Chapitre IV

Formes différentielles

Sommaire. Le théorème fondamental du calcul intégral dit que l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$ est égale à la variation d'une primitive $F(x)$ de $f(x)$ sur le bord de l'intervalle :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad , \quad \text{où} \quad F'(x) = f(x) \quad .$$

C'est en fait le cas particulier de la dimension 1 du théorème de Stokes, qui, exprimé en termes très vagues, permet de comparer se qui se passe sur le bord d'un objet de dimension k et à son intérieur. Par exemple, le théorème de Stokes nous permettra de montrer qu'il n'existe pas d'application continue du disque sur son bord, qui est l'identité sur le bord ; de là on déduit le théorème du point fixe de Brower, qui affirme (en dimension 2) que toute application continue du disque dans lui-même admet un point fixe. On en déduira le théorème d'existence de point d'équilibre, obtenu en 1949 par John Nash, qui lui a valu le prix Nobel en économie en 1994.

1 Formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$

Soit E un espace vectoriel su le corps $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 On dit que l'application

$$\alpha : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{r-\text{fois}} \to \mathbb{R}$$

est une r-forme alternée si elle est linéaire par rapport à chaque facteur E, c'est-à-dire :

$$\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i' + \mu v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_r) = \lambda \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_r) + \mu\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_r)$$
$$\forall v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_i'', v_{i+1}, \ldots v_r \in E \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad .$$

On dit qu'une r-forme α sur E est *alternée*, si elle change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs :

$$\forall \ v_i, v_j \in E, \quad 1 \leq i < j \leq r \ :$$
$$\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots) = -\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots)$$

On désignera pas $L^r(E)$ l'espace vectoriel des r-formes et par $\Lambda^r(E)$ l'espace vectoriel des r-formes alternées.

Lorsque $r = 1$, on parle simplement de formes linéaires (la condition d'être alternée est toujours satisfaite, trivialement) .

On pose $\Lambda^0(E) = L^0(E) = \mathbb{R}$: les 0-formes se réduisent aux constantes.

Exemples 1.2

(1) Soit $E = \mathbb{R}^n$. Alors, si $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, soit $\text{dét}(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de $n \times n$ matrice ayant $v_1, \ldots, v_n$ comme vecteurs colonne. C'est une n-forme alternée sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Plus généralement, si $0 < r \leq n$, et on a une suite $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, on peut définir une r-forme alternée $\alpha_{i_1,\ldots,i_r}$ en associant à r vecteurs $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ le $r \times r$ mineur de la matrice ayant $v_1, \ldots, v_r$ obtenu en choisissant les r lignes correspondantes à $i_1, \ldots, i_r$:

$$\alpha_{i_1,\ldots,i_r}(v_1, \ldots, v_r) = \text{dét}\Big(\big(v_{i_h,\ell}\big)_{h,\ell=1,\ldots,r}\Big)$$

Nous verrons (théorème **1.9**) que ces r-formes sont en fait une base de l'espace vectoriel $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$.

Désignons par Σ_r le groupe des permutations de $\{1, \ldots, r\}$, c'est-à-dire le groupe des bijections de cet ensemble ; on commence par quelques rappels sur les permutations. On appelle transposition une permutation qui échange deux éléments de $\{1, \ldots, r\}$, en laissant tous les autres fixes. Toute permutation σ peut s'écrire comme composition de transpositions : $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$. La signature ε_σ de la permutation σ est $(-1)^k$; car si la décomposition d'une permutation comme produit de transpositions n'est pas unique, on montre que la parité du nombre k de transpositions nécessaire lui ne dépend que de σ. Si k est pair, on dit que la permutation σ est paire, sinon on dit qu'elle est impaire.

Proposition 1.3 *Soit α une r-forme sur l'espace vectoriel E. Les 4 conditions suivantes sont équivalentes :*

i) la r-forme α est alternée

ii) pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_r$ et tout $v_1, \ldots, v_r \in E$ on a :

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = \varepsilon_\sigma \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_r)$$

iii) pour tout $v_1, \ldots, v_r \in E$, s'il existe $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$, alors $\alpha(v_1, \ldots, v_r) = 0$.

iv) si $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement dépendants, alors $\alpha(v_1, \ldots, v_r) = 0$.

Preuve: La définition même de forme alternée revient à dire que si $\tau \in \Sigma_r$ est une transposition, ce qui fait que $\varepsilon_\tau = -1$, alors :

$$\alpha(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(r)}) = \varepsilon_\tau \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_r)$$

et donc ii) entraîne i). Si on écrit $\sigma \in \Sigma_r$ comme produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$, alors il suit de i) :

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = (-1)^k \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_r)$$

et puisque $\varepsilon_\sigma = (-1)^k$, i) entraîne ii).

Si α est alternée, et $v_i = v_j$, pour $i \neq j$, alors, en faisant opérer la transposition qui échange i et j sur la suite de vecteurs $v_1, \ldots, v_r$, on voit que :

$$\alpha(v_1, \ldots, v_r) = -\alpha(v_1, \ldots, v_r) \Rightarrow \alpha(v_1, \ldots, v_r) = 0$$

ce qui montre que i) entraîne iii). D'autre part, si α vérifie iii), en supposant que $i < j$, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i + v_j, v_{j+1}, \ldots, v_r) = 0 \\
&= \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_r) + \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_r) + \\
&+ \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_r) + \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_i, \ldots, v_r) = 0 \\
&= \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_r) + \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_r) = 0 \\
&\Rightarrow \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_r) = -\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_r)
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que α est alternée.

La propriété iii) est un cas particulier de iv), car si $v_i = v_j$, $i \neq j$, on a la dépendance linéaire $v_i - v_j = 0$. Inversément, si α satisfait iii) et que $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement dépendants, alors il existe i tel que $v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot v_j$, et donc

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) = \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot \alpha(\underbrace{v_1, \ldots, v_j}_{i}, \ldots, v_r) = 0$$

q.e.d.

Corollaire 1.4 *Si $r > \dim(E)$, alors toute r-forme alternée sur E est identiquement nulle.*

Preuve: Cela suit de **1.3** iv).

q.e.d.

Nous allons définir une généralisation du symbole de Kronecker.

Définition 1.5 Soient $i_1, \dots, i_n$ et $k_1, \dots, k_n$ deux suites de n entiers. On pose

$$\delta^{i_1 \dots i_n}_{k_1 \dots k_n} = \begin{cases} +1 & \text{si les indices } i_1, \dots, i_n \text{ sont distincts et } k_1, \dots, k_n \text{ en est une permutation paire} \\ -1 & \text{si les indices } i_1, \dots, i_n \text{ sont distincts et } k_1, \dots, k_n \text{ en est une permutation impaire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1.6 (Produit extérieur de deux formes alternées) Soient $\alpha \in \Lambda^r(E)$ et $\beta \in \Lambda^s(E)$. On définit la $r+s$-forme $\alpha \wedge \beta$ par :

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{r+s}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_r \leq r+s \\ 1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_s \leq r+s}} \delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}_{1 \dots \dots \dots r+s} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s})$$

On appelle $\alpha \wedge \beta$ le produit extérieur de α et β.

Remarque 1.7 Si $\lambda \in \Lambda^0(E) = \mathbb{R}$, alors $\lambda \wedge \beta = \lambda \cdot \beta$.

Proposition 1.8 *Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :*
i) $\alpha \wedge \beta$ est une $r+s$-forme alternée
ii) distributivité ; si $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^r(E)$:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$$

iii) anticommutativité :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{r \cdot s} \beta \wedge \alpha$$

iv) associativité ; si $\gamma \in \Lambda^t(E)$:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

ce qui autorise à noter $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ pour l'une ou l'autre de ces expressions.

Preuve: Remarquons d'abord que si $h_1, \dots h_{r+s}$ est une permutation de $1, \dots, r+s$, alors

$$\delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}_{h_1 \dots \dots h_{r+s}} = \delta^{1 \dots \dots r+s}_{h_1 \dots h_{r+s}} \cdot \delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}_{1 \dots \dots \dots r+s}$$

et donc

$$(\alpha \wedge \beta)(v_{h_1}, \dots, v_{h_{r+s}}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_r \leq r+s \\ 1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_s \leq r+s}} \delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}_{h_1 \dots \dots h_{r+s}} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) =$$

$$= \delta^{1 \dots \dots r+s}_{h_1 \dots h_{r+s}} \cdot \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_r \leq r+s \\ 1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_s \leq r+s}} \delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}_{1 \dots \dots \dots r+s} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) \right) = \delta^{1 \dots \dots r+s}_{h_1 \dots h_{r+s}} \cdot (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{r+s})$$

ce qui montre que la propriété ii) de la proposition **1.3** est satisfaite, et donc $\alpha \wedge \beta$ est bien une forme alternée.

La distibutivité se vérifie sans difficulté.

L'anticommutativité suit du fait que $\delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}_{1 \dots \dots \dots r+s} = (-1)^{r \cdot s} \cdot \delta^{j_1 \dots j_s i_1 \dots i_r}_{1 \dots \dots \dots r+s}$.

Vérifions l'associativité

$$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{r+s+t}) = \sum \delta^{h_1 \dots h_{r+s} k_1 \dots k_t}_{1 \dots \dots \dots \dots r+s+t} \cdot (\alpha \wedge \beta)(v_{h_1}, \dots, v_{h_{r+s}}) \cdot \gamma(v_{k_1}, \dots, v_{k_t})$$
$$= \sum \underbrace{\delta^{h_1 \dots h_{r+s} k_1 \dots k_t}_{1 \dots \dots \dots \dots r+s+t} \cdot \delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}_{h_1 \dots \dots h_{r+s}}}_{= \delta^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s k_1 \dots k_t}_{1 \dots \dots \dots \dots \dots r+s+t}} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) \cdot \gamma(v_{k_1}, \dots, v_{k_t})$$

où il est sous-entendu que $1 \leq h_1 < \cdots < h_{r+s} \leq r+s+t$, etcetera. On arrive à la même expression si l'on part de $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

q.e.d.

La dernière formule se généralise sans autre au produit de plusieurs formes alternées :

$$(\alpha \wedge \beta \wedge \ldots \wedge \gamma)(v_1, \ldots, v_{r+s+\cdots+t}) = \sum \delta^{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s \ldots k_1 \ldots k_t}_{1 \ldots\ldots\ldots\ldots r+s \ldots +t} \cdot \alpha(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}) \cdot \ldots \cdot \gamma(v_{k_1}, \ldots, v_{k_t})$$

où, afin d'éviter des triples indices, nous indiquons par $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ un certain nombre de formes alternées, d'ordre respectivement $r, s, \ldots, t$. En particulier, si on a des 1-formes $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, on a :

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r)(v_1, \ldots, v_r) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_r \\ 1 \leq i_h \leq r}} \delta^{i_1 \ldots i_r}_{1 \ldots\, r} \cdot \varphi_1(v_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi_r(v_{i_r}) = \text{dét}\big(\varphi_i(v_j)\big)_{i,j=1,\ldots r}$$

Théorème 1.9 *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une base de l'epace des formes linéaires de l'espace vectoriel E. Alors les $\binom{n}{r}$ r-formes alternées $\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n}$ forment une base de l'espace vectoriel $\Lambda^r(E)$.*

Preuve: Désignons par $e_1, \ldots, e_n$ la base de E dont $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ est duale, de sorte que

$$\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

Prenons $\alpha \in \Lambda^r(E)$ et r vecteurs $v_1, \ldots, v_r \in E$, que l'on peut écrire dans la base $e_1, \ldots, e_n$ sous la forme :

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{i,j} \cdot e_j$$

et alors, puisque α est multilinéaire :

$$\alpha(v_1, \ldots, v_r) = \alpha\Big(\sum_{i_1=1}^{n} v_{1,i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_r=1}^{n} v_{1,i_r} e_{i_r}\Big) = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n} v_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot v_{r,i_r} \cdot \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$$

et puisque α est alternée :

$$\sum_{i_1, \ldots, i_r} v_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot v_{r,i_r} \cdot \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) \underbrace{\Big(\sum_{j_1, \ldots, j_r \in \{i_1, \ldots, i_r\}} \delta^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} v_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot v_{r,j_r} \Big)}_{= \text{dét}(v_{h,i_\ell})_{h,\ell=1,\ldots r}}$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) \cdot (\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_r})(v_1, \ldots, v_r)$$

et donc, si l'on pose $\alpha_{i_1, \ldots, i_r} = \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \ldots, i_r} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_r}$$

ce qui montre bien que les $\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n}$ engendrent l'espace vectoriel $\Lambda^r(E)$. Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes. Supposons d'avoir une relation du type :

$$\heartsuit \qquad \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_r} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_r} = 0 \quad , \quad \lambda_{i_1, \ldots, i_r} \in \mathbb{R}$$

et remarquons que

$$(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_r})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = \delta^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1 \ldots, j_r} \quad .$$

Il suit alors de $\heartsuit$ que :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \lambda_{i_1, \ldots, i_r} \cdot (\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_r})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = \lambda_{j_1, \ldots, j_r} = 0 \quad \forall\, 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$$

et donc les $\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_r}\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n}$ forment bien une base de $\Lambda^r(E)$.

q.e.d.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base naturelle, dans ce contexte on a l'habitude de noter $dx_1, \ldots, dx_n$ la base duale, de sorte qu'une forme r-alternée sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \quad , \quad \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \in \mathbb{R}$$

Remarque 1.10 Dans $\mathbb{R}^3$, les espaces $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ et $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ sont tous deux de dimension 3, donc isomorphes entre eux et isomorphes à $\mathbb{R}^3$, et $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ est de dimension 1, donc isomorphe à $\mathbb{R}$. Si on choisit les isomorphismes :

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\simeq} \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \quad , \quad (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 \cdot dx_1 + a_2 \cdot dx_2 + a_3 \cdot dx_3$$
$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\simeq} \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + a_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + a_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2$$

(notez la permutation cyclique des indices $1, 2, 3$)

le produit extérieur de deux 1-formes fournit un produit sur $\mathbb{R}^3$, qui n'est autre que le produit vectoriel :

$$(a_1 \cdot dx_1 + a_2 \cdot dx_2 + a_3 \cdot dx_3) \wedge (b_1 \cdot dx_1 + b_2 \cdot dx_2 + b_3 \cdot dx_3) =$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot dx_2 \wedge dx_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot (dx_3 \wedge dx_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (dx_1 \wedge dx_2)$$

soit :

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Transposition par une application linéaire

Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et soit $A : E \to F$ une application linéaire. On en déduit une application linéaire $\Lambda^r(A)$ au niveaux des r-formes de la manière suivante :

$$\Lambda^r(A) : \Lambda^r(F) \to \Lambda^r(E) \quad , \quad \Lambda^r(A)(\alpha)_{(v_1,\ldots,v_r)} = \alpha(A(v_1), \ldots, A(v_r)) \quad .$$

Notez que si $r = 1$, on retrouve la définition de la duale d'une application linéaire.

Proposition 1.11 *(1) Si E, F et G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $A : E \to F$ et $B : F \to G$ des applications linéaires, alors*

$$\Lambda^r(B \circ A) = \Lambda^r(A) \circ \Lambda^r(B)$$

(2) si $I_E : E \to E$ désigne l'application identité, alors

$$\Lambda^r(I_E) = I_{\Lambda^r(E)}$$

(3) si $\alpha \in \Lambda^r(E)$ et $\beta \in \Lambda^s(E)$, on a :

$$\Lambda^{r+s}(A)(\alpha \wedge \beta) = \Lambda^r(A)(\alpha) \wedge \Lambda^s(A)(\beta)$$

(4) si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E et $f_1, \ldots, f_p$ est une base de F, avec bases duales respectivement $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \ldots, \psi_p$, alors, pour toute suite $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ on a :

$$\Lambda^r(A)(\psi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \psi_{i_r}) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le p} A_{i,j} \cdot (\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_r})$$

où $A_{i,j}$ désigne le mineur de la matrice de A dans les bases e_k, f_ℓ, correspondant aux suites i et j ; explicitement, si $(a_{k,\ell})$ désigne la matrice de A :

$$A_{i,j} = d\acute{e}t(a_{i_k, j_\ell})_{k,\ell=1,\ldots,r}$$

Toutes ces propriétés se vérifient aisément à partir des définitions. ■

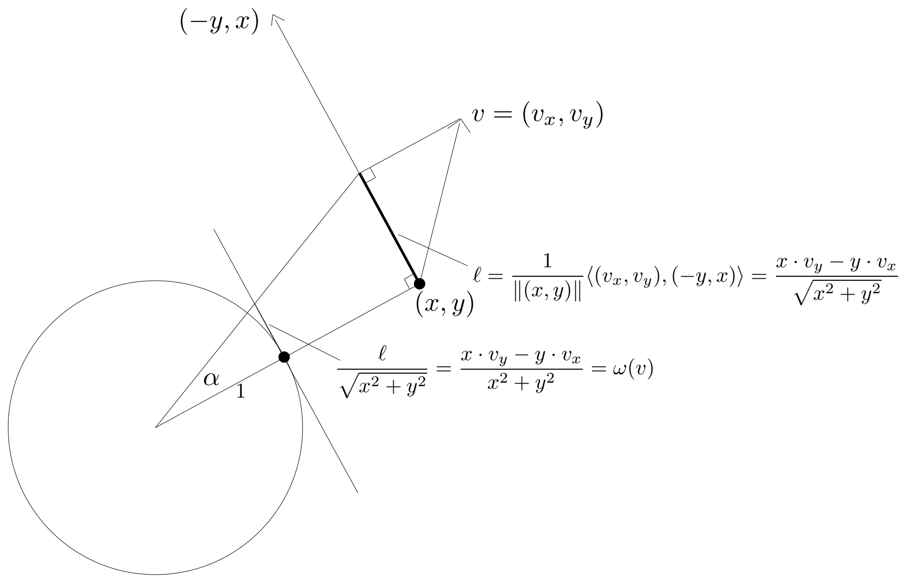


FIG. IV.1 – Interprétation géométrique de la forme ω

2 Formes différentielles

Définition 2.1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et r un entier compris entre 0 et n. Une r-forme différentielle sur U est une application $\omega : U \to \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En d'autres termes, une r-forme différentielle sur U est la donnée, pour tout point x de U, d'une r-forme alternée sur $\mathbb{R}^n$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du point x.

En utilisant la base naturelle de $\mathbb{R}^n$ et la base de $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ qu'on en déduit, on peut écrire

$$\omega(x) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_r}(x)\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}$$

les $\binom{n}{r}$ fonctions $\omega_{i_1,\ldots,i_r}(x)$ étant définies sur U et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On dénote par $\Omega^r(U)$ l'espace des r-formes différentielles sur U

Exemples 2.2

(1) Voici une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$:

$$x_2\cdot dx_1 + x_2^2 x_3 dx_2 - x_1 x_3 \cdot dx_3$$

(2) La 1-forme sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ suivante nous sera utile par la suite :

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \quad .$$

On peut interpréter cette forme en remarquant que $\omega(x)_{(v)}$ vaut $\tan(\alpha)$, où α est l'angle constitué par le vecteur (x,y) et le vecteur $v=(v_x,v_y)$ (voir figure **4.1**). Si α est petit, $\tan(\alpha)\approx\alpha$.

(3) Si $f : U\to\mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, on note par df sa dérivée, qui peut être vue comme un élément de $\Omega^1(U)$, qu'on peut aussi écrire :

$$df = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot dx_i$$

(4) On note par $\Omega^0(U)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U ; c'est cohérent avec le fait que $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$.

Les constructions que l'on a introduites pour les formes alternées induisent des constructions analogues pour les formes différentielles.

Tout d'abord, notons que $\Omega^r(U)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension non finie en général : si $\alpha, \beta \in \Omega^r(U)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on peut poser

$$(\lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \beta)(x) = \lambda \cdot \alpha(x) + \mu \cdot \beta(x) \quad .$$

Produit extérieur de deux formes

Soient $\alpha \in \Omega^r(U)$, $\beta \in \Omega^s(U)$; on définit leur produit extérieur par :

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = (\alpha(x)) \wedge (\beta(x)) \quad .$$

les propriétés de distributivité, anticommutativité et associativité pour le produit extérieur de formes différentielles sont conséquence des propriétés analogues pour le produit de formes alternées établies dans la propostion **1.8**.

Notons que si $a(x) \in \Omega^0(U)$ est une fonction et $\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$, alors

$$a(x) \wedge \beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a(x) \cdot \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

que l'on peut aussi bien écrire $a(x) \cdot \beta$.

Transposition par une application $\mathcal{C}^\infty$

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts et $f : U \to V$ une application $\mathcal{C}^\infty$. Elle induit une application $f^* : \Omega^r(V) \to \Omega^r(V)$, pour tout r, définie par la formule suivante :

$$f^*(\omega)(x) = \Lambda^r(df_x)(\omega(f(x)))$$

soit, explicitement :

$$f^*(\omega)(x)_{(v_1,\ldots,v_r)} = \omega(f(x))_{(df_x(v_1),\ldots,df_x(v_r))}$$

On voit qu'il est indispensable que f soit au moins de classe $\mathcal{C}^1$, puisque l'expression de f^* fait appelle à la dérivée de f. Si on note $f = (f_1, \ldots, f_p)$ et $dy_1, \ldots, dy_p$ le 1-formes de base duales à la base naturelle de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$f^*(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_r}) = df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_r} \quad .$$

Notons qu'il suit de **1.11**(3) que $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

Vient maintenant une nouvelle opération sur les formes différentelles, qui généralise la dérivée d'une fonction.

La différentielle extérieure

Définition 2.3 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\omega \in \Omega^r(U)$, que l'on peut écrire :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_r}(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

où les $\omega_{i_1,\ldots,i_r}(x)$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On définit la différentielle extérieur de ω comme étant la $r+1$-forme différentielle définie par

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \quad .$$

Ceci définit une application $d : \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$ pour tout $r \geq 0$.

Exemples 2.4 (1) Soit

$$\omega = xyz \cdot dx + yz \cdot dy + (x+y+z) \cdot dz$$

alors

$$d\omega = yz \cdot \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + xz \cdot dy \wedge dx + xy \cdot dz \wedge dx + y \cdot dz \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz =$$

$$(1-y) \cdot dy \wedge dz + (xy-1) \cdot dz \wedge dx - xz \cdot dx \wedge dy$$

(2) Si $f \in \Omega^0(U)$, $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$, ce qui montre que cette notation est cohérente avec la notation de dérivée d'une application.

(3) Calculons la différentielle extérieure de la forme différentielle de l'exemple **2.2(2)** :

$$d\left(\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot \underbrace{dy \wedge dy}_{=0}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \cdot \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \cdot dy \wedge dx$$

$$= \left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \cdot dx \wedge dy + \left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \cdot dx \wedge dy = 0$$

(4) Soit (a,b,c) un triplet de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, que l'on peut regarder comme un champ de vecteurs sur U. En utilisant les isomorphismes de la remarque **1.10**, on peut lui associer

(a) une 1-forme différentielle φ sur U :

$$\varphi = a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz$$

(b) une 2-forme différentielle ω sur U :

$$\omega = a \cdot dy \wedge dz + b \cdot dz \wedge dx + c \cdot dx \wedge dy$$

On a :

$$d\varphi = \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial c}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial c}{\partial y} dy \wedge dz$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

et on reconnait les 3 composantes du rotationnel du champ (a,b,c) dans les facteurs de $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ et $dx \wedge dy$ respectivement (*dans cet ordre*).
Au tour de la différentielle de ω :

$$d\omega = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

et on reconnait que le facteur de $dx \wedge dy \wedge dz$ est la divergence du champs (a,b,c).

Voici les propriétés fondamentales de la différentielle extérieure.

Proposition 2.5 *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts.*
i) Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^r(U)$. Alors

$$d(\alpha_1 + \alpha_2) = d\alpha_1 + d\alpha_2$$

ii) Soient $\alpha \in \Omega^r(U)$, $\beta \in \Omega^s(U)$, $r,s \geq 0$. Alors :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \cdot \alpha \wedge d\beta$$

iii)

$$d(d\alpha)=0$$

iv) Soit $f:U\to V$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\omega\in\Omega^r(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$d(f^*(\omega))=f^*(d\omega)$$

Preuve: i) est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivée.

Pour ii), prenons d'abord un cas particulier de formes :

$$\alpha=a(x)\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}\quad,\quad\beta=b(x)\cdot dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_s}$$

alors

$$d(\alpha\wedge\beta)=d(a(x)b(x)\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_s})$$

$$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\,(a\cdot b)}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_s}=$$

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\cdot b+a\cdot\frac{\partial b}{\partial x_i}\right)dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_s}=$$

$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial a}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}\right)\wedge(b(x)\cdot dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_s})+$$

$$(a(x)\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r})\wedge\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial b}{\partial x_i}(-1)^r dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_s}\right)=$$

$$d\alpha\wedge\beta+(-1)^r\alpha\wedge d\beta$$

et de là on déduit le cas général par linéarité de la différentielle extérieure et distributivité du produit extérieur.

Pour iii) et iv) on utilise le même procédé. Soit $\alpha=a(x)\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}$; alors

$$d(d\alpha)=d\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial a}{\partial x_i}(-1)^i dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}\right)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 a}{\partial x_j\partial x_i}(-1)^j(-1)^i dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}=$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_j\partial x_i}(-1)^j(-1)^i dx_j\wedge dx_i+\frac{\partial^2 a}{\partial x_i\partial x_j}(-1)^i(-1)^j dx_i\wedge dx_j\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_r}=0$$

Pour iv), prenons d'abord le cas où $\alpha=a(y)$, une 0-forme, auquel cas $f^*(a)$ est simplement la composée $a\circ f$:

$$f^*(d\alpha)=f^*\left(\sum_{i=1}^p\frac{\partial a}{\partial y_i}dy_i\right)=\sum_{i=1}^p\frac{\partial a}{\partial y_i}{}_{(f(x))}\,df_i=\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^n\frac{\partial a}{\partial y_i}{}_{(f(x))}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j=$$

$$\sum_{j=1}^n\underbrace{\left(\sum_{i=1}^p\frac{\partial a}{\partial y_i}{}_{f(x)}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)}_{=\frac{\partial(a\circ f)}{\partial x_j}}dx_j=d(a\circ f)=d(f^*(\alpha))\quad.$$

Maintenant on prend $\alpha=a(y)\cdot dy_{i_1}\wedge\ldots\wedge dy_{i_r}$. Alors :

$$f^*(\alpha)=a(f(x))\cdot df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_r}=f^*(a)\wedge df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_r}$$

et donc

$$d(f^*(\alpha))=d\Big(f^*(a))\cdot df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_r}\Big)\overset{\text{par ii)}}{=}$$

$$=\underbrace{d(f^*(a))}_{=f^*(d(a))}\wedge\Big(df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_r}\Big)+f^*(a)\wedge\underbrace{d\Big(df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_r}\Big)}_{=0\quad\text{par ii) et iii)}}=$$

$$=f^*(d(a))\wedge f^*(dy_{i_1})\wedge\ldots\wedge f^*(dy_{i_r})=f^*\big(d(a)\wedge dy_{i_1}\wedge\ldots\wedge dy_{i_r}\big)=f^*(d(\alpha))\quad.$$

q.e.d.

3 Intégration de formes et théorème de Stokes

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega = a(x) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ une n-forme sur U et $A \subset U$ un sous-ensemble de bord néligeable, au sens de la théorie de la mesure. On définit l'intégrale de ω sur A par :

$$\int_A \omega = \int_A a(x) dx_1 \ldots dx_n$$

Soit $I^n = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ le cube standard et définissons, pour $i = 1, \ldots n$ et $\varepsilon = 0, 1$:

$$\varphi_{i,\varepsilon} : I^{n-1} \to I^n \quad , \quad \varphi_{i,\varepsilon}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (\underbrace{x_1, \ldots x_{i-1}, \varepsilon}_{i}, x_i, \ldots, x_n)) \quad .$$

il s'agit de paramétrisations naturelles des $2n$ faces du cube I^n.

Proposition 3.1 (Le lemme de Stokes) *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant le cube I^n et soit ω une $n-1$-forme sur U. Alors :*

$$\int_{I^n} d\omega = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ \varepsilon=0,1}} (-1)^{i+\varepsilon} \int_{I^{n-1}} \varphi_{i,\varepsilon}^*(\omega) \quad .$$

Preuve: On peut écrire

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où le symbole $\widehat{dx_i}$ indique que ce terme est ôté. Alors

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} (-1)^{i-1} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et donc

$$\heartsuit \qquad \int_{I^n} d\omega = \sum_{i=1}^n \int_{I^n} (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{I^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots d_n$$

Or

$$\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i = a_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) - a_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \sum_{\varepsilon=0,1} (-1)^{\varepsilon-1} \varphi_{i,\varepsilon}^*(\omega)$$

et alors $\heartsuit$ donne :

$$\int_{I^n} d\omega = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ \varepsilon=0,1}} (-1)^{i+\varepsilon} \int_{I^{n-1}} \varphi_{i,\varepsilon}^*(\omega) \quad .$$

q.e.d.

On étend les intégrales de formes à des objets paramétrés. Soit $\varphi : I^r \to U$ une application $\mathcal{C}^\infty$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\omega \in \Omega^r(U)$. On pose :

$$\int_\varphi \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{I^r} \varphi^*(\omega)$$

Exemple 3.2 Soit
$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$
et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la paramétrisation du cercle :
$$\varphi(t) = (\cos(2\pi t), sin(2\pi t)) \quad .$$
Alors
$$\varphi^*(\omega) = \frac{\cos(2\pi t) \cdot d(\sin(2\pi t)) - \sin(2\pi t) \cdot d\cos(2\pi t)}{\cos(2\pi t)^2 + \sin(2\pi t)^2} = 2\pi \cdot dt$$
et donc
$$\int_\varphi \omega = \int_0^1 2\pi \cdot dt = 2\pi \quad .$$
Ce résultat n'est pas étonnant, au vu de l'interprétation de ω donnée dans **2.2**(2)

Définition 3.3 Une r-chaîne cubique, singulière de U est une expression de la forme :
$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k$$
où $c_k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_k : I^r \to U$ est une application $\mathcal{C}^\infty$, $k = 1, \ldots, \ell$.

On dit aussi simplement que $c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k$ est une r-chaîne. Remarquons que le signe somme est purement formel : aucune somme n'est effectuée, c'est une façon de se donner la collection des c_k et φ_k.

On définit le bord $\partial\varphi_k$ comme étant la $r-1$-chaîne :
$$\partial(\varphi_k) = \sum (-1)^{i+\varepsilon}(\varphi_k \circ \varphi_{i,\varepsilon})$$
et le bord de la k-chaîne $c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k$ par :
$$\partial c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \partial\varphi_k \quad .$$
On note par $C_r(U)$ l'ensemble des r-chaînes cubiques singulière, qui est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; $\partial : C_r(U) \to C_{r-1}(U)$ est une application linéaire.

Si $c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k \in C_r(U)$ et $\omega \in \Omega^r(U)$, on pose :
$$\int_c \omega = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \int_{c_k} \omega$$

Théorème 3.4 (Théorème de Stokes) *Soit $c \in C_r(U)$ et $\omega \in \Omega^{r-1}(U)$. Alors :*
$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$
Preuve: Cela résulte immédiatement du lemme de Stokes et des définitions. ∎

4 Applications

Le théorème du point fixe de Brower

Théorème 4.1 *Soit $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité et S^1 son bord. Il n'existe pas d'application continue $f : D^2 \to S^1$ qui soit l'identité en restriction au bord S^1.*

Preuve: Soient

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \quad , \quad \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad , \quad \varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

et

$$\psi : I^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \psi(t_1,t_2) = t_1 \cdot ((\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2))$$

de sorte que

$$\partial\psi = (-1)\cdot 0 \cdot (\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2)) + t_1 \cdot (\cos(0), \sin(0)) + (\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2)) - t_1(\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = \varphi \quad .$$

On se rappelle aussi que $d\omega = 0$ (exemple **2.4(3)**). Par abus, et souci de clarté, on écrira S^1 au lieu de φ et D^2 au lieu de ψ, de sorte que $S^1 = \partial D^2$.

On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $f : D^2 \to D^2$ qui soit l'identité sur S^1.

Supposons d'abord que f soit $\mathcal{C}^\infty$, ce qui signifie qu'il existe un ouvert $U \supset D^2$ et une application $\mathcal{C}^\infty$ $g : U \to \mathbb{R}^2$ qui étend f ; cela permet de donner un sens à la transposition $f^*(\omega)$. Puisque $f|S^1 = id_{S^1}$, on aurait, en appliquant le théorème de Stokes :

$$\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} f^*(\omega) = \int_{\partial D^2} f^*(\omega) = \int_{D^2} \underbrace{d(f^*(\omega))}_{=f^*(d\omega)=0} = 0 \neq 2\pi$$

donc un tel f ne peut pas exister.

Dans le cas général, prenons d'abord $\varepsilon > 0$ petit et définissons $g : D^2 \to \mathbb{R}^2$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x)(1-\varepsilon)) & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ x(1-\varepsilon) & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que g est à valeurs dans $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1-\varepsilon\}$, et pour $\|x\| \geq 1-\varepsilon$, $g(x) = x(1-\varepsilon)$ est proche de l'identité ; en particulier, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $\|x\| \geq 1-\varepsilon/2$. On invoque alors le théorème d'approximation de Weierstrass[1] pour conclure à l'existence d'une application $h : D^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, proche de g avec ses premières dérivées pour $\|x\| \geq 1-\varepsilon/2$; en particulier, h sera à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors $\int_{S^1} \omega$ est proche de $\int_{S^1} h^*(\omega)$, donc non nulle, mais d'autre part on trouve comme tout-à-l'heure, par le théorème de Stokes :

$$\int_{S^1} h^*(\omega) = \int_{\partial D^2} h^*(\omega) = \int_{D^2} \underbrace{d(h^*(\omega))}_{=h^*(d\omega)=0} = 0$$

ce qui est une contradiction.

q.e.d.

On exprime le resultat précédent en disant que D^2 ne peut pas se rétracter sur son bord. En fait ce résultat est valable pour les disques de toute dimension : $D^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1\}$ ne peut pas se rétracter sur la spère $S^{n-1} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1\}$. Pour $n=1$ c'est un petit exercice, pour $n \geq 3$ cela peut se démontrer de manière analogue au théorème précédent.

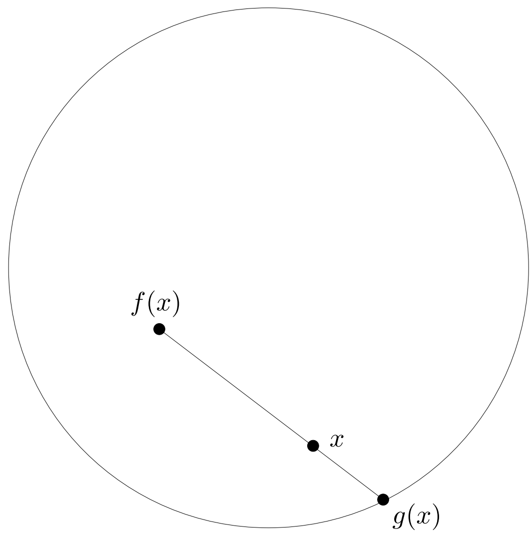
Une conséquence du théorème précédent est le théoréme du point fixe de Brower :

Théorème 4.2 *Toute application continue $f : D^2 \to D^2$ possède un point fixe : $\exists\, a \in D^2$ tel que $f(a) = a$.*

Preuve: Si $f : D^2 \to D^2$ n'a pas de point fixe, on en déduit une rétraction g de D^2 sur son bord de la manière suivante : si $x \in D^2$, puisque $f(x) \neq x$, on peut tracer la demi-droite issue de $f(x)$ passant pas x ; $g(x)$ sera l'intersection de cette demi-droite avec le bord de D^2. En formule, cela donne

$$g(x) = x + \frac{\sqrt{\langle x, x-f(x)\rangle^2 + (1-\|x\|^2)\cdot\|x-f(x)\|^2} - \langle x, x-f(x)\rangle}{\|x-f(x)\|^2} \quad .$$

[1]Une version simplifiée de ce théorème à été démontrée dans **I.2.10**



[h]

FIG. IV.2 – La rétraction $g(x)$ associée à $f(x)$

Le lecteur pourra faire les multiples vérifications nécessaires par lui-même, ou simplement s'en convaincre sur le dessin (figure **IV.2**).

q.e.d.

Notons que le théorème de Brower est vrai en toute dimension, avec une preuve qui suit suit le mêmes lignes que le cas particulier que nous avons traité ici.

Le théorème de Nash sur l'existence de points d'équilibre

Ce résultat de Nash se place dans la théorie des jeux, et trouve son application dans la modélisation de stratégies économiques. On en donne ici une version simplifiée, calquée sur l'exposition donnée par John Milnor dans[7].

On suppose qu'il y a n joueurs, numérotés de 1 à n. Le i-ème joueur choisit la valeur d'une variable s_i dans un ensemble S_i, l'ensemble des stratégies possibles pour le i-ème joueur, ceci pour $i = 1, \dots, n$; les joueurs choisissent leur stratégies simultanément. A chaque joueur correspond une fonction "gain" $p_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$. Chaque joueur essaie de maximaliser son gain $p_i(s_1, \dots, s_n)$, mais ne peut choisir que sa propre stratégie s_i. Le but du jeu est de faire en sorte que chaque joueur puisse gagner de manière satisfaisante (par opposition aux jeux dits "à somme nulle", comme la guerre, où les uns gagnent dans la mesure où les autres perdent).

La première contribution importante de Nash a été de donner une notion appropriée de point d'équilibre pour ces jeux ; la voici :

Définition 4.3 Un n-tuple de stratégies $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ est un point d'équilibre si aucun joueur ne peut augmenter son gain $p_i(s_1, \dots, s_n)$ en changeant la valeur de s_i, pendant que les s_j, $j \neq i$, restent fixes.

Exemple 4.4 Un groupe de n personnes va dîner au restaurant. Le prix des menus varie de 20 à 30 francs ; on décide de partager la facture en n parts égales, indépendamment du menu choisi. Ici $s_i =$ prix du menu choisi par i, et $S_i = [20, 30]$; le gain de chacun est la différence entre le prix du menu qu'il a choisi et ce qu'il paye :

$$p_i(s_1, \dots, s_n) = s_i - 1/n(s_1 + \cdots + s_n) \quad .$$

On voit que p_i est strictement croissante en s_i, quelles que soient les valeurs des autres s_j. Le seul point d'équilibre est donc $(30, \dots, 30)$: tout le monde choisit le menu le plus cher.

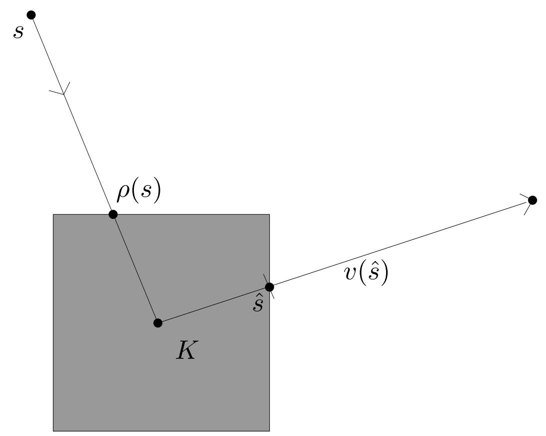


FIG. IV.3 – Interprétation du lemme **4.7**

Et voici le résultat principal.

Théorème 4.5 *Supposons que les ensembles S_i soient des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, n$ et que les fonctions $p_i : S_i \to \mathbb{R}$ soient continues par rapport à l'ensemble des variables $(s_1, \ldots, s_n)$ et linéaires par rapport à la variable s_i. Alors il existe au moins un point d'équilibre.*

Nous ferons la démonstration seulement dans le cas où $n = 2$ et $S_1 = S_2 = [-1, 1]$; l'idée est de se ramener au théorème de Brower, que nous avons démontré dans le cas $n = 2$. Donc on suppose dorénavant que $S_1 = S_2 = [-1, 1]$.

Exemple 4.6 Voici un exemple abstrait. On prend $p_1(s_1, s_2) = s_1 \cdot s_2^2$ et $p_2 = s_1^4 \cdot s_2 - 3s_1^3 + 2$. Les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$ sont des points d'équilibre.

Lemme 4.7 *Soit $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et $v : K \to \mathbb{R}^2$ continue. Alors :*
- *soit il existe $\hat{s} \in K$ avec $v(\hat{s}) = 0$*
- *soit il existe $\hat{s}$ sur le bord de K tel que $v(\hat{s})$ pointe vers l'extérieur de K.*

Preuve: Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to K$ la rétraction de $\mathbb{R}^2$ sur K définie par

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|_\infty} & \text{si } \|(x, y)\|_\infty \geq 1 \\ (x, y) & \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad \text{où } \|(x, y)\|_\infty = \sup\{|x|, |y|\}$$

Alors l'application $f : K \to K$, $f(s) = \rho(s + v(s))$, admet un point fixe $\hat{s}$ d'après le théorème du point fixe de Brower **4.2**.
- si $\hat{s} + v(\hat{s}) \in K$, alors
$$\hat{s} = \hat{s} + v(\hat{s}) \quad \Rightarrow \quad v(\hat{s}) = 0$$
- sinon $\hat{s} + v(\hat{s}) \notin K$, donc $\hat{s} = \rho(\hat{s} + v(\hat{s}))$ est sur le bord de K, et $v(\hat{s})$ pointe vers l'extérieur de K (voir figure **IV.3**).

q.e.d.

Preuve de **4.5**. On applique le lemme à $v(s_1, s_2) = (\frac{\partial p_1}{\partial s_1}, \frac{\partial p_2}{\partial s_2})$.

q.e.d.