UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 16 mars 2004

Section de mathématiques | Série 15

---

1. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

2. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Si f est $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, montrer que f est entière, c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.

3. En calculant $\displaystyle\int \frac{dz}{z}$ sur deux contours, montrer la formule :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver les solutions de l'équation différentielle $y't^3 - 2y = 0$. Montrer que pour toute condition initiale (t_0, y_0), avec $t_0 \neq 0$, il passe une infinité de solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x' = & x - y \\ y' = & x + y \end{cases}$$

en passant en coordonnées polaires et esquisser les trajectoires.

6. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x' = & -x + x^2 - y^2 \\ y' = & -y + 2xy \end{cases}$$

et décrire les trajectoires.
(*Indication* : il s'agit en fait de l'équation associée au champ de vecteurs qui s'ecrit sous la forme $\xi = z(z-1)$, où $z = x + iy$. Utiliser la transformation $h(z) = \frac{z}{z-1}$ pour se ramener à l'équation associée au champ $\eta(x,y) = (-x,-y)$).