forall j = 1, \dots, \ell$  et  $x \in V(\mathcal{B})$ , ce qui montre bien que  $V(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \subset V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B})$ .

*q.e.d.*

**Topologie de Zariski sur  $\mathbb{K}^n$**  On définit cette topologie en prenant comme fermés les ensembles algébriques, qu'on appelle aussi fermés de Zariski. En effet :

- (1) L'ensemble vide  $\emptyset$  et  $\mathbb{K}^n$  peuvent être considérés comme ensembles algébriques :

$$\emptyset = V(\langle 1 \rangle) \quad , \quad \mathbb{K}^n = V(\langle 0 \rangle)$$

- (2) la proposition II.2.4 montre que la réunion finie et l'intersection quelconque de fermés de Zariski est encore un fermé de Zariski.

Les ouverts de cette topologie sont, comme d'habitude, les complémentaires de fermés de Zariski; on les appelle ouverts de Zariski.

Cette topologie de Zariski vérifie encore la propriété suivante, appelé noethérienité : toute suite décroissante de fermés

$$X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_N \supset \dots$$

est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un indice  $N_0$  tel que  $X_N = X_{N_0}$  pour  $N \geq N_0$ . Cette propriété est une conséquence immédiate du fait que l'anneau  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  est noethérien : à la suite décroissante d'ensembles algébriques  $\{X_N\}$  correspond la suite croissante d'idéaux  $\mathcal{I}(X_N)$ , qui est stationnaire, ce qui implique que la suite  $\{X_N\}$  est stationnaire.

**Topologie de Zariski et topologie transcendantale** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ , ce que nous supposons dans tout ce paragraphe, on a aussi une autre topologie sur  $\mathbb{K}^n$ , celle qui est induite par la métrique euclidienne; dans ce contexte, on l'appelle *topologie transcendantale*. Puisque les polynômes sont des fonctions continues pour la topologie transcendantale, les fermés de Zariski sont aussi fermés pour la topologie transcendantale.

Si  $x \in \mathbb{K}^n$  et  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , on désignera par  $B(x, r)$  la boule de centre  $x$  et rayon  $r$  :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid \|x - y\| < r\} \quad .$$

Les ouverts de la topologie transcendantale sont des réunions quelconques de boules.

On va établir quelques résultats qui lient ces deux topologies. Le premier nous dit que les ouverts de Zariski non vides sont très gros.

**Proposition II.2.5.** *Soit  $U \subset \mathbb{K}^n$  un ouvert de Zariski non vide. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$  et tout  $r > 0$  on a :*

$$B(x, r) \cap U \neq \emptyset \quad .$$

En d'autres termes, l'adhérence de  $U$  dans la topologie transcendantale est  $\mathbb{K}^n$  tout entier, ce qui s'exprime encore en disant que  $U$  est dense dans  $\mathbb{K}^n$  pour la topologie transcendantale.

*Preuve:* Sinon, il existerait  $x \in \mathbb{K}^n$  et  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap U = \emptyset$ , ce qui implique, en posant  $F = \mathbb{K}^n \setminus U$ , que  $B(x, r) \subset F$ , qui est un fermé de Zariski, donc lieu de zéros de polynômes :  $F = V(\langle f_1, \dots, f_k \rangle)$ . Mais ces  $f_i$  doivent s'annuler sur toute la boule  $B(x, r)$ , donc ils sont identiquement nuls, ce qui impliquerait que  $F = \mathbb{K}^n$  et donc  $U = \emptyset$ .

*q. e. d.*

**Corollaire II.2.6.** *Si  $U_1, \dots, U_k \subset \mathbb{K}^n$  sont des ouverts de Zariski non vides, alors leur intersection  $U_1 \cap \dots \cap U_k$  est un ouvert de Zariski non vide.*

*Preuve:* Il suffit de faire la preuve pour  $k=2$ . Puisque  $U_1$  est non vide, on peut prendre  $x \in U_1$ ; puisque  $U_1$  est aussi ouvert dans la topologie transcendantale, on peut trouver  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_1$ . D'après 2.5,  $B(x, r) \cap U_2 \neq \emptyset$ , donc  $U_1 \cap U_2 \supset B(x, r) \cap U_2 \neq \emptyset$ .

*q. e. d.*

**Le théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz)** Lorsqu'on définit un ensemble algébrique  $X \subset \mathbb{K}^n$  par des équations polynomiales :

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

il n'est pas vrai en général que  $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ , par exemple si l'on prend l'équation  $f(X_1) = X_1^2$ . Le théorème des zéros de Hilbert nous dit comment retrouver  $\mathcal{I}(X)$  à partir des équations  $f_1, \dots, f_N$ , dans le cas où on travaille sur un corps algébriquement clos, par exemple le corps  $\mathbb{C}$ .

**Définition II.2.7** (Définition - radical d'un idéal). Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  un idéal. On appelle le radical de  $\mathcal{A}$ , ou encore racine de  $\mathcal{A}$ , l'idéal :

$$\sqrt{\mathcal{A}} = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^N \in \mathcal{A}\} \quad .$$

On vérifie que c'est effectivement un idéal.

**Théorème II.2.8** (le Nullstellensatz de Hilbert). Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  un idéal. Alors, si  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  et  $f$  s'annule sur  $V(\mathcal{A})$ , il existe  $N$  tel que  $f^N \in \mathcal{A}$ .

■

En d'autres termes :

$$\mathcal{I}(V(\mathcal{A})) = \sqrt{\mathcal{A}}$$

Il existe une grande variété de démonstrations de ce théorème : voir par exemple [3, Chapter One, § 7]. Nous en proposons une au § II.8.4. Dans [1], cinq preuves différentes sont proposées.

Si  $\mathcal{A}$  est un idéal principal,  $\mathcal{A} = \langle f \rangle$ ,  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , qui est un anneau factoriel;  $f$  admet donc une décomposition :

$$f = f_1^{r_1} \cdot \dots \cdot f_k^{r_k}$$

où les  $f_i$  sont irréductibles,  $f_i \neq f_j$  si  $i \neq j$ ,  $r_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Alors, si  $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  et  $g$  s'annule sur  $V(f)$ , le Nullstellensatz nous dit qu'il existe  $N$  tel que

$$g^N = h \cdot f_1^{r_1} \cdot \dots \cdot f_k^{r_k}$$

ce qui entraîne que  $g$  est divisible par le produit  $f_1, \dots, f_k$ , et comme ceux-ci sont premier,  $g$  est divisible par  $f_1 \cdot \dots \cdot f_k$ . En d'autres termes :

$$\mathcal{I}(V(f)) = \langle f_1 \cdot \dots \cdot f_k \rangle \quad .$$

Notons que ceci reste vrai sur  $\mathbb{R}$  : si  $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ , on peut le regarder comme élément de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  et le décomposer en produit d'irréductibles de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  :  $f = f_1^{r_1} \cdot \dots \cdot f_k^{r_k}$ . Mais puisque  $f = \bar{f}$  (conjugaison de ses coefficients), si  $f_i$  n'est pas à coefficients réels,  $\bar{f}_i$  doit aussi apparaître dans la décomposition de  $f$ . La décomposition de  $f$  s'écrit alors sous la forme :

$$f = f_1 \cdot \bar{f}_1 \cdot \dots \cdot f_\ell \cdot \bar{f}_\ell \cdot f_{\ell+1} \cdot \dots \cdot f_k$$

avec  $f_{\ell+1}, \dots, f_k$  à coefficients réels, et alors, si on pose  $g_i = f_i \cdot \bar{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , les  $g_i$  sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ , sans quoi les  $f_i$  ne seraient pas irréductibles dans  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$

Si  $g \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  s'annule sur  $V(f)$ , alors  $\exists N$  tel que :

$$g^N = h \cdot f_1 \cdot \dots \cdot f_k$$

et puisque  $g$  est à coefficients réels,  $h$  est aussi à coefficients réels. Donc :

$$\mathcal{I}(V(f)) = \mathcal{I}(\langle g_1 \cdot \dots \cdot g_\ell \cdot f_{\ell+1} \cdot \dots \cdot f_k \rangle)$$

où les  $g_1, \dots, g_\ell, f_{\ell+1}, \dots, f_k$  sont les irréductibles de  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  qui divisent  $f$ .

## II.3 Décomposition en composantes irréductibles

**Définition II.3.1** (Ensemble algébrique irréductible). Soit  $Y \subset \mathbb{K}^n$  un fermé de Zariski. On dit qu'il est irréductible si

$$Y = Y_1 \cup Y_2, Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ fermés de Zariski de } \mathbb{K}^n \Rightarrow Y_1 = Y \text{ ou } Y_2 = Y \quad .$$

On appelle *variété affine* un fermé de Zariski irréductible de  $\mathbb{K}^n$ .

Autrement dit,  $Y$  est irréductible s'il ne se décompose pas comme réunion de deux fermés de Zariski, sauf de manière triviale.

**Exemple II.3.2.** Soit  $f(x, y) = y^2 - x^2$ . Alors  $V(f) = V(y - x) \cup V(y + x)$  n'est pas irréductible.

Rappelons qu'un idéal  $\mathcal{A}$  d'un anneau  $R$  est dit premier si :

$$a, b \in R, a \cdot b \in \mathcal{A} \Rightarrow a \in \mathcal{A} \text{ ou } b \in \mathcal{A} \quad .$$

**Proposition II.3.3.** Soit  $Y \subset \mathbb{K}^n$  un fermé de Zariski.

i)

$$Y \text{ est irréductible} \Leftrightarrow \text{son idéal } \mathcal{I}(Y) \text{ est premier}$$

ii) si  $Y$  est irréductible et  $U \subset Y$  un ouvert de Zariski non vide, alors  $\bar{U} = Y$ , où  $\bar{U}$  désigne l'adhérence de Zariski de  $U$  dans  $Y$ .

*Preuve:* Pour i), si  $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  et  $f \cdot g \in \mathcal{I}(Y)$ , posons  $Y_1 = Y \cap V(f)$  et  $Y_2 = V(g)$ . Alors  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des fermés de Zariski et  $Y = Y_1 \cup Y_2$ ; donc  $Y = Y_1$ , auquel cas  $f \in \mathcal{I}(Y)$ , ou bien  $Y = Y_2$ , et alors  $g \in \mathcal{I}(Y)$ .

Pour ii), on pose  $Y_1 = Y \setminus U$  et  $Y_2 = \bar{U}$ . Alors  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des fermés de Zariski, et  $Y = Y_1 \cup Y_2$ . Si  $Y = Y_1$ , cela impliquerait que  $U = \emptyset$ , donc on a que  $Y_2 = \bar{U} = Y$ .

*q.e.d.*

Supposons que l'on ait une décomposition  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ ; on dit qu'elle est *incompressible* si  $Y_i \not\subset Y_j$  pour  $i \neq j$ .

**Proposition II.3.4.** Soit  $Y \subset \mathbb{K}^n$  un fermé de Zariski. Il existe une décomposition incompressible :

$$Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_M$$

où les  $Y_i$  sont des fermés de Zariski irréductibles, et elle est unique à permutation des  $Y_i$  près.

*Preuve:* Pour l'existence, il suffit de montrer l'existence d'une décomposition; on pourra la rendre incompressible en laissant tomber les termes inutiles. On procède par l'absurde. Si une telle décomposition n'existe pas,  $Y$  ne peut être irréductible; il peut donc s'écrire sous la forme :

$$Y = Y_1 \cup Y' \text{ avec } Y_1, Y' \text{ fermés de Zariski } Y_1 \subsetneq Y \text{ et } Y' \subsetneq Y$$

et l'un de  $Y_1$  ou  $Y'$  ne possède pas de décomposition, sinon on en déduirait une décomposition pour  $Y$ ; supposons que ce soit  $Y_1$ . De nouveau,  $Y_1$  ne peut pas être irréductible, et en procédant comme avant on trouve  $Y_2 \subsetneq Y_1$  qui ne possède pas de décomposition. En continuant ainsi, on trouve une suite infinie de fermés de Zariski :

$$Y \supsetneq Y_1 \supsetneq \dots \supsetneq Y_N \dots$$

ce qui contredit la noethérianité de la topologie de Zariski.

Supposons d'avoir deux décompositions incompressibles :

$$Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_M = Z_1 \cup \dots \cup Z_N \quad .$$

alors, pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on a :

$$Y_i = \bigcup_{j=1, \dots, M} Y_j \cap Z_i$$

et puisque  $Y_i$  est irréductible, il existe  $j_i$  tel que  $Y_i = Y_i \cap Z_{j_i}$ , ce qui entraîne que  $Y_i \subset Z_{j_i}$ . De même, il existe un  $i'$  tel que  $Z_{j_i} \subset Y_{i'}$ . Donc, puisque ces décompositions sont incompressibles :

$$Y_i \subset Z_{j_i} \subset Y_{i'} \Rightarrow i = i' \text{ et } Y_i = Z_{j_i} \quad .$$

De même, pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , il doit exister  $i_j$  tel que  $Z_j = Y_{i_j}$ .

*q. e. d.*

## II.4 Anneaux de fonctions régulières et morphismes

### Fonctions régulières et rationnelles

**Définition II.4.1** (Anneau des fonctions régulières). Soit  $X \subset \mathbb{K}^n$  un fermé de Zariski. L'anneau des fonctions régulières sur  $X$  est le quotient :

$$R[X] = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \mathcal{I}(X) \quad .$$

On le note aussi  $\mathbb{K}[X]$ .

Un polynôme  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  détermine une application, toujours notée  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow f(x_1, \dots, x_n)$ , de manière univoque, et par restriction une fonction  $f|_X : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Si  $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , alors  $f|_X = g|_X$  si et seulement si  $f - g \in \mathcal{I}(X)$ , c'est-à-dire si et seulement si elles ont la même image dans le quotient  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \mathcal{I}(X)$ . On peut donc interpréter  $R[X]$  comme étant l'anneau des fonctions sur  $X$  qui sont restriction d'une fonction polynomiale.

Notons que  $R[X]$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini, engendrée par les images  $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$  des  $X_i$  dans  $R[X]$ .

**Définition II.4.2.** Soit  $X \subset \mathbb{K}^n$  un fermé *irréductible*. Alors l'idéal  $\mathcal{I}(X)$  est premier, et l'anneau  $R[X]$  est donc intègre. On définit le *corps  $\mathbb{K}(X)$  des fonctions rationnelles sur  $X$*  comme étant le corps des fractions de l'anneau  $R[X]$  :

$$\mathbb{K}(X) = \{(f, g) \in R[X] \times R[X] \mid g \neq 0\} / \sim \quad , \quad \text{où } (f, g) \sim (f', g') \Leftrightarrow f \cdot g' - f' \cdot g = 0 \quad .$$

Comme d'habitude, on note  $\frac{f}{g}$  la classe d'équivalence du couple  $(f, g)$ .

Si  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , notons par  $[f]$  sa classe d'équivalence dans  $R[X]$ ; ainsi, les éléments de  $\mathbb{K}(X)$  sont des classes d'équivalence de couples  $([f], [g])$ , avec  $[f], [g] \in R[X]$ , avec  $[g] \neq 0$ , c'est-à-dire  $g \notin \mathcal{I}(X)$ .

La notation  $\alpha = \frac{[f]}{[g]} \in \mathbb{K}(X)$  indique que l'on a choisi des représentants  $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ; on pose  $U_g = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$ , qui est un ouvert de Zariski de  $X$  non vide. Alors on a une application bien définie  $\frac{f}{g} : U_g \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \rightsquigarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ . On pose :

$$U_\alpha = \bigcup U_g$$

où la réunion se fait sur tous les  $g$  tels que  $\alpha = \frac{[f]}{[g]}$ .  $U_\alpha$  est un ouvert de Zariski de  $X$ , et  $\alpha$  induit une

application bien définie  $\tilde{\alpha} : U_\alpha \rightarrow \mathbb{K}$  : si  $x \in U_\alpha$ ,  $\exists f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tels que  $\alpha = \frac{[f]}{[g]}$  et  $g(x) \neq 0$ , on

pose  $\tilde{\alpha}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ . On vérifie immédiatement que si  $\alpha = \frac{[f']}{[g']}$ , avec  $g'(x) \neq 0$ , alors  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Donc

on déduit de  $\alpha$  une fonction qui est définie sur l'ouvert de Zariski non vide  $U_\alpha$ ; pour ne pas avoir à préciser l'ouvert  $U_\alpha$ , on note :  $\alpha : X \dashrightarrow \mathbb{K}$ . On dit que  $\alpha$  est une fonction rationnelle sur  $X$ .

### Morphismes

**Définition II.4.3** (Morphisme régulier). Soient  $X \subset \mathbb{K}^m$  et  $Y \subset \mathbb{K}^n$  des ensembles algébriques. Un morphisme régulier  $\varphi : X \rightarrow Y$  est une application qui est restriction à  $X$  d'une application  $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $f_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_m]$  qui envoie  $X$  dans  $Y$  :

$$F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n \quad , \quad F(X) \subset Y \quad , \quad \text{et } \varphi = F|_X \quad .$$

**Exemple II.4.4.** (1)  $X = \mathbb{K}$ ,  $Y = V(y^2 - x) \subset \mathbb{K}^2$ ,  $\varphi(t) = (t, t^2)$

(2)  $X \subset \mathbb{K}^n$ ,  $k \leq n$ ,  $\pi_{n,k} : X \rightarrow \mathbb{K}^k$ ,  $\pi_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ .

Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un morphisme régulier, il induit un homomorphisme d'anneaux :

$$\varphi^* : R[Y] \rightarrow R[X] \quad , \quad [f] \rightsquigarrow [f \circ \varphi]$$

où  $[f]$ ,  $[f \circ \varphi]$  désignent la classe de  $f$  dans  $R[Y]$ , respectivement  $R[X]$ , et  $f \circ \varphi$  est la composition  $x \rightsquigarrow \varphi(x)$ ; du fait que  $\varphi(X) \subset Y$  il suit que  $[f \circ \varphi]$  ne dépend que de la classe de  $f$  dans  $R[Y]$ . On vérifie aussi immédiatement que  $\varphi^*$  est un homomorphisme d'anneau

**Proposition II.4.5.** i) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $\psi : Y \rightarrow Z$  sont des morphismes réguliers, alors la composition  $\psi \circ f : X \rightarrow Z$  l'est aussi, et

$$(\psi \circ f)^* = \psi^* \circ f^*$$

ii) Si  $\mathbb{I}_X : X \rightarrow X$  désigne l'identité, alors

$$\mathbb{I}_X^* = \mathbb{I}_{R[X]}$$

iii) Le morphisme régulier  $\varphi : X \rightarrow Y$  est entièrement déterminé par l'homomorphisme d'anneau  $\varphi^* : R[Y] \rightarrow R[X]$ .

iv) Tout homomorphisme d'anneaux  $R[Y] \rightarrow R[X]$  provient d'un morphisme régulier  $X \rightarrow Y$

v) Le morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  admet un inverse si et seulement si l'homomorphisme d'anneaux  $\varphi^* : R[Y] \rightarrow R[X]$  admet un inverse.

*Preuve:* Les propriétés i) et ii) se vérifient immédiatement.

Pour iii), supposons que  $X \subset \mathbb{K}^m$  et  $Y \subset \mathbb{K}^n$  et que  $\varphi$  soit la restriction à  $X$  de  $(f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_m]$ . Appelons  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  les coordonnées sur  $\mathbb{K}^n$ ; alors la classe de  $f_i$  dans  $R[X] = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_m]/\mathcal{I}(X)$ , notée  $\bar{f}_i$  vérifie l'égalité  $\bar{f}_i = \varphi^*(Y_i)$ . Ceci montre comment  $\varphi$  est déterminé par  $\varphi^*$ . Mais aussi cela nous indique comment démontrer iv); en effet, si  $\psi : R[Y] \rightarrow R[X]$  est un homomorphisme d'anneau, l'équation  $\bar{\varphi}_i = \psi(Y_i)$  nous dit comment définir le morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  qui induit  $\psi$ .

Enfin, v) est conséquence immédiate de i) à iv).

*q. e. d.*

On dit que le morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme s'il existe un inverse, c'est-à-dire un morphisme  $\psi : Y \rightarrow X$  tel que  $\psi \circ \varphi = \mathbb{I}_X$  et  $\varphi \circ \psi = \mathbb{I}_Y$ .

La propriété v) de cette proposition peut se répéter sous la forme suivante :

**Corollaire II.4.6.** Le morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme si et seulement si  $\varphi^* : R[Y] \rightarrow R[X]$  est un isomorphisme d'anneaux.

■

**Remarque II.4.7.** Une morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  qui est une bijection n'est pas nécessairement un isomorphisme : par exemple, si  $X = \mathbb{K}$  et  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid y^2 - x^3 = 0\}$ , alors  $\varphi(t) = (t^2, t^3)$  est un morphisme, qui est une bijection sur  $Y$ , mais  $R[X]$  est principal, alors que  $R[Y]$  n'est même pas factoriel.

**Morphismes rationnels** Soit  $X \subset \mathbb{K}^m$  une variété algébrique. Un morphisme rationnel  $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{K}^n$  est un  $n$ -tuple  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , avec  $\varphi_i \in \mathbb{K}(X)$ . Soit  $U_\varphi = \bigcap_{i=1}^n U_{\varphi_i}$ ; alors  $\varphi$  induit une application de  $U_\varphi$  dans  $\mathbb{K}^n$ ; l'image de  $\varphi$  est par définition  $\varphi(U_\varphi)$ .

Si  $Y \subset \mathbb{K}^n$ , un morphisme rationnel de  $X$  dans  $Y$  est un morphisme rationnel  $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{K}^n$  dont l'image est contenue dans  $Y$ . En général, un morphisme rationnel  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  (même s'il est régulier, c'est-à-dire de la forme  $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_m]$ ) n'induit pas un homomorphisme de corps  $\varphi^* : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$  : pour cela, il faut supposer que  $\varphi$  est dominant, c'est-à-dire que l'adhérence de Zariski de l'image de  $\varphi$  est  $Y$  tout entier. En effet, cela assure que si  $[\frac{f}{g}] \in \mathbb{K}(Y)$ , alors  $g$  ne s'annule pas identiquement sur l'image de  $\varphi$ ,

sans quoi  $g$  serait nulle sur  $Y$  ; cela a pour conséquence que la composition  $\frac{f}{g} \circ (\frac{f_1}{g_1}, \dots, \frac{f_n}{g_n})$  définit bien un élément de  $\mathbb{K}(X)$ .

En particulier, si  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  est dominant et  $\psi : Y \dashrightarrow Z$  est un autre morphisme rationnel, la composition  $\psi \circ \varphi : X \dashrightarrow Z$  est définie sur un ouvert de Zariski non vide de  $X$ .

**Définition II.4.8** (Équivalence birationnelle). On dit que le morphisme rationnel dominant  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  est une *équivalence birationnelle* s'il existe un morphisme rationnel dominant  $\psi : Y \dashrightarrow X$  tel que  $\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_X$ ,  $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_Y$ .

**Exemple II.4.9.** Le morphisme  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^2$ ,  $\varphi(t) = (t^2, t^3)$  induit une équivalence birationnelle avec la courbe  $Y = \{(x, y) \mid y^2 - x^3 = 0\}$ , dont l'inverse s'écrit :

$$\psi(x, y) = \frac{y}{x} \quad .$$

## II.5 Anneaux locaux

**Définition II.5.1.** On dit que l'anneau commutatif avec unité  $A$  est *local* s'il possède un et un seul idéal maximal  $\mathfrak{m}_A$ . Dans ce cas,  $A/\mathfrak{m}_A$  est un corps, que l'on appelle corps résiduel.

Soit  $X \subset \mathbb{K}^n$  une variété affine,  $\mathbb{K}(X)$  le corps des fonctions rationnelles sur  $X$ . Si  $x \in X$ , on définit l'anneau local de  $X$  au point  $x$  par :

$$\mathcal{O}_{X,x} = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{K}(X) \mid g(x) \neq 0 \right\}$$

ce qui veut dire que la fraction  $\frac{f}{g}$  possède un représentant tel que  $g(x) \neq 0$ .

**Proposition II.5.2.** *L'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  est local et noethérien.*

*Preuve:* L'idéal  $\mathfrak{m}_x = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0 \right\}$  est maximal, car le quotient  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$  s'identifie à  $\mathbb{K}$  par l'homomorphisme  $\left[ \frac{f}{g} \right] \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ . Si on avait un autre idéal maximal, il devrait contenir une fraction  $\frac{f}{g} \notin \mathfrak{m}_x$ , donc  $f(x) \neq 0$  et alors  $\frac{f}{g}$  est inversible et cet idéal coïncide alors avec l'anneau tout entier. L'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  contient donc bien un seul idéal maximal, dont le corps résiduel s'identifie au corps de base  $\mathbb{K}$ .

Soit  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X,x}$  un idéal; alors  $\mathcal{I} \cap R[X]$  est un idéal de  $R[X]$ , qui est noethérien, donc engendré par  $f_1, \dots, f_r \in R[X] \cap \mathcal{I}$ . Si  $\varphi \in \mathcal{I}$ ,  $\varphi = \frac{f}{g}$  et  $f \in \mathcal{I}$ , donc il existe des  $a_i \in R[X]$  tels que

$$f = \sum_{i=1}^r a_i f_i \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{g} = \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{g} f_i$$

ce qui montre que  $\mathcal{I}$  est engendré par  $f_1, \dots, f_r$ .

*q. e. d.*

**Proposition II.5.3.**

$$R[X] = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$$

*Preuve:* Soit  $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ ,  $\forall x \in X$  et posons

$$\mathcal{A} = \left\{ g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid g \cdot \varphi \in R[X] \right\} \quad .$$

C'est un idéal de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Pour tout  $x \in X$ , on peut écrire  $\varphi = \frac{f_x}{g_x}$  avec  $g_x(x) \neq 0$ , ce qui fait que  $g_x \in \mathcal{A}$  et donc  $x \notin V(\mathcal{A})$ ; il en suit que  $V(\mathcal{A}) \cap X = \emptyset$ . D'autre part, si  $g \in \mathcal{I}(X)$ ,  $g \cdot \varphi = 0 \in R[X]$ , donc  $\mathcal{A} \supset \mathcal{I}(X)$ , et alors  $V(\mathcal{A}) \subset X$ . En conclusion, on doit avoir que  $V(\mathcal{A}) = \emptyset$ , et il suit alors du Nullstellensatz II.2.8 que  $1 \in \mathcal{A}$ , et donc  $\varphi \in R[X]$ .

*q. e. d.*

## II.6 Idéaux définissant des ensembles finis de points

Les résultats de ce paragraphe sont importants pour la démonstration du théorème de Bézout III.7.3.

**Proposition II.6.1.** *Soit  $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  un idéal. Alors  $V(\mathcal{I})$  est un ensemble fini de points si et seulement si :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}) < \infty$$

**Lemme II.6.2.** *Si  $P_1, \dots, P_r \in V(I)$  sont distincts, alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I) \geq r$$

*Preuve:* Choisissons un  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Puisque  $\{P_1, \dots, \widehat{P}_i, \dots, P_r\}$  est algébrique et ne contient pas  $P_i$ , il existe un polynôme  $F_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tel que  $F_i(P_i) \neq 0$ , et  $F_i(P_j) = 0$  pour  $i \neq j$ . Quitte à remplacer  $F_i$  par  $\frac{F_i}{F_i(P_i)}$ , on trouve des polynômes  $F_1, \dots, F_r$  tels que  $F_i(P_j) = \delta_{i,j}$ . Montrons que les images  $[F_i]$  des  $F_i$  dans le quotient  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$  sont linéairement indépendantes. S'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  tels que  $[\sum_{i=1}^r \lambda_i F_i] = 0$ , cela veut dire que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i F_i \in I$ . Supposons qu'il existe  $i_0$  avec  $\lambda_{i_0} \neq 0$ . Alors

$$F_{i_0} = - \sum_{i=1, i \neq i_0}^r \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} F_i + I$$

et on en tire que  $F(P_{i_0}) = 0$ , contradiction.

*q. e. d.*

*Preuve de II.6.1.* Il suit du lemme que si  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I) < \infty$  alors  $V(I)$  est fini.

Pour la réciproque, supposons que  $V(I) = \{P_1, \dots, P_r\}$  et posons

$$P_i = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n) \quad , \quad i = 1, \dots, r \quad .$$

Posons

$$(6-1) \quad F_j(X) = F_j(X_j) = \prod_{i=1}^r (X_j - a_i^j) \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad .$$

Alors  $F_j(P_i) = 0$ ,  $\forall i, \forall j$ . Il suit du Nullstellensatz II.2.8 qu'il existe un entier  $N$  tel que  $F_j^N \in I$ ,  $j = 1, \dots, n$ . En utilisant (6-1), on voit que

$$I \ni F_j^N = X_j^{r \cdot N} + \text{termes de degré plus petit en } X_j \quad \text{mod } I$$

et donc si  $M \geq r \cdot N$ ,  $X_j^M$  est combinaison des  $X_j^s$ ,  $0 \leq s \leq r \cdot N - 1$ , mod  $I$ . Il en suit que  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$  est engendré sur  $\mathbb{K}$  par les  $\{X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}, 0 \leq m_i \leq r \cdot N - 1\}$ .

*q. e. d.*

**Proposition II.6.3.** *Soit  $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tel que  $V(\mathcal{I}) = \{P_1, \dots, P_r\}$  est fini. Alors l'homomorphisme naturel d'anneaux :*

$$\theta : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I} \longrightarrow \prod_{i=1, \dots, r} \mathcal{O}_{P_i}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{P_i}$$

*qui à  $\overline{\varphi} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$  associe le  $r$ -tuple de ses images dans  $\mathcal{O}_{P_i}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{P_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , est un isomorphisme.*

*Preuve:* Tout d'abord, identifions les idéaux maximaux de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$ . Considérons la projection canonique  $\pi : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$ ;  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$  est un idéal maximal si et seulement si  $\mathfrak{m} = \pi(\mathfrak{m}')$  où  $\mathfrak{m}'$  est un idéal maximal de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  qui contient  $\mathcal{I}$ , ce qui fait que  $\mathfrak{m}'$  est de la forme  $\mathcal{I}(P_i)$ , pour un des  $i = 1, \dots, r$ .

$\theta$  est injective :

Soit  $\varphi \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  un représentant de  $\bar{\varphi} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$  et supposons que  $\theta(\bar{\varphi}) = 0$ . Si  $\bar{\theta} \neq 0$ , l'idéal :

$$\mathcal{A} = \{\bar{\psi} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I} \mid \bar{\psi} \cdot \bar{\varphi} = 0\}$$

n'est pas  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$  tout entier et il est donc contenu dans un idéal maximal, de la forme  $\mathfrak{m} = \pi(\mathcal{I}(P_i))$ , pour un certain  $i_0$ . Mais puisque  $\theta(\bar{\varphi}) = 0$ , l'image de  $\bar{\varphi}$  dans  $\mathcal{O}_{P_{i_0}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{P_{i_0}}$  est nulle, donc  $\bar{\varphi} = \gamma \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ , avec  $\gamma \in \mathcal{I}$  et  $\beta(P_{i_0}) \neq 0$ . Donc  $\varphi \cdot \beta = \gamma \cdot \alpha \in \mathcal{I}$ , mais  $\beta(P_{i_0}) \neq 0$ , donc  $\bar{\beta} \notin \mathfrak{m}$ , contradiction.

$\theta$  est surjective :

Comme dans la preuve du lemme II.6.2, on trouve des polynômes  $F_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tels que  $F_i(P_j) = \delta_{i,j}$ . Posons  $\mathfrak{m}_i = \mathcal{I}(P_i)$ ; alors  $\mathfrak{m}_i \cdot F_i \subset \mathcal{I}(V(\mathcal{I}))$  et il suit du Nullstellensatz II.2.8 qu'il existe un entier  $d$  tel que  $(\mathfrak{m}_i \cdot F_i)^d \subset \mathcal{I}$ ,  $\forall i = 1, \dots, r$ . Il en suit que

$$(\mathfrak{m}_i \cdot \mathcal{O}_{P_i})^d \subset \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{P_i}$$

car si  $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathfrak{m}_i \cdot \mathcal{O}_{P_i}$ , alors  $\varphi_j \cdot F_i \in \mathfrak{m}_i \cdot \mathcal{O}_{P_i}$ , donc

$$\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_r \cdot F_i^d \in (\mathfrak{m}_i \cdot F_i)^d \cdot \mathcal{O}_{P_i} \subset \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{P_i} \Rightarrow \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_r \in \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{P_i} \text{ car } F_i(P_i) = 1 \quad .$$

Or  $(1 - F_i)^d \in (\mathfrak{m}_i \cdot \mathcal{O}_{P_i})^d \subset \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{P_i}$  et donc :

$$(6-2) \quad G_i = 1 - (1 - F_i)^d \equiv 1 \pmod{\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{P_i}} \quad .$$

On peut factoriser comme suit l'homomorphisme  $\theta$  :

$$\theta : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I} \xrightarrow{\theta_1} \prod_{i=1, \dots, r} \mathcal{O}_{P_i}/\mathfrak{m}_i^d \cdot \mathcal{O}_{P_i} \xrightarrow{p} \prod_{i=1, \dots, r} \mathcal{O}_{P_i}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{P_i}$$

et comme  $p$  est surjective, il suffit de montrer que  $\theta_1$  est surjective. Remarquons que si  $\bar{s}_i = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{O}_{P_i}/\mathfrak{m}_i\mathcal{O}_{P_i}$ , on peut supposer que  $\beta(P_i) = 1$  et on peut écrire :

$$\bar{s}_i = \frac{\alpha}{1 - (1 - \beta)} \equiv \alpha \cdot (1 + (1 - \beta) + \dots + (1 - \beta)^{d-1}) \pmod{\mathfrak{m}_i^d \cdot \mathcal{O}_{P_i}}$$

ce qui fait que l'on peut toujours trouver un représentant  $s_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  de  $\bar{s}_i$ . Donc si  $(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_r) \in \prod_{i=1, \dots, r} \mathcal{O}_{P_i}/\mathfrak{m}_i\mathcal{O}_{P_i}$  et  $s_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  est un représentant de  $\bar{s}_i$ , on pose

$$s = \sum_{i=1}^r G_i \cdot s_i$$

et il suit de (6-2) que  $\theta_1(s) = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_r)$

*q. e. d.*

## II.7 Extensions d'anneaux

Tous nos anneaux sont commutatif et munis d'une unité. Une *extension d'anneaux* est une inclusion d'anneaux :  $R \subset S$ .

**Définition II.7.1.** On dit qu'une extension  $R \subset S$  est de *type fini* s'il existe  $v_1, \dots, v_n \in S$  tels que l'homomorphisme d'anneaux  $\varphi : R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow S$ , défini par  $\varphi(X_i) = v_i$ , est surjectif.

Autrement dit, tout élément  $s \in S$  s'écrit sous la forme :

$$s = \sum_{\text{finie}} r_\alpha \cdot v^\alpha \quad , \quad r_\alpha \in R \quad , \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

mais cette écriture n'est pas unique.

On dit que l'extension  $S$  est engendrée par  $v_1, \dots, v_n$  et on écrit  $S = R[v_1, \dots, v_n]$ .

**Remarques II.7.2.**

- (1) Si  $R \subset S$  et  $S$  est un module de type fini sur  $R$ , c'est aussi une extension de type fini.
- (2) Si  $R \subset S \subset T$  sont des anneaux et  $T$  est un  $S$ -module de type fini, et que  $S$  est un  $R$ -module de type fini, alors  $T$  est un  $R$ -module de type fini. Plus précisément, si  $t_1, \dots, t_n$  engendrent  $T$  en tant que  $S$ -module, et  $s_1, \dots, s_m$  engendrent  $S$  en tant que  $R$ -module, alors les  $s_i \cdot t_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  engendrent  $T$  en tant que  $R$ -module; en effet, si  $t \in T$  :

$$t = \sum_{j=1}^n a_j \cdot t_j \quad , \quad a_j = \sum_{i=1}^m b_{i,j} s_i \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad \implies \quad t = \sum_{i,j} b_{i,j} \cdot s_i \cdot t_j$$

- (3) Si  $R \subset S \subset T$  et  $T = S[w_1, \dots, w_n]$  est une extension de type fini de  $S$  et  $S = R[v_1, \dots, v_m]$  est une extension de type fini de  $R$ , alors  $T = R[v_i \cdot w_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n]$  et donc  $T$  est une extension de type fini de  $R$ .

**Exemples II.7.3.** (1) Si  $A$  est un anneau,  $A[X]$  est une extension de type fini, mais pas un module de type fini.

(2) Le quotient  $A[X]/\langle X^2 \rangle$  est un module de type fini sur  $A$

(3) L'extension  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  n'est pas de type fini.

**Définition II.7.4.** Soit  $R \subset S$  une extension d'anneaux. On dit que  $v \in S$  est *entier sur  $R$*  s'il existe  $a_1, \dots, a_n \in R$  tels que :

$$v^n + a_1 \cdot v^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad .$$

On dit que l'extension  $R \subset S$  est *entière* si tout élément de  $S$  est entier sur  $R$ .

**Remarque II.7.5.** Dans le cas d'une extension de corps  $K \subset L$ , dire que  $v \in L$  est entier sur  $K$  équivaut à dire que  $v$  est algébrique sur  $K$ , voir II.8.1

**Exemples II.7.6.** (1) Dans l'extension  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ , l'élément  $i = \sqrt{-1}$  vérifie l'équation  $i^2 + 1 = 0$ , il est donc entier sur  $\mathbb{Z}$ .

- (2) Soient  $X, Y$  des variétés affines sur le corps  $K$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application polynomiale surjective. Alors  $f^* : K[Y] \rightarrow K[X]$  est injective, ce qui permet de regarder l'anneau  $K[X]$  comme une extension de  $K[Y]$ . Si cette extension est entière, alors  $f^{-1}(b)$  est un ensemble fini pour tout  $b \in Y$ . En effet, supposons que  $Y \subset K^N$ ; les projections  $y_i : Y \rightarrow K$ ,  $i = 1, \dots, N$  sont dans  $K[Y]$ , et  $f^*(y_i) = f_i(x)$  doit satisfaire une équation de la forme :

$$f_i(x)^{n_i} + a_1^i(x) \cdot f_i(x)^{n_i-1} + \dots + a_{n_i}^i = 0$$

et il n'y a donc qu'un nombre fini possible de solution de l'équation  $f_i(x) = b_i$ , ceci pour  $i = 1, \dots, N$ .

**Définition II.7.7.** Soit  $R$  un anneau *intègre* et soit  $Q_R$  son corps des fractions. On dit que  $R$  est *intégralement clos* si l'extension  $R \subset Q_R$  est entière.

**Exemples II.7.8.** (1)  $\mathbb{Z}$  est intégralement clos. En effet, si  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux, d'une relation du type :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

en déduirait que

$$p^n + a_1 \cdot p^{n-1}q + \dots + a_n \cdot q^n = 0$$

d'où on déduirait que  $q$  devrait diviser  $p$ .

Le même type d'argument s'applique plus généralement à tout anneau factoriel, comme par exemple  $K[X_1, \dots, X_n]$ .

- (2) L'anneau  $R = K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$  n'est pas intégralement clos. En effet,  $\frac{Y}{X} \in Q_R \setminus R$  et  $(\frac{Y}{X})^2 = \frac{Y^2}{X^2} = \frac{X^3}{X^2} = X$ , donc  $\frac{Y}{X}$  est entier sur  $R$ .

**Proposition II.7.9.** *Soit  $R \subset S$  une extension d'anneaux et  $v \in S$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $v$  est entier sur  $R$
- (2)  $R[v]$  est un module de type fini sur  $R$ .
- (3) Il existe un anneau  $R'$  tel que  $R[v] \subset R' \subset S$  et  $R'$  est un module de type fini sur  $R$ .

*Preuve:* Il est clair que 1)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  3).

Montrons que 3)  $\Rightarrow$  1). Soient  $w'_1, \dots, w'_n \in R'$  des générateurs de  $R'$  en tant que  $R$ -module. Puisque  $v \cdot w'_i \in R'$ ,  $i = 1, \dots, n$ , il existe  $a_{i,j} \in R$  tels que :

$$v \cdot w'_i = \sum_{j=1, \dots, n} a_{i,j} \cdot w'_j \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\sum_{j=1, \dots, n} (\delta_{i,j} - a_{i,j}) \cdot w'_j = 0$$

d'où on déduit que

$$\det(\delta_{i,j} - a_{i,j})_{i,j=1, \dots, n} = v^n + a_1 \cdot v^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad , \quad a_i \in R$$

et donc  $v$  est bien entier sur  $R$ .

*q. e. d.*

**Corollaire II.7.10.** *Soit  $A \subset B$  une extension d'anneaux et  $x_1, \dots, x_n \in A$ . Alors :*

les  $x_i$  sont entiers sur  $A \iff A[x_1, \dots, x_n]$  est un  $A$ -module de type fini

*Preuve:* Supposons que les  $x_1, \dots, x_n$  soient entiers sur  $A$ . Alors il suit de II.7.9(2) que  $A[x_1]$  est un  $A$ -module de type fini. Puisque  $x_2$  est entier sur  $A$ , il est à fortiori entier sur  $A[x_1]$ , donc  $A[x_1, x_2]$  est un  $A[x_1]$ -module de type fini; il suit alors de la remarque II.7.2(2) que  $A[x_1, x_2]$  est un  $A$ -module de type fini; en continuant ainsi, on voit que  $A[x_1, \dots, x_n]$  est un  $A$ -module de type fini.

La réciproque suit de II.7.9(3).

*q. e. d.*

**Corollaire II.7.11.** *Soit  $A \subset B$  une extension d'anneaux. Alors*

$$\overline{A} = \{v \in B \mid v \text{ est entier sur } A\}$$

*est un sous-anneau de  $B$ . On l'appelle clôture intégrale de  $A$  dans  $B$ .*

*Preuve:* Si  $v, w \in \overline{A}$ , il suit du corollaire précédent que  $A[v, w] \subset B$  est un  $A$ -module de type fini, d'où il suit par II.7.9(3) que  $v + w$  et  $v \cdot w$  sont aussi entiers sur  $A$ .

*q. e. d.*

**Corollaire II.7.12.** *Soient  $A \subset B \subset C$  des extensions d'anneaux. Si  $C$  est entier sur  $B$  et que  $B$  est entier sur  $A$ , alors  $C$  est entier sur  $A$ .*

*Preuve:* Si  $v \in C$ , il est entier sur  $B$ ; il existe donc  $b_1, \dots, b_n \in B$  tels que :

$$(7-1) \quad v^n + b_1 \cdot b^{n-1} + \dots + b_n = 0 \quad .$$

Soit  $B' = A[b_1, \dots, b_n]$ ; puisque les  $b_i$  sont entiers sur  $A$ , il suit de II.7.10 que  $B'$  est un  $A$ -module de type fini. Il suit de (7-1) que  $v$  est entier sur  $B'$ , donc  $B'[v]$  est un  $B'$ -module de type fini; il suit alors de II.7.2(2) que  $B'[v]$  est un  $A$ -module de type fini, et de II.7.9(3) que  $v$  est entier sur  $A$ .

*q. e. d.*

**Définition II.7.13.** Soit  $A \subset B$  une extension d'anneaux. On dit que  $A$  est *intégralement clos dans  $B$*  si :

$$v \in B, v \text{ entier sur } A \implies v \in A \quad .$$

Rappelons (II.7.7) que si  $A$  est intègre (i.e.  $v \cdot w = 0 \implies v = 0$  ou bien  $w = 0$ ), alors on peut définir son corps des quotients  $Q_A$ ; on dit que  $A$  est *intégralement clos* (sans plus) s'il est intégralement clos dans  $Q_A$ .

**Corollaire II.7.14.** Soit  $A \subset B$  une extension. Alors le sous-anneau

$$\bar{A} = \{v \in B \mid v \text{ est entier sur } A\}$$

est *intégralement clos dans  $B$* .

*Preuve:* Si  $v \in B$  est entier sur  $\bar{A}$ ,  $\bar{A}[v]$  est entier sur  $\bar{A}$ , qui est entier sur  $A$ , donc par le corollaire précédent  $\bar{A}[v]$  est entier sur  $A$ .

*q. e. d.*

## II.8 Extensions de corps

Dans ce § nous établissons quelques résultats sur la théorie des extensions des corps, qui seront utiles pour la notion de dimension d'une variété. Pour simplifier l'exposition, nous supposons que tous les corps sont de caractéristique nulle.

### II.8.1 Rappels

Soit  $K \subset L$  une extension de corps,  $\alpha \in L$ . On dénote par  $K[\alpha]$  le sous-anneau engendré par  $K$  et  $\alpha$ , et par  $K(\alpha)$  le sous-corps engendré par  $K$  et  $\alpha$ .

On a une surjection  $\varphi : K[X] \twoheadrightarrow K[\alpha]$ , déterminée en posant  $\varphi(X) = \alpha$ . Deux cas sont possibles :

$\varphi$  est injective Cela signifie que  $\alpha$  n'est racine d'aucun polynôme à coefficients dans  $K$ , sauf le polynôme identiquement nul. Dans ce cas on dit que  $\alpha$  est transcendant sur  $L$ .

$\varphi$  n'est pas injective Dans ce cas son noyau est un idéal, qui est de la forme  $\text{Ker}(\alpha) = \langle f \rangle$ , avec  $f \in K[X] \setminus \{0\}$ , car  $K[X]$  est un anneau principal. Ainsi  $\alpha$  est racine de  $f : f(\alpha) = 0$  et  $f$  est le polynôme non nul de plus petit degré qui admet  $\alpha$  comme racine; on dit que c'est le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $K$  et que  $\alpha$  est algébrique sur  $K$ . Notons que dans ce cas  $K[\alpha] \simeq K[X]/\langle f \rangle$  est un corps, donc  $K[\alpha] = K(\alpha)$ .

Si dans une extension  $K \subset L$  tous les éléments de  $L$  sont algébriques sur  $K$ , on dit que c'est une extension algébrique.

### II.8.2 Base de transcendance

**Définition II.8.1.** Soit  $K \subset L$  une extension de corps,  $S \subset L$  un sous-ensemble. On dit que  $S$  est *algébriquement libre sur  $K$*  si :

$$\forall a_1, \dots, a_n \in S \text{ et } f \in K[X_1, \dots, X_n] \quad , \quad f(a_1, \dots, a_n) = 0 \implies f \equiv 0 \quad .$$

**Définition II.8.2.** Soit  $K \subset L$  une extension de corps et  $S \subset L$  un sous-ensemble algébriquement libre sur  $K$  maximal, c'est-à-dire tel que si  $x \in L \setminus S$ , alors  $S' = S \cup \{x\}$  n'est pas algébriquement libre sur  $K$ . On dit que  $S$  est une *base de transcendance de  $L$  sur  $K$* . Si un tel ensemble  $S$  est vide,  $L$  est une extension algébrique de  $K$ .

**Proposition II.8.3.** Soit  $K \subset L$  une extension de corps. Alors il existe une base de transcendance  $S \subset L$  de  $L$  sur  $K$ , et  $L$  est algébrique sur le corps engendré par  $K$  et  $S$ , noté  $K(S)$ .

*Preuve:* Pour montrer l'existence d'une base de transcendance, on doit recourir au lemme de Zorn. On considère l'ensemble  $\mathcal{S}$  des sous-ensembles  $S \subset L$  algébriquement libres sur  $K$ , ordonnés par l'inclusion. Si  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$  est un sous-ensemble totalement ordonné,  $\cup_{S \in \mathcal{K}} S$  est encore un élément de  $\mathcal{S}$ ; il suit alors du lemme de Zorn que  $\mathcal{S}$  possède un élément maximal, qui est évidemment une base de transcendance.

Soit  $S$  une base de transcendance de  $L$  sur  $K$  et soit  $x \in L \setminus K(S)$ . Alors  $S \cup \{x\}$  n'est pas algébriquement libre sur  $K$ ; il existe donc  $x_2, \dots, x_n \in S$  et  $P \in K[X_1, \dots, X_n]$  tel que  $P \neq 0$  mais  $P(x, x_2, \dots, x_n) = 0$ . On ne peut avoir que  $P \in K[X_2, \dots, X_n]$  car  $x_2, \dots, x_n$  sont algébriquement indépendants sur  $K$ . On a donc :

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^d a_i(X_2, \dots, X_n) \cdot X_1^i \quad ,$$

$$\text{et si } q(X) = \sum_{i=0}^d a_i(x_2, \dots, x_n) \cdot X^i \in K(x_2, \dots, x_n)[X] \quad , \quad q(X) \neq 0 \text{ mais } q(x) = 0$$

donc  $x$  est algébrique sur  $K(x_2, \dots, x_n) \subset K(S)$ .

*q. e. d.*

**Remarque II.8.4.** Si on a une extension de corps  $K \subset L$  et  $S \subset L$  est algébriquement libre sur  $L$  et que  $L$  est algébrique sur  $K(S)$ , alors  $S$  est une base de transcendance de  $L$  sur  $K$ . En effet, si  $x \in L \setminus S$ ,  $x$  est algébrique sur  $K(S)$  et il existe donc un polynôme  $q(X) \neq 0$  de la forme :

$$q(X) = \sum_{i=0}^d a_i(s_1, \dots, s_n) X^i \quad , \quad a_i \in K(S_1, \dots, S_n)$$

tel que  $q(x) = 0$ . Si  $a_i = \frac{b_i}{c_i}$ ,  $b_i, c_i \in K[S_1, \dots, S_n]$ ,  $i = 0, \dots, d$ , posons  $c = c_1 \cdot \dots \cdot c_n$ , de sorte que

$$f(S_1, \dots, S_n, X) = \sum_{i=0}^d (c(S_1, \dots, S_n) \cdot a_i(S_1, \dots, S_n) X^i$$

est un élément de  $K[S_1, \dots, S_n, X] \setminus \{0\}$ , et  $f(s_1, \dots, s_n, x) = 0$ , ce qui montre que  $S \cup \{x\}$  n'est pas algébriquement libre sur  $K$ , et donc que  $S$  est maximal, donc une base de transcendance.

Dans le cas où  $L = K(S)$ , on dit que  $L$  est une extension *transcendante pure* de  $K$ . On peut toujours décomposer l'extension  $K \subset L$  en  $K \subset K(S) \subset L$ , où  $K \subset K(S)$  est transcendante pure, et  $K(S) \subset L$  est algébrique.

**Définition II.8.5.** Soit  $K \subset L$  une extension de corps et  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  une base de transcendance de  $L$  sur  $K$ . On appelle  $n$  le *degré de transcendance de  $L$  sur  $K$* . Pour que cette définition ait un sens, il faudrait montrer que  $n$  ne dépend pas de la base de transcendance choisie; c'est ce que nous verrons par la suite (voir II.8.15).

**Exemples II.8.6.** (1) L'extension  $K \subset K(X_1, \dots, X_n)$  est transcendante pure, de degré de transcendance  $n$ .

(2) Soit  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  irréductible. On a une suite d'extensions :

$$K \subset K[X_1, \dots, X_n] / \langle F \rangle \subset K(V(F)) = K(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$$

où on rappelle que  $K(V(F))$  est le corps des fonctions rationnelles sur  $V(F)$ , c'est-à-dire le corps des fractions de l'anneau intègre  $K[X_1, \dots, X_n] / \langle F \rangle$ ; on a noté par  $\overline{X}_i$  les images des fonctions  $X_i$  dans  $K(V(F))$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Si on choisit comme axe de la coordonnée  $X_1$  une droite sur laquelle  $F$  n'est pas identiquement nulle, on aura  $F(X_1, 0, \dots, 0) \neq 0$ . On va montrer que, avec ce choix de  $X_1$ , les  $\overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n$  sont une

base de transcendance de  $K(V(F))$  sur  $K$  : si  $G \in K[X_2, \dots, X_n]$  et  $G(\overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n) = \left[ \frac{\alpha}{\beta} \right] = 0 \in K(V(F))$ ,  $\alpha, \beta \in K[X_1, \dots, X_n]$ , cela signifie que  $\alpha \in \langle F \rangle$ , et donc  $G(X_2, \dots, X_n) = H(X_1, \dots, X_n) \cdot F(X_1, \dots, X_n)$ . Comme  $F(X_1, 0, \dots, 0) \neq 0$ , on en déduit que  $H \equiv 0$ , et donc  $\overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n$  sont algébriquement libres sur  $K$ . D'autre part,  $F(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n) = 0$ , donc  $K(V(F))$  est algébrique sur  $K(\overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n)$ . En conclusion, le degré de transcendance de  $K(V(F))$  sur  $K$  est  $n - 1$ .

### II.8.3 Le lemme de normalisation de Noether

**Théorème II.8.7.** *Soit  $\mathbb{K}$  un corps, que l'on suppose infini. Soit  $A \neq 0$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre de génération finie sur  $\mathbb{K}$  : il existe  $x_1, \dots, x_n \in A$  tels que  $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Alors il existe des éléments  $y_1, \dots, y_r \in A$  qui sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{K}$  et tels que  $A$  soit entière sur  $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_r]$ . De plus, on peut choisir les  $y_1, \dots, y_r$  comme combinaisons  $\mathbb{K}$ -linéaires des  $x_1, \dots, x_n$ .*

*Preuve:* Quitte à renuméroter les  $x_1, \dots, x_n$ , on peut supposer que  $x_1, \dots, x_r$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{K}$ , et que  $x_{r+1}, \dots, x_n$  sont algébriques sur  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ .

On procède par induction sur  $n$ . Si  $n = r$ , il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer que  $n > r$  et que le résultat est vrai pour les  $\mathbb{K}$ -algèbres avec  $n - 1$  générateurs. Le générateur  $x_n$  est algébrique sur  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ ; soit donc  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}][X_n]$  son polynôme minimal, que l'on peut regarder comme polynôme en  $x_1, \dots, x_n$ . Soit  $F(x_1, \dots, x_n)$  la partie homogène de degré maximale de  $f$ ; comme  $\mathbb{K}$  est infini, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$  tels que  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$ . Posons

$$x'_i = x_i - \lambda_i \cdot x_n \quad , \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad .$$

Supposons que  $F$  soit de degré  $d$  et soit  $x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$  un monôme apparaissant dans  $F$ ; en termes des  $x'_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , il s'écrit :

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdot x_n^{\alpha_n} = (x'_1 + \lambda_1 \cdot x_n)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x'_{n-1} + \lambda_{n-1} \cdot x_n)^{\alpha_{n-1}} \cdot x_n^{\alpha_n} = \lambda_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdot x_n^d + \rho$$

où  $\rho$  est un polynôme en  $x'_1, \dots, x'_{n-1}, x_n$  de degré strictement inférieur à  $d$  en  $x_n$ . On en déduit que

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n^d \cdot \underbrace{F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)}_{\neq 0} + x_n^{d-1} \cdot a_1(x'_1, \dots, x'_{n-1}) + \dots + a_d(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = 0$$

et donc  $x_n$  est entier sur l'anneau  $A' = \mathbb{K}[x'_1, \dots, x'_{n-1}]$ . Il en suit que l'anneau  $A$  est entier sur  $A'$ ; par hypothèse d'induction, il existe des combinaisons linéaires  $y_1, \dots, y_r$  des  $x'_1, \dots, x'_{n-1}$  (qui sont finalement des combinaisons linéaires des  $x_1, \dots, x_n$ ), telles que les  $y_1, \dots, y_r$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{K}$  et que  $A'$  soit entier sur  $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_r]$ ; puisque  $A$  est entier sur  $A'$ , il est aussi entier sur  $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_r]$ .  
*q. e. d.*

### II.8.4 Une preuve du Nullstellensatz

On suppose que le corps  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, ce qui implique en passant qu'il est infini. Une conséquence du Nullstellensatz II.2.8 est ce qu'on appelle sa forme faible : si  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  n'ont pas de zéros en commun, alors l'idéal qu'ils engendrent est  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tout entier; en effet, si  $V(f_1, \dots, f_k) = \emptyset$ , le polynôme constant 1 s'annule sur  $V(f_1, \dots, f_k)$ , donc d'après II.2.8  $1 \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ .

Nous allons démontrer la forme faible du Nullstellensatz comme conséquence du lemme de normalisation de Noether, puis déduire la forme forte du Nullstellensatz de la forme faible en utilisant le "Rabinowitsch's trick", ce qui se traduit par "le tour de passe-passe de Rabinowitsch" (voir [4]). Mais d'abord un lemme :

**Lemme II.8.8.** *Soit  $L$  un corps,  $A \subset L$  un sous-anneau et supposons que  $L$  soit entier sur  $A$ . Alors  $A$  est un corps.*

*Preuve:* Soit  $a \in A$ ,  $a \neq 0$ . Alors  $a^{-1} \in L$  est entier sur  $A$ , donc satisfait une équation du type :

$$a^{-n} + a^{-(n-1)} \cdot a_1 + \dots + a_n = 0 \quad , \quad a_1, \dots, a_n \in A$$

d'où on tire, en multipliant par  $a^{n-1}$  :

$$a^{-1} = -a_1 - \dots - a^{n-2} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a^{n-1}$$

et donc  $a^{-1} \in A$ .

*q. e. d.*

**Théorème II.8.9** (Forme faible du Nullstellensatz). *Soient  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Si l'ensemble  $V(f_1, \dots, f_k)$  des zéros communs aux  $f_i$  est vide, alors il existe  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tels que*

$$a_1 \cdot f_1 + \dots + a_k \cdot f_k = 1 \quad .$$

*Preuve:* Supposons que l'idéal  $\langle f_1, \dots, f_k \rangle$  engendré par  $f_1, \dots, f_k$  ne soit pas  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tout entier. Alors il est contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et il suffit de montrer que  $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ , puisque  $V(\mathfrak{m}) \subset V(f_1, \dots, f_k)$ . Puisque  $\mathfrak{m}$  est maximal, le quotient  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  est un corps; on notera  $x_1, \dots, x_n$  les images des  $X_i$  dans  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$ . On applique le lemme de normalisation II.8.7, et alors, quitte à renuméroter les  $X_i$ , le corps  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  est entier sur  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$  et les  $x_1, \dots, x_r$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{K}$ , pour un certain  $r \leq n$ . Alors, d'après le lemme précédent,  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$  est aussi un corps, donc la seule possibilité est que  $r = 0$  et que  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r] = \mathbb{K}$ . Donc  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  est une extension algébrique finie de  $\mathbb{K}$ , qui est algébriquement clos, donc l'inclusion naturelle  $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  est un isomorphisme. Si on appelle  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  les éléments qui correspondent aux classes des  $X_i$ , les images des  $X_i - a_i$  par le passage au quotient :

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$$

sont nulles,  $i = 1, \dots, n$ , donc on a l'inclusion

$$\mathfrak{m}' = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle \subset \mathfrak{m}$$

mais l'idéal  $\mathfrak{m}'$  est aussi maximal, puisque  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}' = \mathbb{K}$ . Il en suit que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ , et donc  $V(\mathfrak{m}) = \{(a_1, \dots, a_n)\} \neq \emptyset$ .

*q. e. d.*

*Preuve du Nullstellensatz fort II.2.8* Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  un idéal,  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  des générateurs de cet idéal. Supposons que  $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  s'annule sur les zéros communs aux  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Construisons un nouvel idéal  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$  :

$$\mathcal{B} = \langle f_1, \dots, f_r, f \cdot x_{n+1} - 1 \rangle \quad .$$

On voit que  $V(\mathcal{B}) = \emptyset$ , donc d'après le Nullstellensatz faible on peut trouver  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  et  $B$  dans  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n+1}]$  tels que :

$$(8-1) \quad \sum_{i=1}^r A_i \cdot f_i + 0 = 1 \quad .$$

On travaille maintenant dans  $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_{n+1})$ ; on substitue  $X_{n+1}$  par  $\frac{1}{f}$  dans (8-1) et on obtient une expression de la forme :

$$\sum_{i=1}^r \frac{A'_i(X_1, \dots, X_n)}{f^{n_i}} = 1$$

et en la multipliant par  $f^N$  avec  $N$  suffisamment grand pour chasser tous les dénominateurs, on obtient une expression de la forme :

$$\sum_{i=1}^r A''_i(X_1, \dots, X_n) = f^N$$

avec  $A''_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .

*q. e. d.*

### II.8.5 Dérivations

**Définition II.8.10.** Soit  $R \subset S$  une inclusion d'anneaux commutatifs avec unité. Une application  $D : R \rightarrow S$  est appelée *dérivation* de  $R$  dans  $S$  si :

- (1)  $D(a + b) = D(a) + D(b)$
- (2)  $D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$

**Exemple II.8.11.** Voici l'exemple dont s'inspire en fait la notion algébrique de dérivation que l'on vient de définir : on prend  $R = S = K[X_1, \dots, X_n]$ . On définit la dérivation  $\frac{\partial}{\partial X_i}$  en posant

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(X_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot X_n^{\alpha_n}) = \alpha_i \cdot X_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot X_i^{\alpha_i-1} \cdot \dots \cdot X_n^{\alpha_n}$$

que l'on étend par linéarité à tous les polynômes.

Remarquons que si  $D_1, D_2 : R \rightarrow S$  sont des dérivations et  $c \in S$ , alors  $D_1 + D_2$  et  $c \cdot D_1$  sont aussi des dérivations.

**Lemme II.8.12.** Soit  $R$  un anneau (intègre) contenu dans un corps  $L : R \subset L$ . Soit  $D : R \rightarrow L$  une dérivation. Alors il existe une unique dérivation  $\tilde{D} : Q_R \rightarrow L$  qui étend  $D$ , où  $Q_R$  désigne le corps des fractions de l'anneau intègre  $R$ .

*Preuve:* Si on a pu trouver une extension  $\tilde{D}$ , on doit avoir :

$$\begin{aligned} \forall a \in R, b \in R \setminus \{0\} \quad , \quad \tilde{D}\left(\frac{a}{b}\right) &= \tilde{D}\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \tilde{D}\left(\frac{a}{b}\right)b + \tilde{D}(b) \cdot \frac{a}{b} \\ &\Rightarrow \tilde{D}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{b^2}(\tilde{D}(a) \cdot b - \tilde{D}(b) \cdot a) = \frac{1}{b^2}(D(a) \cdot b - a \cdot D(b)) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'extension est unique. Cette même formule permet de définir  $\tilde{D}$ . On pose

$$\tilde{D}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{b^2}(D(a) \cdot b - a \cdot D(b))$$

et on vérifie tout d'abord que cette définition est cohérente : si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , alors

$$D(a \cdot d - b \cdot c) = D(a) \cdot d + a \cdot D(d) - D(b) \cdot c - b \cdot D(c) = 0 \Rightarrow D(c) = \frac{1}{b}(D(a) \cdot d + a \cdot D(d) - D(b) \cdot c)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{D(c) \cdot d - c \cdot D(d)}{d^2} = \frac{1}{b}\left(D(a) + \frac{a}{d}D(d) - D(b)\frac{c}{d}\right) - c\frac{D(d)}{d^2} = \frac{D(a) \cdot b - a \cdot D(b)}{b^2} - D(d) \cdot \overbrace{\frac{ad - bc}{bd^2}}^{=0}$$

ce qui montre que la définition de  $\tilde{D}$  est cohérente. On peut encore vérifier par le calcul que  $\tilde{D}$  vérifie les conditions (1) et (2) de la définition II.8.10.

**Proposition II.8.13.** Soient  $K \subset F \subset L$  des corps et supposons que  $F = K[\alpha]$ . Alors toute dérivation  $D : K \rightarrow L$  admet une et une seule extension  $\tilde{D} : F \rightarrow L$ .

*Preuve:* Soit  $f(X) \in K[X]$  le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $K$ ; alors  $f(\alpha) = 0$ , mais  $f'(\alpha) \neq 0$ , sans quoi on aurait  $f'(X) \equiv 0$ , ce qui n'est possible sur un corps de caractéristique nulle que si  $f(X) \equiv 0$ . Supposons que  $\tilde{D} : F \rightarrow L$  soit une extension de  $D : K \rightarrow L$ . Posons  $f(X) = \sum a_i X^i$ ; alors  $f(\alpha) = 0 = \sum a_i \alpha^i$  et en appliquant  $\tilde{D}$  on obtient :

$$\tilde{D}(\alpha) = \sum a_i \cdot i \cdot \alpha^{i-1} \tilde{D}(\alpha) + \sum D(a_i) \cdot \alpha^i = \tilde{D}(\alpha) \cdot f'(\alpha) + \sum D(a_i) \cdot \alpha^i = 0$$

d'où l'on tire que :

$$\tilde{D}(\alpha) = -\frac{\sum D(a_i)\alpha^i}{f'(\alpha)}$$

ce qui montre que  $\tilde{D}$  est entièrement déterminé par  $D$ , et nous suggère de définir  $\tilde{D}$  de la manière suivante; on pose :

$$u = -\frac{\sum D(a_i)\alpha^i}{f'(\alpha)} \in F$$

et on définit d'abord

$$\hat{D} : K[X] \rightarrow L \quad , \quad \hat{D}\left(\sum b_i X^i\right) = \sum D(b_i)\alpha^i + \left(\sum b_i \cdot i \cdot \alpha^{i-1}\right) \cdot u$$

Puisque  $\sum b_i X^i \mapsto \sum D(b_i)\alpha^i$  est une dérivation et  $\sum b_i X^i \mapsto u \cdot \left(\sum b_i \cdot i \cdot \alpha^{i-1}\right)$  aussi, on en déduit que  $\hat{D}$  est une dérivation. D'autre part :

$$\begin{aligned} \hat{D}(h(X) \cdot f(X)) &= \hat{D}(h(X)) \cdot \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + h(\alpha) \cdot \hat{D}(f) \quad , \\ &\Rightarrow \hat{D}(h(X) \cdot f(X)) = 0 \end{aligned}$$

et on déduit de là que  $\hat{D}$  passe au quotient de  $K[X]$  par l'idéal engendré par  $f(X)$ , ce qui nous fournit l'extension cherchée.

*q.e.d.*

**Corollaire II.8.14.** Soit  $\mathfrak{K} \subset K \subset L$  une inclusion de corps et supposons que  $\mathfrak{K} \subset K$  soit une extension algébrique. Alors toute dérivation  $D : \mathfrak{K} \rightarrow L$  admet une unique extension à  $K$ .

■

Et voici enfin le résultat tant convoité de ce §.

**Théorème II.8.15.** Soit  $K \subset L$  une extension de corps,  $S$  une base de transcendance finie de  $L$  sur  $K$ . Alors :

$$\#(S) = \dim_K \{D : L \rightarrow L \mid D \text{ dérivation et } D|_K = 0\}$$

**Remarque II.8.16.** Dire que la dérivation  $D : L \rightarrow L$  est nulle sur le sous-corps  $K \subset L$ , revient à dire que  $D$  est  $K$ -linéaire; en effet :

$$D(k \cdot \ell) = D(k) \cdot \ell + k \cdot D(\ell) = D(k) \cdot \ell \Leftrightarrow D(k) \cdot \ell = 0$$

*preuve de II.8.15* Soit  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  une base de transcendance de  $L$  sur  $K$ , de sorte que  $K(x_1, \dots, x_n) \subset L$  est une extension algébrique. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\tilde{D}} & L \\ \uparrow & \nearrow D & \\ K(x_1, \dots, x_n) & & \\ \cong \uparrow & & \\ K(X_1, \dots, X_n) & & \end{array}$$

Il suit de II.8.14 que l'espace vectoriel des dérivations  $\tilde{D} : L \rightarrow L$  s'identifie à l'espace des dérivations  $D : K(x_1, \dots, x_n) \rightarrow L$  et donc aussi à l'espace des dérivations  $D : K(X_1, \dots, X_n) \rightarrow L$ .

Montrons que les dérivations

$$\frac{\partial}{\partial X_i} : K(X_1, \dots, X_n) \rightarrow L$$

définies à partir de l'exemple II.8.11, en les étendant à  $K(X_1, \dots, X_n)$  par le lemme II.8.12 forment une base du  $K$ -espace vectoriel  $V$  des dérivations  $D : K(X_1, \dots, X_n) \rightarrow L$  telles que  $D|_K = 0$ . Si  $D \in V$ ,  $D(X_i) = \lambda_i \in L$ , et puisque  $D$  est  $K$ -linéaire, si les  $a_\alpha \in K$ , on a :

$$D\left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}\right) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_1^{\alpha_1} \cdots X_i^{\alpha_i-1} \cdots X_n^{\alpha_n} \cdot D(X_i)\right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial}{\partial X_i}\right) \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}\right)$$

ce qui montre que  $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial}{\partial X_i}$ . D'autre part cette écriture est unique, car  $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial}{\partial X_i}\right)(X_j) = \lambda_j$ .  
q.e.d.

**Corollaire II.8.17.** Soit  $K \subset L$  une extension de corps qui admet une base de transcendance finie  $S$ . Alors  $\#S$  est indépendant du système algébriquement libre maximal choisi : si  $S'$  en est un autre, alors  $\#S' = \#S$ . On appelle  $\#S$  le degré de transcendance de  $L$  sur  $K$ .

■

**Définition II.8.18.** Soit  $X \subset \mathbb{K}^n$  une variété affine. On définit sa *dimension* par

$$\dim(X) = \text{degré de transcendance de } \mathbb{K}(X) \text{ sur } \mathbb{K} \quad .$$

On a  $0 \leq \dim(X) \leq n$ .

## II.9 Propriétés de la dimension

### II.10 Exercices

#### A Variétés affines, théorèmes de Pappus et Pascal

1. Montrer que l'espace vectoriel  $\mathbb{K}[x, y]_d$  est de dimension  $\binom{d+2}{2} = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$  sur  $\mathbb{K}$ . Plus généralement, si on désigne par  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_d$  l'espace vectoriel des polynômes en  $X_1, \dots, X_n$  de degré  $d$ , il est de dimension  $\binom{n+d}{d}$  sur  $\mathbb{K}$ .

2. Démontrer le théorème de Pappus, qui dit que si on a deux droites distinctes  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , et six points distincts  $P_1, \dots, P_6$ , dont  $P_1, P_3, P_5$  sur  $\ell_1$  et  $P_2, P_4, P_6$  sur  $\ell_2$ , les  $P_i$  étant distincts de l'intersection de  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , les 3 points

$$P_7 = \overline{P_1 P_2} \cap \overline{P_4 P_5} \quad , \quad P_8 = \overline{P_2 P_3} \cap \overline{P_5 P_6} \quad \text{et} \quad Q = \overline{P_3 P_4} \cap \overline{P_6 P_1}$$

sont alignés. C'est un cas particulier du théorème de l'hexagone de Pascal, dans lequel la conique dégénère en les deux droites distinctes  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .

3. Démontrer la réciproque du théorème de l'hexagone : si les 3 points d'intersection des côtés opposés d'un hexagone sont alignés, alors il est inscrit dans une conique.

#### B Topologie de Zariski, idéaux

4. Décrire les fermés de Zariski de  $\mathbb{K}$ .

5. Trouver un ouvert de  $\mathbb{K}$  pour la topologie transcendante qui n'est pas un ouvert de Zariski.

6. Trouver une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout ouvert de Zariski  $U \subset \mathbb{K}$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de Zariski de  $\mathbb{K}$ , mais qui n'est pas continue pour la topologie transcendante.

7. Trouver l'adhérence de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  au sens de la topologie de Zariski (l'adhérence d'un ensemble est l'intersection de tous les fermés qui le contiennent).

8.

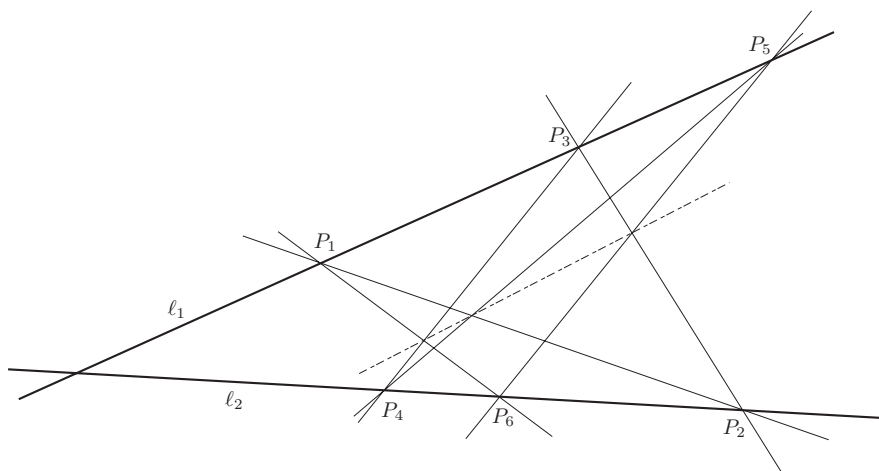


Figure II.2: Le théorème de Pappus

- (1) Trouver un idéal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tel que  $\mathcal{I}(V(\mathcal{A})) \neq \mathcal{A}$ .
- (2) Trouver un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{K}^n$  tel que  $V(\mathcal{I}(A)) \not\subseteq A$ .
- (3) Trouver  $\Lambda \subsetneq M \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  avec  $V(\Lambda) = V(M)$ .

9. Montrer que  $\sqrt{\mathcal{A}}$  est effectivement un idéal.

10. Montrer que pour un idéal  $\mathcal{A}$ , il existe  $N_0$  tel que

$$\sqrt{\mathcal{A}} = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid f^{N_0} \in \mathcal{A}\}$$

11. Montrer que le Nullstellensatz est faux si on remplace  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$ , par exemple en prenant pour  $\mathcal{A}$  l'idéal engendré par  $f(X, Y) = X^2 + Y^2$ .

## C Morphismes

12. Montrer que l'application  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \rightsquigarrow |x|$  (valeur absolue de  $x$ ) est continue pour la topologie de Zariski, mais n'est pas un morphisme.



# Chapitre III

## Variétés projectives

### III.1 Premiers contacts

On définit l'espace projectif de dimension  $n$  sur le corps  $\mathbb{K}$ , noté  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ , comme étant le quotient de  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence qui identifie  $x, x' \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  s'ils définissent la même droite par l'origine, c'est-à-dire s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  telle que  $\lambda \cdot x = x'$ . En symboles :

$$\mathbb{P}\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim, \quad \text{avec } x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ telle que } x = \lambda \cdot x'$$

Nous pouvons tout de suite définir la topologie de Zariski sur  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ , quitte à la comprendre plus tard : c'est la topologie quotient par la relation  $\sim$  de la topologie induite sur  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la topologie de Zariski sur  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Soit  $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  la projection canonique, celle qui à  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  associe la classe d'équivalence de  $(x_0, \dots, x_n)$ . On la note  $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$  et on appelle  $x_0, \dots, x_n$  les coordonnées homogènes de  $\pi(x)$ ; la notation  $[x_0 : \dots : x_n]$  a pour origine le fait que, bien que les  $x_i$  dépendent du représentant de  $\pi(x)$ , les quotients  $x_i/x_{i+1}$ , qui ont un sens si  $x_{i+1} \neq 0$ , n'en dépendent pas : si  $x' = \lambda \cdot x$ ,  $x'_i/x'_{i+1} = x_i/x_{i+1}$ .

Si  $X \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^n$ ,  $\pi^{-1}(X)$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{K}^{n+1}$  qui se trouvent sur des droites appartenant à  $X$  : on l'appelle le cône sur  $X$ , noté  $CX$ ; on peut reformuler la définition de la topologie de Zariski sur  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  en disant que  $X \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  est un fermé pour cette topologie si et seulement si  $CX \subset \mathbb{K}^{n+1}$  est un fermé de Zariski.

Une des raisons d'être des espaces projectifs est qu'on peut les voir comme compactifiés des espaces affines; de plus, comme on le verra au § III.3, cette compactification s'étend aussi aux sous-ensembles algébriques. En effet, on a une application

$$\varphi_0 : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow [1 : x_1 : \dots : x_n]$$

et si on pose  $U_0 = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n \mid x_0 \neq 0\}$ ,  $\varphi_0$  est une bijection sur  $U_0$ , d'inverse

$$[x_0 : \dots : x_n] \rightsquigarrow (x_1/x_0, x_2/x_0, \dots, x_n/x_0) \quad .$$

Ainsi,  $\varphi_0$  permet d'identifier l'espace affine  $\mathbb{K}^n$  à un ouvert de  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ . Le complémentaire de  $U_0$  dans  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ , que l'on note  $H_0$  et qu'on appelle "l'hyperplan à l'infini", s'identifie à  $\mathbb{P}\mathbb{K}^{n-1}$  :

$$\mathbb{P}\mathbb{K}^n \setminus U_0 = \{[0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n \mid (0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\} \simeq \mathbb{P}\mathbb{K}^{n-1} \quad .$$

Notons que  $\mathbb{P}\mathbb{K}^{n-1}$  n'est autre que l'espace des droites par l'origine de  $\mathbb{K}^n$ . Ainsi, on peut voir  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  comme la réunion de  $\mathbb{K}^n$  et des droites par l'origine de  $\mathbb{K}^n$ .

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on peut munir  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  de la topologie transcendante, qui est la topologie quotient sur  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  de la topologie induite sur  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la topologie transcendante sur  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Pour comprendre cette topologie, si on a une suite de points  $\{P_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{K}^n$  telle que  $\|P_k\| \rightarrow \infty$ , et telle que  $P_k/\|P_k\|$  a une limite  $v$ , alors dans  $\varphi_0(P_k)$  tend vers  $[0, v] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n$ .

On peut définir de manière analogue :

$$\varphi_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^n \quad , \quad (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n]$$

qui est une bijection sur  $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ . Notons que la réunion des  $U_i$  recouvre  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ ; on appelle les  $\varphi_i$  *cartes affines* sur  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ .

Plus généralement, si  $\alpha : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire non nulle, on pose :

$$H_\alpha = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid \alpha(x_0, \dots, x_n) = 0\} \quad , \quad U_\alpha = \mathbb{P}\mathbb{K}^n \setminus H_\alpha \quad .$$

On a alors une bijection :

$$U_\alpha \xrightarrow{\cong} \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \alpha(x_0, \dots, x_n) = 1\} \quad , \\ [x_0 : \dots : x_n] \rightsquigarrow \left( \frac{x_0}{\alpha(x_0, \dots, x_n)}, \dots, \frac{x_n}{\alpha(x_0, \dots, x_n)} \right) \quad .$$

Si  $\alpha(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0) \neq 0$ , l'espace affine  $\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \alpha(x_0, \dots, x_n) = 1\}$  s'identifie à  $\mathbb{K}^n$  par projection sur les coordonnées  $(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . La carte affine  $\varphi_i$  correspond au cas où on prend pour  $\alpha$  la forme linéaire  $(x_0, \dots, x_n) \rightsquigarrow x_i$ .

Dans le cas où  $n = 2$ , on peut visualiser  $\varphi_0$  (voir figure ??).

Montrons maintenant comment les équations de courbes planes peuvent s'étendre à  $\mathbb{P}\mathbb{K}^2$ . Soit  $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$  un polynôme de degré exactement  $d$  :

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0\dots d} a_{i,j} x^i y^j \quad \text{et} \quad \exists (i_0, j_0) \text{ avec } i_0 + j_0 = d \text{ et } a_{i_0, j_0} \neq 0$$

On définit alors l'homogénéisé  $f^*$  de  $f$  comme étant le polynôme en 3 variables  $(t, x, y)$  défini par :

$$f^*(t, x, y) = t^d \cdot f(x/t, y/t) = \sum_{i,j=0\dots d} a_{i,j} t^{d-i-j} x^i y^j \quad .$$

C'est un polynôme homogène de degré  $d$ , ce qui est dire que c'est une somme de monômes tous de même degré  $d$ , et qui entraîne que :

$$f^*(\lambda \cdot (t, x, y)) = \lambda^d \cdot f^*(t, x, y) \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad .$$

En particulier,  $f^*(t, x, y) = 0 \Rightarrow f^*(\lambda \cdot (t, x, y)) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ . Cela a donc un sens de poser :

$$\Gamma^* = \{[t : x : y] \mid f^*(t, x, y) = 0\}$$

et c'est un fermé de Zariski, puisque

$$C\Gamma^* = \{(t, x, y) \in \mathbb{K}^3 \mid f^*(t, x, y) = 0\} \quad .$$

Posons  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ . Puisque  $f^*(1, x, y) = f(x, y)$ , on a :

$$\varphi_0^{-1}(\Gamma^*) = \Gamma \quad .$$

D'autre part,  $f^*(0, x, y) = \sum_{i+j=d} a_{i,j} x^i y^j = f_d(x, y)$  est la partie homogène de  $d$  de  $f$ , et

$$\Gamma^* \cap H_0 = \{(0, x, y) \mid f_d(x, y) = 0\} \quad .$$

En identifiant  $\mathbb{K}^2$  à  $U_0$  via  $\varphi_0$ , on peut donc dire que  $\Gamma^*$  est obtenue en ajoutant à  $\Gamma$  les points à l'infini, qui sont les droites de  $\mathbb{K}^2$  sur lesquelles  $\varphi_d(x, y)$  s'annule.

Par exemple, prenons  $f(x, y) = xy - 1$ . Alors  $f^*(t, x, y) = xy - t^2$ , et  $f_2(x, y) = xy$ , qui s'annule sur les droite  $[1 : 0]$  et  $[0 : 1]$ . En fait :

$$\Gamma^* = \{(t, x, y) \mid xy - 1 = 0\} \cup \{[0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]\} \quad .$$

Donc, en passant de  $\Gamma$  à  $\Gamma^*$ , on a ajouté 2 points à l'infini, qui ici sont en fait les 2 asymptotes  $x = 0$  et  $y = 0$ . (voir figure ??.)

On a l'habitude de représenter les points de  $H_0$  à distance finie, pour "voir" ce qu'il s'y passe.

## III.2 Ensembles algébriques projectifs

Un polynôme  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  est dit homogène de degré  $d$  s'il est somme de monômes de degré exactement  $d$  :

$$F(X_0, \dots, X_n) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha X^\alpha$$

où  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ ,  $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$ , et  $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \cdot X_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot X_n^{\alpha_n}$ . Notons que, si  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ ,  $F(\lambda \cdot x) = \lambda^d \cdot F(x)$ , et donc, comme on en a déjà vu des exemples au § précédent, ce polynôme homogène définit un sous-ensemble  $V_p(F)$  de  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  :

$$V_p(F) = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\} \quad .$$

Notons cependant que, contrairement au cas affine,  $F$  ne définit pas une fonction sur  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ , seulement le lieu de ses zéros est bien défini.

Dans la suite, nous essayerons de noter par des majuscules les polynômes homogènes, par des minuscules des polynômes pas nécessairement homogènes.

Si  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ,  $f(X) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha X^\alpha$  est un polynôme de degré au plus  $d$ , on peut les décomposer de manière unique en somme de polynômes homogènes :

$$f(X) = \sum_{h=0}^d f_h(X) \quad , \quad \text{où} \quad f_h(X) = \sum_{|\alpha|=h} a_\alpha X^\alpha \quad .$$

On appelle  $f_h(X)$  la composante homogène de degré  $h$  de  $f$ .

**Définition III.2.1.** Définition L'idéal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  est dit *homogène* si

$$f \in \mathcal{A} \Rightarrow f_h \in \mathcal{A} \quad , \quad \forall h = 0, \dots, d \quad .$$

Pour comprendre la topologie de Zariski de  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$ , il faut comprendre quels sont les sous-ensembles  $X \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  dont le cône  $CX \subset \mathbb{K}^{n+1}$  est algébrique :

**Proposition III.2.2.** (1) Soit  $A \subset \mathbb{K}^{n+1}$  un sous-ensemble algébrique. Alors  $A$  est un cône si et seulement si  $\mathcal{I}(A)$  est homogène.

(2) Si  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  est homogène, alors  $V(\mathcal{A}) \subset \mathbb{K}^{n+1}$  est un cône.

(3) L'idéal  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  est homogène si et seulement si il possède un système de générateurs qui sont des polynômes homogènes.

*Preuve:*

*q. e. d.*

Si  $\Lambda \subset \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  est un ensemble quelconque de polynômes *homogènes*, on pose :

$$V_p(\Lambda) = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^n \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0 \forall F \in \Lambda\} \quad .$$

On appelle les sous-ensembles de  $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$  définis ainsi des sous-ensembles algébriques, ou fermés de Zariski. On déduit immédiatement de **2.2** :

**Corollaire III.2.3.**  $X \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  est un fermé de Zariski si et seulement si  $X = V_p(F_1, \dots, F_k)$ , où les  $F_i \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  sont des polynômes homogènes.

### III.3 Passage de l'affine au projectif

### III.4 Dimension des variétés projectives

### III.5 Produits d'espaces projectifs et élimination

### III.6 Le théorème de Bézout, première version et premières applications

Dans ce §, nous travaillons sur le corps  $\mathbb{C}$ . Nous allons démontrer une première version simplifiée du théorème de Bézout, qui permet tout de même d'en comprendre le mécanisme et d'avoir des applications intéressantes.

#### III.6.1 Le théorème de Bézout

Ici on travaille sur le corps  $\mathbb{C}$ .

**Définition III.6.1.** Définition Soient  $\Gamma_F = V_p(F)$  et  $\Gamma_G = V_p(G)$  deux courbes projectives planes, où  $F, G \in \mathbb{C}[t, x, y]$  sont des polynômes homogènes de degré respectivement  $m$  et  $n$ . On dira que  $\Gamma_F$  et  $\Gamma_G$  sont transverses au point  $P = [t_0 : x_0 : y_0] \in \mathbb{P}^2$  si :

$$P \in \Gamma_F \cap \Gamma_G \Rightarrow dF_{(t_0, x_0, y_0)} \text{ et } dG_{(t_0, x_0, y_0)} \text{ sont linéairement indépendantes} \quad .$$

Notons que puisque  $dF_{\lambda(t_0, x_0, y_0)} = \lambda^{m-1} dF_{(t_0, x_0, y_0)}$ , la condition ci-dessus ne dépend pas du représentant choisi  $(t_0, x_0, y_0)$  de  $P$ .

On dira simplement que  $\Gamma_F$  et  $\Gamma_G$  sont transverses si elles sont transverses en tout point de  $\Gamma_F \cap \Gamma_G$ .

Cela revient à dire que  $\Gamma_F$  et  $\Gamma_G$  sont transverses, si elles ne se coupent qu'en des points qui sont réguliers sur l'une et l'autre courbe, et que leur droites tangentes en ces points sont distinctes.

**Théorème III.6.2.** Soient  $\Gamma_F = V_p(F)$  et  $\Gamma_G = V_p(G)$  deux courbes projectives planes transverses, où  $F, G \in \mathbb{C}[t, x, y]$  sont des polynômes homogènes de degré respectivement  $m$  et  $n$ . Alors  $\Gamma_F \cap \Gamma_G$  consiste en exactement  $m \cdot n$  points.

**Corollaire III.6.3.** Quels que soient des polynômes homogènes  $F$  et  $G$  de degré au moins 1, l'intersection de  $V_p(F)$  et  $V_p(G)$  est non vide.

En effet, si  $V_p(F) \cap V_p(G) = \emptyset$ , les courbes  $\Gamma_F$  et  $\Gamma_G$  sont évidemment transverses, et donc leur intersection devrait consister en au moins  $\text{degré}(F) \cdot \text{degré}(G) \geq 1$  points.

*Preuve du théorème de Bézout.* Nous allons utiliser les notations et résultats du § 2 de l'appendice.

Posons  $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(\mathbb{C}[t, x, y]_m)$ , qui est l'espace des courbes de degré  $m$ . Considérons l'ensemble algébrique :

$$W = \{([F], [G], [t, x, y]) \in \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}^2 \mid F(t, x, y) = G(t, x, y) = 0\}$$

et soit  $\pi : W \rightarrow \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n$  la restriction à  $W$  de la projection naturelle :  $\pi([F], [G], [t, x, y]) = ([F], [G])$ .

Considérons le cône de  $W$

$$CW = \{(F, G, v) \in \mathbb{C}[t, x, y]_m \times \mathbb{C}[t, x, y]_n \times \mathbb{C}^3 \mid F(v) = 0, G(v) = 0\} \quad (\text{où } v = (t, x, y))$$

Définissons  $\phi : (\mathbb{C}[t, x, y]_m \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}[t, x, y]_n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^2$  par :

$$\phi(F, G, v) = (F(v), G(v))$$

Alors sa dérivée s'écrit :

$$d\phi_{(F, G, v)}(\overline{F}, \overline{G}, \overline{v}) = \left( \overline{F}(v) + dF_v(\overline{v}), \overline{G}(v) + dG_v(\overline{v}) \right)$$

et si  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ , puisque  $v \neq 0$ , on peut trouver  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$  tels que  $\bar{F}(v) \neq 0$ ,  $\bar{G}(v) \neq 0$  (par exemple, si  $v = [v_0 : v_1 : v_2]$  avec  $v_0 \neq 0$ , on prend  $\bar{F} = t^m$ ,  $\bar{G} = t^n$ ), et alors

$$d\phi_{(F,G,v)} \left( \frac{\lambda}{\bar{F}(v)} \cdot \bar{F}, \frac{\mu}{\bar{G}(v)} \cdot \bar{G}, 0 \right) = (\lambda, \mu)$$

ce qui montre que  $\frac{\partial \phi}{\partial (F,G)}^{(F,G,v)}$  est surjective. Il en suit que  $W$  est lisse, de dimension égale à :

$$\dim(\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}^2) - 2 = \dim(\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n)$$

et que son espace tangent au point  $z = ([F], [G], P)$  est donné par :

$$TW_z = \{ [\bar{F}, \bar{G}, \bar{v}] \mid \bar{F}(v) + dF_v(\bar{v}) = 0, \bar{G}(v) + dG_v(\bar{v}) = 0 \} \quad .$$

Comme le noyau de la dérivée de  $\pi$  au point  $z$  est l'intersection de  $TW_z$  avec le noyau de la dérivée de la projection  $\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n$ , qui consiste en les  $[0, 0, \bar{v}] \in T(\mathbb{P}_m)_{[F]} \times T(\mathbb{P}_n)_{[G]} \times \mathbb{P}_P^2$ , on a :

$$\text{Ker}(d\pi_z) = \{ [0, 0, \bar{v}] \mid dF_P(\bar{v}) = 0, dG_P(\bar{v}) = 0 \} \quad .$$

Or  $dF_P$  et  $dG_P$  sont linéairement indépendantes si et seulement si  $\text{Ker}(dF_P) \cap \text{Ker}(dG_P)$  est de dimension 1. Comme  $dF_P(P) = m \cdot F(P) = 0$  et  $dG_P(P) = n \cdot G(P) = 0$ , on voit que dire que la dérivée de  $\pi$  au point  $z = ([F], [G], P)$  n'est pas bijective revient à dire que  $V_P(F)$  et  $V_P(G)$  ne sont pas transverses au point  $P$ . Soit

$$\Sigma = \{ z \in \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}^2 \mid d\pi_z \text{ n'est pas bijective} \} \quad .$$

Alors  $\pi(\Sigma)$ , qui est une variété projective, est l'ensemble de paires de courbes non transverses.

Si on prend

$$F_0 = (x - t) \cdot (x - 2t) \cdots (x - m \cdot t) \quad , \quad G_0 = (y - t) \cdot (y - 2t) \cdots (y - n \cdot t)$$

on vérifie immédiatement que ces deux courbes se coupent transversalement, en les  $m \cdot n$  points  $[i : j : 1]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . En particulier,  $\pi(\Sigma) \subsetneq \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n$ , ce qui entraîne que  $V = \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n \setminus \pi(\Sigma)$  est connexe (la trace de  $\pi(\Sigma)$  sur au moins un produit de cartes affines  $U' \times U''$ ,  $U'$  carte affine sur  $\mathbb{P}_m$ ,  $U''$  carte affine sur  $\mathbb{P}_n$ , doit être non vide, donc  $U' \times U'' \setminus \pi(\Sigma)$  est connexe, et donc aussi  $\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n \setminus \pi(\Sigma)$ , car il est contenu dans l'adhérence, dans la topologie transcendante, de  $U' \times U'' \setminus \pi(\Sigma)$ .)

Posons  $M = \pi^{-1}(V) = W \setminus \pi^{-1}(\pi(\Sigma))$ ; parce que  $\pi$  est propre (dans la topologie transcendante),  $\pi|_M : M \rightarrow V$  l'est aussi. Il suit alors de la proposition I.2.7 (principe de la conservation du nombre) et du fait que la fibre de  $\pi|_M$  au dessus de  $(F_0, G_0)$  consiste en  $m \cdot n$  points, que toutes les fibres de  $\pi|_M : M \rightarrow V$  consistent en  $m \cdot n$  points, ce qui démontre le théorème.

*q. e. d.*

### III.6.2 Définition des points d'inflexion des courbes planes

Soit  $f \in \mathbb{K}[X_1, X_2]$  l'équation d'une courbe affine plane, que l'on suppose réduite. Soit  $P \in V(f)$  un point régulier et  $\tau \in \mathbb{K}^2$  un vecteur non nul, tangent à  $V(f)$ . Alors  $\alpha(t) = P + t \cdot \tau$  est une paramétrisation de la droite tangente à  $V(f)$  en  $P$ , avec  $\alpha(0) = P$ , et donc  $f(\alpha(0)) = 0$ .

**Définition III.6.4.** Définition On dit que  $P$  est un point d'inflexion de  $V(f)$  si :

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \alpha)''(0) = 0 \quad .$$

On dit que c'est un point d'inflexion ordinaire si de plus :

$$(f \circ \alpha)'''(0) \neq 0 \quad .$$

Si  $P = (a_1, a_2)$  et  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ , dire que  $P$  est un point d'inflexion, c'est dire que :

$$(6-1) \quad f(a_1, a_2) = 0 \quad , \quad \sum_{i=1,2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2) \tau_i = 0 \quad , \quad \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, a_2) \tau_i \tau_j = 0$$

et il est ordinaire si de plus

$$(6-2) \quad \sum_{i,j,k=1,2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a_1, a_2) \tau_i \tau_j \tau_k \neq 0$$

Par exemple, la courbe  $X_2 - X_1^3$  a un point d'inflexion ordinaire en  $(0, 0)$ .

Cette notion de point d'inflexion n'est pas invariante par des isomorphismes quelconques. Par exemple, toute équation de courbe de la forme  $X_2 - f(X_1) = 0$  (graphe de la fonction  $f(X_1)$ ) est équivalente à la courbe d'équation  $X_2' = 0$ , par l'isomorphisme  $X_1' = X_1$ ,  $X_2' = X_2 - f(X_1)$ . En particulier,  $X_2 - X_1^3 = 0$  est équivalente à  $X_2 - X_1^2$ , qui n'a point de point d'inflexion.

Si  $\Gamma \subset \mathbb{P}\mathbb{K}^2$  est une courbe projective,  $P = [a_0 : a_1 : a_2] \in \Gamma$  un point régulier et  $\varphi_0 : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^2$  est une carte affine contenant  $P$ , on dit que  $P$  est un point d'inflexion de  $\Gamma$  si  $\varphi_0^{-1}(P)$  est un point d'inflexion (ordinaire) de  $\varphi_0^{-1}\Gamma$ .

On peut vérifier directement que cette définition ne dépend pas de la carte affine choisie, mais cela résultera aussi de la proposition du numéro suivant, qui exprime la notion de point d'inflexion directement en termes de l'équation homogène de  $\Gamma$ .

### III.6.3 Courbes polaires

Soit  $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]_m$  un polynôme et  $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}\mathbb{K}^2$ . La polaire  $F_a$  de  $F$  par rapport à  $a$  est le polynôme de degré  $m - 1$  défini par :

$$F_a(X) = \sum_{i=0,1,2} \frac{\partial F}{\partial X_i}(X) \cdot a_i \quad .$$

Comme d'habitude, on abuse du langage, en confondant la courbe polaire et son équation.

Pour comprendre la polaire, il faut se rappeler de la relation d'Euler pour une fonction homogène  $G(X_0, \dots, X_n)$  de degré  $d$  :

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial G}{\partial X_i}(X) \cdot X_i = d \cdot G(X)$$

ce qui se voit en posant, pour  $x$  fixé et  $\lambda \in \mathbb{K}$  :  $\varphi(\lambda) = G(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot G(X)$ . En dérivant par rapport à  $\lambda$ , il vient :

$$d \cdot \lambda^{d-1} G(\lambda \cdot X) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial G}{\partial X_i}(\lambda \cdot X) \cdot X_i$$

et il suffit ensuite de poser  $\lambda = 1$  pour obtenir la relation d'Euler.

**Proposition III.6.5.** *Supposons que  $a \notin V_p(F)$ . Alors  $b \in V_p(F) \cap V_p(F_a)$  si et seulement si la droite par  $a$  et  $b$  est tangente à  $V_p(F)$  en  $b$ .*

Au cas où  $b$  est singulier, on admet que toute droite par  $b$  est tangente à la courbe  $V_p(F)$ .

*Preuve:* Puisque  $b \in V_p(F_a)$ , on a :

$$(I) \quad F_a(b) = \sum_{i=0}^2 \frac{\partial F}{\partial X_i}(b) a_i = 0$$

et puisque  $b \in V_p(F)$ , en appelant  $d$  le degré de  $F$ , on déduit de la relation d'Euler que :

$$(II) \quad d \cdot F(b) = \sum_{i=0}^2 \frac{\partial F}{\partial X_i}(b) a_i = 0$$

d'où on déduit que

$$(III) \quad \sum_{i=0}^2 \frac{\partial F}{\partial X_i}(b) (a_i - b_i) = 0$$

ce qui veut bien dire que la droite par  $a$  et  $b$  est tangente à  $V_p(F)$ . Réciproquement, si la droite par  $a$  et  $b$  est tangente, de (III) et (II) on déduit (I).

*q. e. d.*

### III.6.4 Polaire, Hessienne et points d'inflexion

Si  $F \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]_n$  un polynôme homogène de degré  $n$ . On peut lui associer un polynôme homogène de degré  $3(n-2)$  que l'on appelle *la Hessienne*, en posant :

$$H_F(x) = \det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}(x) \right)_{i,j=0,1,2}$$

**Proposition III.6.6.** *Soit  $F(X_0, X_1, X_2)$  un polynôme homogène de degré  $n$  et soient  $b, a \in \mathbb{P}\mathbb{K}^2$  tels que  $F(b) = 0$ ,  $F(a) \neq 0$ ,  $F_a(b) = 0$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $b$  est un point d'inflexion ou bien un point singulier de  $V(F)$
- (2)  $b \in V(F) \cap V(H_F)$
- (3)  $V(F)$  et  $V(F_a)$  ne sont pas transverses au point  $b$ .

*Preuve:* On va montrer que (1)  $\Leftrightarrow$  (2) et (2)  $\Leftrightarrow$  (3).

On peut supposer sans perte de généralité que  $a$  et  $b$  sont à distance finie, soit :  $a = [1 : a_1, a_2]$ ,  $b = [1 : b_1 : b_2]$ , de sorte que  $a - b = (0, a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ . Posons  $f(x_1, x_2) = F(1, x_1, x_2)$ .

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow (2)}$$

Si  $b$  est un point singulier :

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(b) b_i = (n-1) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j}(b) = 0$$

et donc  $H_F(b) = 0$ . Si  $b$  est un point régulier et un point d'inflexion, d'après (6-1) :

$$(6-3) \quad \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_i - b_i)(a_j - b_j) = \sum_{i,j=0,1,2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a_i - b_i)(a_j - b_j) = 0 \quad .$$

Posons :

$$h(v, w) = \sum_{i,j=0,1,2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(b) \cdot v_i \cdot w_j$$

de sorte que (6-3) peut s'écrire :

$$h(a - b, a - b) = 0 \quad .$$

D'autre part

$$h(b, b) = \sum_{i,j=0,1,2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(b) \cdot b_i \cdot b_j = n(n-1)F(b) = 0$$

et

$$h(a, b) = \sum_{i,j=0,1,2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(b) \cdot a_i \cdot b_j = F_a(b) = 0$$

d'où on déduit que

$$0 = h(a - b, a - b) = h(a, a) + 2h(a, b) + h(b, b) = h(a, a) \quad .$$

En résumé :  $h(a, a) = h(a, b) = h(b, b) = 0$ . Si on prend comme base de  $\mathbb{K}^3$  les vecteurs  $e = (0, 1, 0)$ ,  $a$ ,  $b$ , la matrice de la forme bilinéaire  $h$  s'écrit :

$$(6-4) \quad \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on voit que son déterminant, qui est en fait  $H_F(b)$ , vaut 0, donc on a bien  $b \in V(F) \cap V(H_F)$ .

Réciproquement,  $h(b, b) = 0$  puisque  $b \in V(F)$ , et  $h(a, b) = 0$  puisque  $b \in V(F_a)$ . Donc la matrice de  $h$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \star & h(e, a) & h(e, b) \\ \star & h(a, a) & 0 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et si  $b$  n'est pas un point singulier,  $h(e, b) \neq 0$ ; alors, puisque le déterminant de la matrice de  $h$  doit être nul, cela implique que  $h(a, a) = 0$ , et donc d'après (??) que  $b$  est un point d'inflexion.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3)

Dire que  $V(F)$  et  $V(F_a)$  ne sont pas transverses au point  $b$  signifie qu'il existe  $v \in \mathbb{K}^3$  linéairement indépendant de  $b$  tel que :

$$(6-5) \quad \sum_{i=0,1,2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(b) \cdot v_i = h(b, v) = 0$$

$$(6-6) \quad \sum_{i,j=0,1,2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(b) \cdot a_i \cdot v_j = h(a, v) = 0$$

Si  $b$  n'est pas un point singulier de  $V(F)$ , il suit de (6-5) que  $v$  est de la forme  $v = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Puisque  $h(a, v) = \alpha \cdot h(a, a) + \beta \cdot h(a, b) = 0$ , il en suit que  $h(a, a) = 0$ , et donc  $b$  est un point d'inflexion.

Réciproquement, si  $b$  est singulier, on peut toujours trouver un  $v$  qui satisfait (??), et (??) est satisfaite puisque  $dF_b = 0$ . Si  $b$  n'est pas singulier, on prend  $v = a$ .

*q.e.d.*

Avant de pouvoir tirer des conséquences de cette proposition, il nous faut un lemme.

**Lemme III.6.7.** *Soit  $X$  une courbe projective plane ne contenant pas de droites. Alors elle possède un nombre fini de points d'inflexion*

La preuve de ce lemme utilise que l'on travaille avec les nombres complexes ou réels, mais il reste valable sur n'importe quel corps de caractéristique nulle.

**Corollaire III.6.8.** *Soit  $\Gamma \subset \mathbb{P}\mathbb{C}^2$  une courbe lisse de degré  $> 1$  et soit  $a \in \mathbb{P}\mathbb{C}^2 \setminus \Gamma$  un point qui ne se trouve sur aucune tangente à des points d'inflexion de  $\Gamma$ . Alors il existe exactement  $n(n-1)$  droites tangentes à  $\Gamma$  passant par  $a$ .*

**Corollaire III.6.9.** *Soit  $\Gamma \subset \mathbb{P}\mathbb{C}^2$  une courbe lisse de degré  $n \geq 3$  alors  $\Gamma$  possède des points d'inflexion, en nombre égal à  $3n(n-2)$  quand tout va bien.*

## III.7 Le théorème de Bézout avec multiplicités

$\mathbb{K}$  est de nouveau un corps de caractéristique nulle, algébriquement clos.

**Définition III.7.1.** Soient  $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  et  $P \in \mathbb{K}^2$ . On définit la multiplicité d'intersection de  $f$  et  $g$  en  $P$  par :

$$\mu(P, f, g) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P / \langle f, g \rangle)$$

où  $\langle f, g \rangle$  désigne l'idéal engendré par  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{O}_P$ ; si cette dimension n'est pas finie, on pose  $\mu(P, f, g) = \infty$ .

**Exemples III.7.2.**

- (1) Si  $P \notin V(f) \cap V(g)$ , alors  $\langle f, g \rangle = \mathcal{O}_P$  et donc  $\mu(P, f, g) = 0$ .
- (2) Soit  $f(x, y) = y$ ,  $g(x, y) = y^3 - xy + x^2$  et  $P = (0, 0)$ . Alors  $\langle f, g \rangle \mathcal{O}_P = \langle y, x^2 \rangle \mathcal{O}_P$ . Désignons par  $\mathcal{O}_0^x$  l'anneau local de  $\mathbb{C}$  en 0; on a  $\mathcal{O}_P / \langle y, x^2 \rangle = \mathcal{O}_0^x / \langle x^2 \rangle$ , ce qui fait que  $\mu(P, f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0^x / \langle x^2 \rangle = 2$ .

Si  $F, G \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  sont des formes homogènes et  $P \in \mathbb{P}\mathbb{K}^2$ , on définit  $\mu(P, F, G)$  en prenant une carte affine qui contient  $P$  et on vérifie que cela ne dépend pas de la carte choisie.

**Théorème III.7.3** (Bézout avec multiplicités). Soient  $F, G \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  des formes homogènes de degré respectivement  $m$  et  $n$ , sans composantes communes. Alors :

$$\sum_{P \in \mathbb{P}\mathbb{K}^2} \mu(P, F, G) = m \cdot n$$

Notons que puisque  $F$  et  $G$  n'ont pas de composantes communes,  $V(F) \cap V(G)$  consiste en un nombre fini de points, ce qui fait que la somme ci-dessus est finie.

Puisque  $V(F) \cap V(G)$  consiste en un nombre fini de points, on peut supposer, quitte à faire un changement de coordonnées linéaire, que sur la droite à l'infini, définie par  $z = 0$ ,  $V(F)$  et  $V(G)$  n'ont pas de points en commun; alors on peut utiliser II.6.3 : on est ramené à montrer que si  $V(F) \cap V(G) \cap V(z) = \emptyset$ , alors

$$(7-1) \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y] / \langle F_*, G_* \rangle) = m \cdot n \quad .$$

Notons, pour nous encourager, que si  $f(x, y) = x^m$  et  $g(x, y) = y^n$  et  $P = (0, 0)$ , alors comme base du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}[x, y] / \langle x^m, y^n \rangle$  on peut prendre les classes des  $x^i \cdot y^j$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , et leur nombre est précisément  $m \cdot n$ . La preuve de (7-1) repose sur quelques propositions préliminaires, dont le but est de montrer que la dimension de  $\mathbb{K}[x, y] / \langle F_*, G_* \rangle$  ne dépend pas de  $F$  et  $G$  mais seulement de leurs degrés. En prenant  $F = x^m$  et  $G = y^n$  on a vu que cela donne  $m \cdot n$ .

Voici quelques notations. Posons  $R = \mathbb{K}[x, y, z]$ , et notons  $R_d$  le sous-espace vectoriel de  $R$  des formes homogènes de degré  $d$ . Si  $F, G \in R$  sont des formes homogènes de degré respectivement  $m$  et  $n$ , on pose

$$\Gamma = R / \langle F, G \rangle \quad , \quad \Gamma_* = \mathbb{K}[x, y] / \langle F_*, G_* \rangle$$

où  $F_*(x, y) = F(1, x, y)$  est le déshomogénéisé de  $F$ . On note encore  $\Gamma_d$  le sous-espace vectoriel de  $\Gamma$  engendré par les classes de formes homogènes de degré  $d$ .

**Proposition III.7.4.** Si  $d \geq m + n$ , alors

$$\dim_{\mathbb{K}} \Gamma_d = m \cdot n$$

*Preuve:* La suite d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} R \oplus R \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} \Gamma \longrightarrow 0$$

où  $\alpha(C) = (-C \cdot G, C \cdot F)$ ,  $\beta(A, B) = A \cdot F + B \cdot G$  et  $\gamma$  est la projection canonique, est exacte.

Vérifions par exemple que  $\text{Im}(\alpha) \supset \text{Ker}(\beta)$ , les autres vérifications sont faciles. Si  $\beta(A, B) = A \cdot F + B \cdot G = 0$ , alors  $A \cdot F = -B \cdot G$ , et comme  $F$  et  $G$  n'ont pas de composantes communes, cela implique que  $F$  divise  $B$ , soit  $B = C \cdot F$ , où  $C \in R$ . Or  $A \cdot F = -B \cdot G = -C \cdot F \cdot G$ , donc  $A = -C \cdot G$ , ce qui montre que  $(A, B) = \alpha(C)$ .

On en déduit que la suite d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow R_{d-m-n} \xrightarrow{\alpha|\dots} R_{d-m} \oplus R_{d-n} \xrightarrow{\beta|\dots} R_d \xrightarrow{\gamma|_{R_d}} \Gamma_d \longrightarrow 0$$

obtenue en restreignant les homomorphismes  $\alpha, \beta, \gamma$  est exacte. On en déduit que

$$(7-2) \quad \dim(\Gamma_d) = \dim(R_d) - \dim(R_{d-m}) - \dim(R_{d-n}) + \dim(R_{d-m-n})$$

ce qui montre déjà que  $\dim(\Gamma_d)$  ne dépend pas de  $F$  et  $G$ , mais seulement de  $d, m$  et  $n$ . Or  $\dim(R_d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$  et il suit alors de (7-2) que

$$\begin{aligned} \dim(\Gamma_d) &= \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{(d-m+1)(d-m+2)}{2} - \frac{(d-n+1)(d-n+2)}{2} + \frac{(d-m-n+1)(d-m-n+2)}{2} \\ &= \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{(d+1)(d+2)}{2} + \frac{d(m-1+m-2)}{2} - \frac{(m-2)(m-1)}{2} \\ &\quad - \frac{(d+1)(d+2)}{2} + \frac{d(n-1+n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &\quad + \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{d(m+n-1+m+n-2)}{2} + \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} \\ &= \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} - \frac{(m-2)(m-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{m^2 + n^2 + 2mn - m - n - 2m - 2n - m^2 + 3m - n^2 + 3n}{2} = mn \end{aligned}$$

On peut aussi éviter ce long calcul, en prenant  $F = x^m$  et  $G = y^n$  et de remarquer que les classes dans  $\Gamma_d$  des  $x^i \cdot y^j \cdot z^{d-i-j}$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ ,  $0 \leq j \leq n-1$  forment une base de  $\Gamma_d$ .

*q.e.d.*

**Proposition III.7.5.** *On suppose que  $V(F) \cap V(G) \cap V(z) = \emptyset$ . Alors l'application linéaire*

$$\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma \quad , \quad [H] \rightsquigarrow [z \cdot H]$$

*est injective, où  $H \in \mathbb{K}[x, y, z]$  est  $[H]$  désigne sa classe dans  $\Gamma = \mathbb{K}[x, y, z]/\langle F, G \rangle$ , et l'application*

$$\alpha_d : \Gamma_d \longrightarrow \Gamma_{d+1} \quad , \quad [H] \rightsquigarrow [z \cdot H]$$

*est bijective dès que  $d \geq m + n$*

*Preuve:* Si  $\alpha([H]) = 0$ , cela signifie qu'il existe  $A, B \in \mathbb{K}[x, y, z]$  tels que

$$(7-3) \quad z \cdot H = A \cdot F + B \cdot G \quad .$$

Comme  $V(F) \cap V(G) \cap V(z) = \emptyset$ , les formes  $F_0(x, y) = F(x, y, 0)$  et  $G_0(x, y) = G(x, y, 0)$  n'ont pas de facteur commun. On pose encore  $A_0(x, y) = A(x, y, 0)$  et  $B_0(x, y) = B(x, y, 0)$  et alors il suit de (7-3) que

$$A_0 \cdot F_0 + B_0 \cdot G_0 = 0 \quad \implies \quad B_0 = C \cdot B_0 \quad , \quad A_0 = -C \cdot G_0 \quad , \quad C \in \mathbb{K}[x, y] \quad .$$

Posons  $A_1 = A + C \cdot G$ ,  $B_1 = B - C \cdot F$ . Alors  $A_1(x, y, 0) = A_0 + C \cdot G_0 = 0$ , de même  $B_1(x, y, 0) = 0$ ; on peut donc écrire  $A_1 = z \cdot A_2$ ,  $B_1 = z \cdot B_2$ , et :

$$z \cdot H = A \cdot F + B \cdot G = (A_1 - C \cdot G) \cdot F + (B_1 + C \cdot F) \cdot G = A_1 \cdot F + B_1 \cdot G = z \cdot (A_2 \cdot F + B_2 \cdot G) \implies H = A_2 \cdot F + B_2 \cdot G$$

et donc  $[H] = 0$ , ce qui montre bien que  $\alpha$  est injective. D'autre part, on a montré dans la proposition précédente que  $\dim(\Gamma_{d+1}) = \dim(\Gamma_d)$  si  $d \geq m + n$ , donc  $\alpha_d : \Gamma_d \rightarrow \Gamma_{d+1}$ , qui est injective entre espaces vectoriels de même dimension, est une bijection.

*q.e.d.*

**Proposition III.7.6.** *On suppose toujours que  $V(F) \cap V(G) \cap V(z) = \emptyset$ . L'homomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\beta_d : \Gamma_d \longrightarrow \Gamma_* \quad , \quad \beta([H]) = [H_*]$$

*où  $H_* \in \mathbb{K}[x, y]$  désigne le déshomogénéisé de  $H$ , à savoir  $H_*(x, y) = H(x, y, 1)$ , est un isomorphisme dès que  $d \geq m + n$*

*Preuve:* Si  $h \in \mathbb{K}[x, y]$ , soit  $h^*$  son homogénéisé et  $H = z^r \cdot h^*$ , où on prend  $r$  assez grand pour que le degré  $d'$  de  $H$  soit supérieur à  $d \geq m + n$ ; alors  $\beta_{d'}(H) = h$ . Il suit de la proposition précédente que  $z^{d'-d} : \Gamma_d \rightarrow \Gamma_{d'}$  est un isomorphisme; il existe donc  $H' \in \Gamma_d$  tel que  $[(z^{d-d'} \cdot H')] = [H]$ , et alors  $\beta_d([H']) = [h]$ ; ceci montre que  $\beta_d$  est surjective.

Montrons que  $\beta_d$  est injective. Soit  $[H] \in \text{Ker}(\beta)$ ; cela veut dire qu'il existe  $a, b \in \mathbb{K}[x, y]$  tels que

$$H_* = a \cdot F_* + b \cdot G_*$$

En prenant les homogénéisés, on en déduit une relation de la forme

$$z^r \cdot H = z^s \cdot a^* \cdot F + z^t \cdot b^* \cdot G$$

et donc  $[z^r H] = 0$  dans  $\Gamma_{d+r}$ , ce qui entraîne que  $[H] = 0$  dans  $\Gamma_d$  par la proposition précédente.

*q. e. d.*

*Démonstration du théorème de Bézout.* Comme on l'a déjà remarqué à la suite de l'énoncé du théorème de Bézout, on peut supposer que  $V(F) \cap V(G) \cap V(z) = \emptyset$ , et alors il suit de [II.6.3](#) qu'il suffit de démontrer que

$$\dim_{\mathbb{K}} \Gamma_* = m \cdot n \quad .$$

Or il suit de [III.7.6](#) que  $\dim_{\mathbb{K}} \Gamma_* = \dim_{\mathbb{K}} \Gamma_d$  pour  $d \geq m + n$ , et de [III.7.4](#) que  $\dim_{\mathbb{K}} \Gamma_d = m \cdot n$  pour  $d \geq m + n$ .

*q. e. d.*



# Appendice A

## Variétés différentiables

### I.1 Rappels : Théorème des fonctions implicites et de l'application inverse

### I.2 La notion de variété différentiable

**Définition I.2.1.** Soit  $M$  un espace topologique séparé; un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$  sur  $M$  est une famille de couples  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ , où :

- (1)  $\{U_i\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $M$  par des ouverts, ce qui veut dire que les  $U_i$  sont des ouverts de  $M$ , et que leur réunion est  $M$ .
- (2)  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme de  $U_i$  sur un ouvert  $\Omega_i$  de  $\mathbb{R}^n$

Pour mériter le qualificatif  $\mathcal{C}^\infty$ , cette famille doit vérifier la condition que les changements de cartes sont  $\mathcal{C}^\infty$ , ce qui veut dire que pour toute paire  $i, j \in I$ , la composition :

$$\varphi_j \circ (\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

doit être de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On appelle les  $\varphi_i$  des cartes sur  $M$ , et la condition ci-dessus c'est la compatibilité  $\mathcal{C}^\infty$  des cartes. On dit encore que  $\varphi_j \circ (\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{-1}$  est un changement de cartes.

Une variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$  est un espace topologique séparé muni d'un atlas  $\mathcal{C}^\infty$ .

Cette structure permet de définir la notion d'application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , où  $U \subset M$  est un ouvert quelconque : on dit qu'un tel  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  si pour toute carte  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  la composition  $f \circ (\varphi_i|_{U_i \cap U})^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^p$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . La condition de compatibilité montre immédiatement que si  $U \subset U_i \cap U_j$ , si  $f \circ (\varphi_i|_U)^{-1}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , alors  $f \circ (\varphi_j|_U)^{-1}$  l'est aussi.

Soit  $U \subset M$  un ouvert et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , qui est aussi une application  $\mathcal{C}^\infty$  au sens que l'on vient de définir; on dit que  $(U, \varphi)$  est une carte compatible avec l'atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ . Etant donné un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$ , l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec cet atlas est un nouvel atlas  $\mathcal{C}^\infty$ , qui contient l'atlas de départ, et qui est maximal, pour la relation d'ordre sur les atlas que le lecteur zélé pourra deviner par lui-même. Avec le même zèle, on remarquera qu'il y a une ambiguïté dans la notion de variété  $\mathcal{C}^\infty$  : si on remplace un atlas par un atlas compatible, en principe on obtient un objet différent; la définition rigoureuse de variété  $\mathcal{C}^\infty$  est la classe d'équivalence de tous les atlas compatibles avec un atlas donné, et l'atlas maximal est un représentant distingué de cette classe d'équivalence.

#### Exemples I.2.2.

- (1) L'espace projectif  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ , est une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$ , muni de l'atlas  $\{(U_i, \psi_i)\}_{i=0, \dots, n}$ , où  $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ , comme toujours, et  $\psi_i$  est l'inverse du  $\varphi_i$  des § précédents :

$$\psi_i([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i) \quad .$$

Le changement de cartes  $\psi_i \circ (\psi_j)^{-1}$  s'écrit, par exemple si  $i < j$  :

$$(u_1, \dots, u_n) \rightsquigarrow (u_1/u_j, \dots, u_{i-1}/u_j, 1/u_j, u_i/u_j, \dots, u_{j-1}/u_j, \dots, u_n/u_j)$$

qui est visiblement une application  $\mathcal{C}^\infty$ .

L'espace  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ , muni des cartes analogues, devient une variété de dimension  $2n$ , si on identifie  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$  de la manière habituelle.

*Exercice.* Vérifier et éventuellement corriger la formule de changement de cartes ci-dessus. Faire aussi le cas où  $i > j$ .

- (2) On dit que  $M \subset \mathbb{R}^n$  est sous-variété de dimension  $k$  si pour tout  $x \in M$ , il existe un système d'équation local  $F : U_x \rightarrow \mathbb{R}^k$  de rang maximum, ce qui veut dire que :

(a)  $U_x$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , contenant  $x$ .

(b)  $F : U_x \rightarrow \mathbb{R}^k$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , sa dérivée est surjective au point  $x$ , et  $F^{-1}(0) = U_x \cap M$ .

Pour avoir une carte sur  $M$  au voisinage de  $x$ , on peut prendre des restrictions à  $M$  de projections

$$p_{i_1, \dots, i_{n-k}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \quad , \quad (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}})$$

où  $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n$  est choisi de sorte que si  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  dénote la suite complémentaire à  $\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$  dans  $\{1, n, \dots, n\}$ , alors  $\det \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_{j_h}}(x) \right)_{i,h=1, \dots, k} \neq 0$ . En effet, si on note  $x' = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}})$  et  $x'' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$ , on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour exprimer  $U_x \cap M$  comme le graphe d'une application  $\mathcal{C}^\infty$  allant de l'espace des  $x'$  dans celui des  $x''$  (voir le § précédent dans cette appendice.)

- (3) Plus généralement, si  $M$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$ , on dit que  $N \subset M$  est une sous-variété de dimension  $n - k$ , si pour tout  $x \in N$  il existe une carte  $(U_x, \varphi_x)$  sur  $M$  et une application  $f : U_x \rightarrow \mathbb{R}^k$  qui est  $\mathcal{C}^\infty$ , et telle que

(a)  $f^{-1}(0) = N \cap U_x$

(b) la dérivée  $d(f \circ \varphi_x^{-1})_{\varphi_x(x)}$  est surjective.

De manière analogue au numéro précédent, on déduit un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $N$  en appliquant le théorème des fonctions implicites à  $f \circ \varphi_x^{-1}$ . Ces applications  $f$  sont des équations locales de  $N$  dans  $M$ .

- (4) Soit  $F \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]_m$  un polynôme homogène de degré  $m$  et supposons que si  $x = (x_0, \dots, x_n) \neq 0$  et  $F(x) = 0$ , alors  $dF_x \neq 0$ . Alors  $V(F) \setminus \{0\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{K}^{n+1}$  de dimension  $n$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $2n$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . De plus,  $V_p(F)$  est une sous-variété  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{P}^n$  : sur la carte  $U_0$  de  $\mathbb{P}^n$  on peut prendre comme équation locale  $f_0(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n) = F_*(x_1, \dots, x_n)$ ; en effet, si  $[1 : x_1 : \dots : x_n] \in U_0 \cap V_p(F)$  :

$$0 = F(1, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \cdot x_n \right)$$

et alors

$$df_x = \left( \frac{\partial F}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad dF_x = 0$$

ce qui est impossible; on procède de manière analogue sur  $U_i$ , en posant

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = F(\underbrace{x_1, \dots, x_{i-1}}_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad .$$

Les  $f_i$  jouent le rôle de  $f \circ \varphi_x^{-1}$  du numéro précédent. Cet exemple sera généralisé dans la proposition **2.5**.

### I.2.1 Espace tangent et dérivées d'applications

**Définition I.2.3.** Soient  $M$  et  $N$  des variétés  $\mathcal{C}^\infty$  et  $f : M \rightarrow N$  une application continue. On dit que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  si pour tout  $x \in M$  il existe des cartes  $(U_x, \varphi)$  sur  $M$ ,  $U_x \ni x$ , et  $(V_y, \psi)$ , où  $y = f(x)$  et  $V_y \ni y$ , telles que  $f(U_x) \subset V_y$  et que  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  soit  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soit  $M$  une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$  et  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  un atlas. Nous allons considérer des sommes disjointes de familles d'espaces de la forme  $\{A_i\}_{i \in I}$  : nous la noterons  $\sum_{i \in I} A_i$ , et un élément de cette somme disjointe sera noté  $(a, i)$ , pour indiquer que  $a \in A_i$ . Par exemple, on a l'identification naturelle d'espaces topologiques :

$$M = \sum_{i \in I} U_i / \sim \quad \text{où } (x, i) \sim (x, j) \text{ pour } x \in U_i \cap U_j \quad .$$

**Définition I.2.4.** Le fibré tangent  $TM$  de  $M$  est défini par :

$$TM = \sum_{i \in I} U_i \times \mathbb{R}^n / \sim \quad \text{où } (x, i, v) \sim (x, j, d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}(v)) \quad .$$

Notons par  $[x, i, v]$  la classe de  $(x, i, v)$  dans  $M$ . On a une projection naturelle  $\pi_M : TM \rightarrow M$ ,  $\pi_M([x, i, v]) = x$ . On a un atlas sur  $TM$  en prenant pour cartes les  $\pi_M^{-1}(U_i)$ , qui s'identifient à  $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$  par  $[x, i, v] \rightsquigarrow (\varphi_i(x), v)$ . On vérifie sans peine que c'est un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $TM$ . Si  $x \in M$ , on note  $TM_x = \pi_M^{-1}(x)$ ; puisque l'identification  $(x, i, v) \sim (x, j, d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}(v))$  est linéaire en  $v$ ,  $TM_x$  est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel.

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application  $\mathcal{C}^\infty$ , et soit  $x \in M$ ,  $(U_i, \varphi_i)$  une carte sur  $M$  avec  $x \in U_i$ , et  $(V_j, \psi_j)$  une carte sur  $N$  contenant  $y = f(x)$ . La dérivée de  $f$  est l'application  $df : TM \rightarrow TN$  définie par :

$$df_x([x, i, v]) = [f(x), j, d(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(v)]$$

et de nouveau il y a des tas de vérifications faciles à faire : cette définition est cohérente (i.e. ne dépend pas des représentants choisis),  $df$  est elle-même une application  $\mathcal{C}^\infty$ . Notons que  $\pi_N \circ df = df \circ \pi_M$ , et que  $df_x = df|_{TM_x} \rightarrow TN_y$  est linéaire; la notation  $df_x$  coïncide avec la notation usuelle dans le cas d'une application entre espaces numériques.

Par exemple, si  $M \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $n - k$ , pour  $x \in M$  prenons un système d'équations locales de rang maximum  $f : U_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Alors, par la carte locale au voisinage de  $x$  déduite du théorème des fonctions implicites (voir exemple ??), on voit que  $TM_x$  s'identifie à :

$$TM_x \simeq \{v \in \mathbb{R}^n \mid dF_x(v) = 0\}$$

Si  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  est la projection  $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ , pour  $x \in M$ , sa dérivée  $d\pi_x : TM_x \rightarrow \mathbb{R}^m$  est simplement la restriction de la projection naturelle  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow (x_1, \dots, x_m)$ .

Dans le cas d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , on a une identification naturelle  $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$  : il suffit de prendre l'atlas avec la carte  $U \subset \mathbb{R}^n$  et d'appliquer la définition de l'espace tangent.

Dans le cas de l'espace projectif, on a la représentation suivante de son espace tangent. La projection canonique  $p : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^n$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , et on vérifie facilement en utilisant les coordonnées affines que sa dérivée est surjective. Si  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ , on a donc une surjection :

$$dp_x : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow T\mathbb{P}\mathbb{K}^n_{[x]}$$

et son noyau est précisément la droite  $[x] \subset \mathbb{K}^{n+1}$ . On peut donc écrire :

$$T\mathbb{P}\mathbb{K}^n_{[x]} = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^{n+1}\} / \sim \quad , \quad \text{où } \bar{x} \sim \bar{x}' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ telle que } \bar{x} - \bar{x}' = \lambda \cdot x$$

Notons cependant que cette représentation fait appel au représentant explicite  $x$  de  $[x]$ . Comme d'habitude, on notera par  $[\bar{x}]$  la classe de  $\bar{x} \in \mathbb{K}^{n+1}$  dans  $T\mathbb{P}\mathbb{K}^n_{[x]}$ .

Si  $M$  et  $N$  sont des variétés  $\mathcal{C}^\infty$ , leur produit  $M \times N$  l'est aussi, si on le muni de l'atlas constitué de produits d'une carte sur  $M$  par une carte sur  $N$ , et on vérifie que

$$T(M \times N) = TM \times TN$$

En particulier, on a une représentation de l'espace tangent à un produit d'espace projectifs :

$$T(\mathbb{P}\mathbb{K}^{m_1} \times \mathbb{P}\mathbb{K}^{m_\ell})_{([x^1], \dots, [x^\ell])} = \left\{ ([\bar{x}^1], \dots, [\bar{x}^\ell]) \mid [\bar{x}^i] \in T\mathbb{P}\mathbb{K}_{[x^i]}^{m_i} \right\}$$

La proposition suivante traite d'une situation qu'on rencontrera souvent en géométrie algébrique.

**Proposition I.2.5.** *Considérons l'application  $F = (F_1, \dots, F_\ell) : \mathbb{K}^{m_1+1} \times \mathbb{K}^{m_\ell+1} \rightarrow \mathbb{K}^k$  où  $F_i$  est un polynôme homogène par rapport à chaque facteur  $\mathbb{K}^{m_i+1}$ .*

*Supposons que si  $F(x) = 0$  et  $x \neq 0$ , alors  $dF_x : \mathbb{K}^{m_1+1} \times \mathbb{K}^{m_\ell+1} \rightarrow \mathbb{K}^k$  est surjective. Alors*

$$M = V_p(F_1, \dots, F_\ell)$$

*est une sous-variété de  $\mathbb{P}\mathbb{K}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}\mathbb{K}^{m_\ell}$  de codimension  $k$ , et si  $P = ([x^1], \dots, [x^\ell]) \in M$ , on a :*

$$TM_P = \left\{ [\bar{x}^1], \dots, [\bar{x}^\ell] \in T(\mathbb{P}\mathbb{K}^{m_1} \times \mathbb{P}\mathbb{K}^{m_\ell})_P \mid dF_P(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^\ell) = 0 \right\}$$

*Preuve:* Pour la preuve, on se limite au cas où  $\ell = 2$ , le passage au cas général se faisant simplement au prix d'une notation plus compliquée. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x^1 = (1, x_1^1, \dots, x_{m_1}^1)$ ,  $x^2 = (1, x_1^2, \dots, x_{m_2}^2)$ , et donc le vecteur  $x^1$  est un supplémentaire à l'hyperplan de  $\mathbb{K}^{m_1}$  décrit par  $x_1^1 = 0$ , et de même  $x^2$  est un supplémentaire à l'hyperplan de  $\mathbb{K}^{m_2}$  décrit par  $x_1^2 = 0$ . Si  $F$  est de bidegré  $(d_1, d_2)$ , on a la relation d'Euler :

$$dF_{(x^1, x^2)}(x^1, 0) = \sum_{i=0}^{m_1} \frac{\partial F}{\partial x_i^1}(x^1, x^2) \cdot x_i^1 = d_1 \cdot F(x^1, x^2) = 0$$

et de même  $dF_{(x^1, x^2)}(0, x^2) = 0$ . Donc, puisque  $dF_{(x^1, x^2)}$  est surjective par hypothèse, et que le plan  $[x^1] \times [x^2]$  est dans le noyau de  $dF_x$ , et que ce plan est supplémentaire à  $V = \{(0, x_1^1, \dots, x_{m_1}^1, 0, x_1^2, \dots, x_{m_2}^2)\}$ , la restriction de  $dF_x$  à  $V$  doit être surjective; or cette restriction c'est précisément la dérivée de la déshomogénéisation  $F_*$  de  $F$  :

$$F_*(x_1^1, \dots, x_{m_1}^1, x_1^2, \dots, x_{m_2}^2) = F(1, x_1^1, \dots, x_{m_1}^1, 1, x_1^2, \dots, x_{m_2}^2)$$

et  $F_*$  est alors l'équation locale de  $M$  dans le produit de coordonnées affine correspondantes à  $x_0^1 = 1, x_0^2 = 1$ , ce qui montre que c'est un système d'équations de rang maximum, et aussi que l'espace tangent est donné par l'expression énoncée.

*q.e.d.*

Notons que si  $\pi : \mathbb{P}\mathbb{K}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}\mathbb{K}^{m_\ell} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{K}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}\mathbb{K}^{m_h}$ ,  $h < \ell$ , est la projection naturelle sur les  $h$  premiers facteurs, sa dérivée au point  $P([x^1], \dots, [x^\ell])$  s'écrit naturellement :

$$d\pi_P([\bar{x}^1], \dots, [\bar{x}^\ell]) = ([\bar{x}^1], \dots, [\bar{x}^h])$$

et la dérivée de la restriction  $\pi|_M$  de même. Ce qui fait que le noyau de la dérivée de  $\pi|_M$  s'écrit :

$$\text{Ker}(d(\pi|_M)_P) = \left\{ (0, \dots, 0, [\bar{x}^{h+1}], \dots, [\bar{x}^\ell]) \mid dF_P(0, \dots, 0, [\bar{x}^{h+1}], \dots, [\bar{x}^\ell]) = 0 \right\}$$

## I.2.2 Variétés algébriques et variétés $\mathcal{C}^\infty$

Le but de ce § est de faire le lien entre la notion de dimension d'une variété algébrique et celle introduite au paragraphes précédent pour les variétés  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous traiterons simultanément le cas réel et le cas complexe. Pour éviter toute confusion, si  $X \subset \mathbb{K}^n$  est une variété algébrique, et  $a \in X$ , nous posons :

$$T^{\text{Zar}} X_a = \{v \in \mathbb{K}^n \mid df_a(v) = 0, \forall f \in \mathcal{I}(X)\}$$

alors que pour une variété  $M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , par exemple un ouvert transcendant de  $X_{\text{rég}}$ , on notera par  $TM_a$  son espace tangent au sens  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Proposition I.2.6.** *Soient  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $X = V(f_1, \dots, f_k)$  et  $a \in X$ . Supposons que la dérivée de  $f = (f_1, \dots, f_k)$  soit surjective au point  $a$ . Alors :*

i) il y a une seule composante irréductible  $Y$  de  $X$  qui passe par  $a$ , qui est un point régulier de  $Y$

ii)  $T^{Zar}Y_a = \text{Ker}(df_a)$ , et en particulier la dimension de  $Y$  au sens des variétés  $C^\infty$  est égale à la dimension  $Y$  en tant que variété algébriques si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , ou au double de cette dimension si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Preuve:* Quitte à renuméroter les coordonnées de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , on peut supposer que la dérivée au point  $a$  de  $f = (f_1, \dots, f_k)$  par rapport aux variables  $x' = (x_1, \dots, x_k)$  est bijective. Il suit alors du théorème des fonctions implicites qu'il existe un voisinage transcendant  $U$  de  $a$ ,  $V$  de  $a'$  et une application  $g : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  tels que :

$$\text{pour } (x', x'') \in U \quad , \quad f(x', x'') = 0 \Leftrightarrow x'' = g(x')$$

et alors l'application  $h : V \rightarrow U$ ,  $h(x') = (x', g(x'))$  est une bijection de  $V$  sur  $U \cap X$ , et  $dh_{x'}$ ,  $x' \in V$  est une bijection sur  $\text{Ker}(df_{h(x')})$ . Notons que l'inverse de  $h$  est la restriction  $p|_{U \cap X} : U \cap X \rightarrow V$  de la projection naturelle  $p(x', x'') = x'$ .

Soient  $g_1, \dots, g_\ell \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  les générateurs de  $\mathcal{I}(X)$  et posons  $g = (g_1, \dots, g_\ell)$ ; alors il existe des  $a_{i,j} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tels que :

$$f_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_{i,j} \cdot g_j$$

d'où il suit que, si  $x \in X$  :

$$d(f_i)_x = \sum_{j=1}^{\ell} d(a_{i,j})_x \cdot \underbrace{g_j(x)}_{=0} + \sum_{j=1}^{\ell} a_{i,j}(x) \cdot d(g_j)_x$$

et donc

$$\text{Ker}(df_x) \supset \text{Ker}(dg_x) \quad , \quad x \in X \quad .$$

Mais puisque  $g|_X = 0$ , on a que  $g \circ h = 0$  et donc  $dg_{h(x')} \circ dh'_x = 0$ ,  $x' \in U'$ , ce qui entraîne que  $\text{Ker}(dg_x) \supset \text{Ker}(df_x)$ ,  $x \in U \cap X$ , et donc finalement que  $\text{Ker}(df_x) = \text{Ker}(dg_x)$ ,  $x \in U \cap X$ . On a ainsi montré que  $T^{Zar}X_x = TX_x$  pour tout  $x \in U \cap X$ .

Il reste à montrer qu'il n'y a qu'une composante irréductible de  $X$  qui contient  $a$ .

Soit  $\Omega = \{x \in X \mid df_x \text{ est surjective}\}$ ; c'est un ouvert de Zariski de  $X$  et  $a \in \Omega$ . Soit  $Y \subset X$  une composante irréductible de  $X$  qui contient  $a$ , et soit  $X_1$  la réunion de toutes les autres composantes, de sorte que  $X = Y \cup X_1$ . Soient  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  des générateurs de  $\mathcal{I}(Y)$ . Si  $x \in \Omega \cap Y$ ,  $T^{Zar}Y_x \subset T^{Zar}X_x = \text{Ker}(df_x)$ ; d'autre part, si  $b \in \Omega \cap Y \setminus X_1$ ,  $\exists F \in \mathcal{I}(X_1)$  avec  $F(b) \neq 0$ . Alors  $F \cdot h_i \in \mathcal{I}(X)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , et  $\text{Ker}(d(F \cdot h_1, \dots, F \cdot h_r)_b) = \text{Ker}(d(h_1, \dots, h_r)_b)$ , d'où :

$$\text{Ker}(df_b) = T^{Zar}X_b \subset \text{Ker}(d(F \cdot h_1, \dots, F \cdot h_r)_b) = \text{Ker}(d(h_1, \dots, h_r)_b) = T^{Zar}Y_b \subset \text{Ker}(df_b)$$

d'où on déduit que  $\text{Ker}(df_b) = T^{Zar}Y_b$ , pour tout  $b \in \Omega \cap Y \setminus X_1$ , ce dernier étant un ouvert de Zariski non vide de  $Y$ . Donc, en procédant comme dans la première partie de la preuve, il existe des ouverts transcendants  $U' \subset U$ ,  $U' \ni a$ , et  $V' \subset V$ ,  $V' \ni a'$ , tels que  $p|_{U' \cap Y} : U' \cap Y \rightarrow V'$  est une bijection. Comme  $p|_{U' \cap X} : U' \cap X \rightarrow V'$  est aussi une bijection, on doit avoir que  $U' \cap Y = U' \cap X$ ; comme on peut répéter le raisonnement en remplaçant  $a$  par n'importe quel point de  $\Omega \cap Y$ , on a que  $\Omega \cap Y = \Omega \cap X$ .

*q.e.d.*

### I.2.3 Le principe de la conservation du nombre

Nous donnons ici une version du "Princip von der Erhaltung der Anzahl", dû au Dr. Hermann Schubert (1874).

**Proposition I.2.7.** *Soit  $f : M^n \rightarrow N^n$  une application  $C^\infty$  entre les 2 variétés  $C^\infty$  ayant même dimension  $n$ . Supposons que :*

i)  *$f$  est propre, c'est-à-dire que si  $K \subset N$  est compact, alors  $f^{-1}(K) \subset M$  est compact*

ii) pour tout  $x \in M$ ,  $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$  est bijective.

Alors, pour tout  $y \in N$ , il existe un ouvert  $V_y$  de  $N$ ,  $V_y \ni y$ , et des ouverts de  $M$  disjoints  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , tels que :

$$i) f^{-1}(V_y) = \bigcup_{i=1, \dots, k} U_i$$

ii) pour tout  $i : 1, \dots, k$ , la restriction  $f|_{U_i}$  est une bijection sur  $V_y$ .

En particulier, le nombre de points de  $f^{-1}(y')$  est  $k$ , pour tout  $y' \in V_y$ .

**Corollaire I.2.8.** Dans les hypothèses de 2.7, si de plus  $N$  est connexe, alors  $f^{-1}(y)$  est un ensemble fini et son nombre de points ne dépend pas de  $y$ .

*Preuve:* En effet, soit  $y \in N$  et soit  $k$  la cardinalité de  $f^{-1}(y)$ , que nous désignerons par  $\#(f^{-1}(y))$ ; alors, d'après 2.7, l'ensemble

$$F_k = \{y' \in N \mid \#(f^{-1}(y')) = k\}$$

est ouvert, et non vide car il contient  $y$ .

Toujours d'après 2.7, le complémentaire de  $F_k$  est aussi ouvert, donc  $F_k$  est aussi fermé, et puisque  $N$  est connexe,  $F_k = N$ .

*q.e.d.*

*Preuve de 2.7.* Soit  $x \in f^{-1}(y)$ ; puisque  $df_x$  est bijective, il suit du théorème de l'application inverse qu'il existe des ouverts  $U_x \ni x$  de  $M$  et  $V_{x,y} \ni y$  de  $N$  tels que  $f|_{U_x} : U_x \xrightarrow{\cong} V_{x,y}$ . En particulier,  $f^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$ . Alors

$$f^{-1}(y) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x$$

et comme  $f^{-1}(y)$  doit être compact, nécessairement  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ , un ensemble fini. Pour tout  $i = 1, \dots, k$ , on peut restreindre l'ouvert  $U_{x_i}$  en un ouvert noté  $U'_i$ , avec  $x_i \in U'_i \subset U_{x_i}$ , de sorte que  $U'_i \cap U'_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Il suit du fait que  $f$  est propre, et  $M, N$  localement compacts, que l'image par  $f$  d'un fermé est fermé; en particulier,  $f(M \setminus \bigcup_{i=1, \dots, k} U'_i)$  est un fermé, et il ne contient pas  $y$ . Posons alors :

$$V_y = \text{Partez} \bigcap_{i=1, \dots, k} V_{x_i, y} \setminus \text{Partez} f(M \setminus \bigcup_{i=1, \dots, k} U'_i) \quad , \quad U_i = U'_i \cap f^{-1}(V_y)$$

et alors  $f|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\cong} V_y, \forall i = 1, \dots, k$ .

*q.e.d.*

## I.3 Exercices

### A Variétés affines, théorèmes de Pappus et Pascal

1. Trouver les points à l'infini des courbes  $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$ ,  $f(x, y) = y - x^3$

2. Une droite est une courbe d'équation  $ax + by + c = 0$ , avec  $(a, b, c) \neq 0$ . Montrer que deux droites distinctes se coupent toujours en exactement 2 points dans  $\mathbb{P}\mathbb{K}^2$ .

3. La polaire d'une conique est de degré 1, donc une droite. Soient  $q$  une conique et  $\ell$  une droite dans le plan. Montrer que les polaires de  $q$  par rapport aux points de la droite  $\ell$  passent toutes par un même point  $L$ .

# Bibliographie

- [1] David Eisenbud. *Commutative Algebra*. Springer-Verlag, 1995. [11](#)
- [2] M.F. Atiyah et I.G.Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Weseley, 1969. [8](#)
- [3] W. Fulton. *Algebraic Curves*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1969. [11](#)
- [4] J.L. Rabinowitsch. Zum Hilbertschen Nullstellensatz. *Math. Ann.*, 102(1):520, 1930. [22](#)

# Index

$R[X]$ , 13

$\mathbb{K}[X]$ , 13

anneau

régulières, 13

intégralement clos, 18, 20

base de transcendance, 20

corps

des fonctions rationnelles, 13

degré de transcendance, 21, 26

dérivation, 24

dimension

d'une variété affine, 26

élément entier, 18

algébrique

irréductible, 12

extension

algébrique, 20

d'anneaux, 17

de corps, 20

de type fini, 17

entière, 18

transcendante pure, 21

Hessienne, 35

Nullstellensatz

forme faible, 23

forme forte, 11

topologie

de Zariski, 10

transcendante, 10

variété

affine, 12