UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 12

20 janvier 2004

---

1. Soit $f \in \mathcal{R}$ une fonction localement intégrable 2π-périodique et $a_0/2 + \sum a_k \cos kx + b_k \sin kx$ sa série de Fourier. On définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^x f - \frac{a_0}{2} x.$$

Montrer que F est continue, à variation bornée, 2π-périodique et que :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right).$$

Ainsi on a l'égalité : $\int_0^x f = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k}(1 - \cos kx) + \frac{a_k}{k} \sin kx \right)$.

2. Déduire de l'exercice précédent que si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique et que sa série de Fourier est $a_0/2 + \sum a_k \cos kx + b_k \sin kx$, alors : $f'(x) \sim \sum k(b_k \cos kx - a_k \sin kx)$.

3. Chercher une solution $u \in C^2([-\pi, \pi] \times]0, \infty[)$ du problème

$$\text{(C)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{dans} \quad]-\pi, \pi[\times]0, \infty[,$$
$$u(\pm\pi, t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0+) = x \quad \text{si} \quad -\pi < x < \pi.$$

Remarquer que $u(x, t) = Ax + B$, avec $A,\ B \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation (C) et en déduire une solution du problème

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{dans} \quad]-\pi, \pi[\times]0, \infty[,$$
$$v(\pm\pi, t) = \pm 1 \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad v(x, 0+) = 0 \quad \text{si} \quad -\pi < x < \pi.$$

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Esquisser la courbe $y^2 - x(x-1)(x-2) = 0$. Trouver sa distance minimale au point $(a, 0)$.

5. Trouver les valeurs maximales et minimales de la fonction $x^2 + y^2 + (z-1)^2$ sur l'ellipsoide $(x/4)^2 + (y/5)^2 + (z/25)^2 - 1 = 0$. Interpréter géométriquement.

6. Trouver les extrêmales de :

(a)

$$\int_0^1 \big(\varphi'(x)^2 + 12x\varphi(x)\big) dx \quad , \text{ avec } \varphi(0) = 2,\ \varphi(1) = 3$$

(b)

$$\int_1^2 \varphi'(x)\big(1 + x^2 \varphi'(x)\big) dx \quad , \text{ avec } \varphi(1) = 3,\ \varphi(2) = 2$$