

1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Comparer les assertions suivantes:

- a) Ω est connexe;
- b) $n(\gamma, w) = 0$ pour tout chemin fermé γ dans Ω et tout point $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

2. En intégrant la fonction $z \mapsto f(z)/(z-a)(z-b)$ sur des cercles de grands rayons, donner une nouvelle démonstration du théorème de Liouville lorsque f est holomorphe bornée sur \mathbb{C} .

3. (Principe du minimum.) Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Montrer que si $|f|$ admet un minimum non nul sur Ω , alors f est constante.

Corollaire : Si $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est non constante et si Ω est borné, alors soit f s'annule en un point de Ω , soit $\min_{\Omega} |f| = \min_{\partial\Omega} |f|$.



4. (Problème aux limites). Soit $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et A, B deux nombres réels. On cherche une fonction $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions :

$$y'' = f(t, y) \quad , \quad y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

Montrer que ce problème se ramène à résoudre l'équation intégrale :

$$y(t) = \frac{b-t}{b-a}A + \frac{t-a}{b-a}B + \int_a^b G(t, s)f(s, y(s))ds$$

où :

$$G(s, t) = \begin{cases} \frac{(b-s)(a-t)}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq s \leq b \\ \frac{(b-t)(a-s)}{b-a} & \text{si } a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

A l'aide du théorème du point fixe, montrer que si f satisfait la condition de Lipschitz :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad , \quad \forall t \in [a, b], y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

avec $L(b-a)^2 < 8$, alors le problème possède une et une seule solution.

5. Pour quelles valeurs de a et b le problème aux limites suivant possède-t-il une et une seule solution :

$$y'' + y = 0 \quad , \quad y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

6. On cherche une fonction holomorphe $w(z)$ satisfaisant l'équation différentielle :

$$w'(z) = \frac{1}{2w(z)}$$

Montrer qu'il existe une infinité de solutions maximales avec condition initiale $w(1) = 1$.