UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 1

21 octobre 2003

---

1. Décrire les ensembles de nombres complexes définis par chacune des 5 conditions suivantes:

$$|z-i|=1, \quad |z+5|<1, \quad z+\bar{z}=1, \quad z-\bar{z}=-i, \quad z+\bar{z}=|z|^2.$$

2. Montrer l'identité de Lagrange

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big|^2 = \sum_{j=1}^{n}|a_j|^2 \sum_{j=1}^{n}|b_j|^2 - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|a_j\bar{b}_k - a_k\bar{b}_j|^2,$$

pour $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{C}$. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^n$:

$$\Big|\sum a_j\bar{b}_j\Big| \leqslant \Big(\sum |a_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum |b_j|^2\Big)^{1/2}.$$

3. La projection stéréographique $\mathbb{S}^2\setminus\{N\}\to\mathbb{C}$ est définie par $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1+ix_2)/(1-x_3)=z$, pour $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ et $N=(0,0,1)$. Vérifier les formules:

$$|z|^2=\frac{1+x_3}{1-x_3}; \quad x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \quad x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, \quad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x^n$. Calculer $\|f_n\|_\infty$, $\|f_n\|_1$, $\|f_{n+k}-f_n\|_\infty$, $\|f_{n+k}-f_n\|_1$.

5. Soit la suite de fonctions :

$$f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n}-n\sqrt{n}x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1/n,\\ 0 & \text{si } 1/n\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Calculer les normes $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ de f_n. Etudier la convergence de cette suite de fonctions.

6.

a) Soit $f_n(x)=(x\cdot(1-x))^n$. Calculer $\sup\{f_n(x), 0\leqslant x\leqslant 1\}$ et en déduire que f_n tend uniformément vers 0, pour $x\in[0,1]$.

b) Soit $P[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, c'est-à-dire les fonctions de la forme $\sum_{h=0}^{d} a_h x^h$. Montrer que

$$\Big\|\sum_{h=0}^{d} a_h x^h\Big\|_* = \sum_{0\leqslant h\leqslant d}|a_h|$$

définit une norme sur $P[0,1]$.

Montrer que $\|f\|_\infty\leqslant\|f\|_*$, pour tout $f\in P[0,1]$. Néanmoins, déduire de a) que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

c) Montrer que si $f_n(x)=\sum_{h=0}^{d} a_h^n x^h$, $n=1,\dots,\infty$ est une suite dans $P[0,1]$ vérifiant $\deg(f_n)\leqslant d$, $\forall n\geqslant 1$, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)|, 0\leqslant x\leqslant 1\}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_h^n=0 \quad , \quad \forall h=0,\dots,d.$$