---

1. Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un système orthonormé complet de $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$. Si f,g appartiennent à $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$, et si c_n, d_n sont les coefficients de Fourier de f,g, montrer l'égalité :

$$< f, g >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$$

Indication: $4 < f,g >= \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\,\|f+ig\|^2 - i\,\|f-ig\|^2$.

Corriger l'énoncé pour un système orthogonal complet.

2. (Phénomène de Gibbs)

a) Montrer la formule $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0<x<\pi, \\ 0 & \text{si } \ x=0, \\ -1 & \text{si } \ -\pi<x<0. \end{cases}$

b) Vérifier que $\displaystyle s_n(x) := \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt$ en calculant s_n'.

c) Constater que s_n est maximale en $\pi/2n$ et montrer $\lim_{n\to\infty} s_n(\pi/2n) = \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sint}{t}dt > 1$.

3. Résoudre, en séparant les variables:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0,\pi[\times]0,5[,$$
$$u(x,0) = x(\pi - x), \quad u(x,5) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant 5.$$

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver la distance minimale de la courbe plane $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$ à l'origine.
Cette courbe est-elle compacte ?

5. Montrer que la courbe de l'espace d'équations $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ et $y + 1/2z - 1 = 0$ est compacte. Trouver les distances minimales et maximales de ses points à l'origine.

6. Trouver la distance minimale des points de la surface $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$ à l'origine. Que peut-on dire de la distance maximale à l'origine ?