UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences — Analyse II — 27 janvier 2004

Section de mathématiques — Série 13

---

1. Soit $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ixt} dx.$$

Montrer que G vérifie l'équation différentielle $2G'(t) + tG(t) = 0$ et en conclure que $G(t) = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-a^2x^2}$ si $a \in \mathbb{R}$.

2. Soient b, c deux nombres réels tels que $c > 0$. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = e^{-c(x-b)} \quad , \quad f_2(x) = e^{-(x-b)^2/c}.$$

3. Résoudre l'équation différentielle $u'' - u = f \in \mathcal{R}^*$ en utilisant la transformation de Fourier.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver $\varphi_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ pour $x \in [a, b]$, $\varphi_0(a) = A$, $\varphi_0(b) = B$, qui minimise la fonctionnelle :

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}}{\varphi(x)} dx$$

(Cette intégrale représente la longueur de la courbe $x \mapsto (x, \varphi(x))$ dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ muni de la métrique hyperbolique.)

5. Décrire les géodésiques du cylindre de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

6. Soit $M(n, n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ les sous-espace des matrices symétriques. Définissons $\varphi : M(n, n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ par $\varphi(A) = A \cdot A^t - I$, où A^t dénote la transposée et I la matrice identité. Montrer que si $\varphi(A) = 0$, alors la dérivée $d\varphi_A : M(n, n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ est surjective. En déduire que le groupe orthogonal $O(n)$ est une sous-variété de $M(n, n, \mathbb{R})$. Calculer sa dimension (utiliser l'exercice 5, série 9).