UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 10

6 janvier 2004

---

1. Justifier les formules suivantes:

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi; \qquad \frac{x^2}{2} = \pi x - \pi^2/3 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$$

$$\pi/4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad 0 < x < \pi; \quad \sin x = 2/\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \quad 0 < x < \pi.$$

2. Pour $y \geqslant 0$, on pose

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}\sin x}{x}\, dx.$$

Vérifier que F est continue sur $[0,\infty[$, différentiable sur $]0,\infty[$ et que $F'(y) = \dfrac{-1}{1+y^2}$. Montrer aussi que $\lim_{y\to\infty} F(y) = 0$ et $F(y) = \pi/2 - \arctan y$. En dduire

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi/2.$$

3. (Lemme de Riemann-Lebesgue pour intégrales impropres.)
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ une fonction absolument intégrable. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\, dx \to 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to \infty.$$

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver pour quelles valeurs de a et r les zéros de l'application suivantes sont tous réguliers :

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1, x^2+(y-b)^2+z^2-r^2)$$

5. Esquisser la courbe d'équation $f(x,y) = x^3+y^3-xy = 0$ (folium de Descartes) en étudiant les intersections avec les droites d'équation $x+y=c$, et en faisant varier c.

6. On dit que le point (x_0,y_0) de la courbe d'équation $y - g(x) = 0$, où g est de classe $\mathcal{C}^2$, est un point d'inflexion si $g''(x_0) = 0$.

Plus généralement, soit (x_0,y_0) un point régulier de la courbe d'équation $f(x,y) = 0$, où f est de classe $\mathcal{C}^2$; soit $g :]x_0 - r_0, x_0 + r_0] \to]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$ telle que $f(x,g(x)) = 0$, au cas où $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ (sinon il faut échanger les rôles de x et y). On dit que (x_0,y_0) est un point d'inflexion de $Z(f)$ si $g''(x_0) = 0$.

Montrer que les points d'inflexion de $Z(f)$ sont ceux qui satisfont l'équation :

$$f_{y,y}\cdot f_x^2 - 2f_{x,y}\cdot f_x\cdot f_y + f_{x,x}\cdot f_y^2 = 0$$

où h_x (resp. h_y) dénote la dérivée par rapport à x (resp. par rapport à y) de la fonction $h(x,y)$.
(Indication : on sait que $g'(x) = -f_x/f_y$; calculer à partir de là $g''(x)$ en fonction des dérivées de f).

Trouver les points d'inflexion des courbes suivantes :

$$y^2 - x^2(x-1) = 0 \quad ; \quad x^3+y^3-1 = 0$$

Esquisser ces deux courbes.