UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 9 mars 2004
Section de mathématiques | Série 14

1. Vérifier que :

a) $z \mapsto \mathrm{Log} z$ est $\mathbb{C}-$différentiable sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leqslant 0\}$;

b) $z \mapsto \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ est $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.

Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto \mathrm{tg}(z) = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ est-elle $\mathbb{C}$-différentiable?

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $F : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}-$différentiable et Γ une courbe rectifiable fermée dans Ω. Montrer que :

$$\int_\Gamma F'(z)dz = 0$$

Appliquer ce résultat à $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^n}dz$, où $n \neq 1$ et Γ ne passe pas par a.

3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}$-différentiable; on pose $f = u + iv$. Vérifier les assertions suivantes :

a) $u =$ constante $\quad\Rightarrow\quad f$ est localement constante;

b) $u^2 + v^2 =$ constante $\quad\Rightarrow\quad f$ est localement constante;

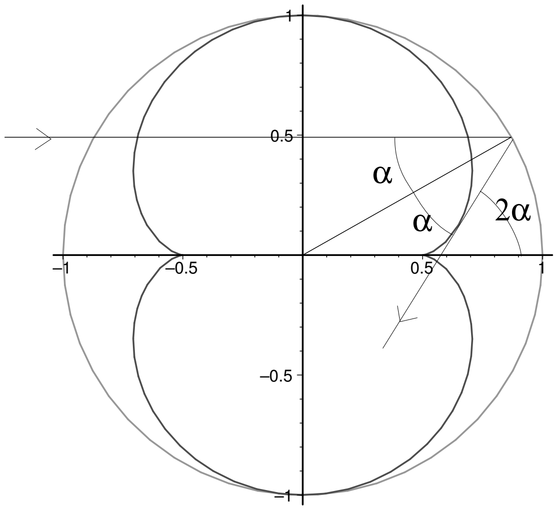
c) $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ définit une fonction $\mathbb{C}$-différentiable sur $\widetilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in \Omega\}$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses :

$$x^2 + y^2\lambda^2 - \lambda = 0$$

5. Une source lumineuse se trouve à $-\infty$ sur l'axe OX, dans le plan OXY. Trouver l'enveloppe des rayons réléchis par le demi-cercle $\big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\,,\, x \geqslant 0\big\}$.



Indications : pour simplifier les calculs (?), identifier le plan aux nombres complexes. Montrer que la familles des rayons réfléchis est paramétrée par :

$$\varphi(\alpha, s) = e^{i\alpha} + se^{2i\alpha}$$

en faisant correspondre à α le rayon par $e^{i\alpha}$. Montrer ensuite que si $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, le déterminant de son jacobien s'écrit $c \cdot (f_x \cdot \overline{f}_y - f_y \cdot \overline{f}_x)$, où c est une constante universelle et $\overline{f}_x$ est le conjugué de la dérivée de f par rapport à x, etc. Cela permet de calculer facilement le déterminant du jacobien de $\varphi(\alpha, s)$, et de là on déduit une paramétrisation de l'enveloppe, qui est en faite la néphroïde de la figure ci-contre.

6. Résoudre l'équation

$$y' = y^2 \cos(t)$$

et esquisser la famille des solutions.