UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 6 avril 2004
Section de mathématiques | Série 18

**1.** Soit $f$ une fonction holomorphe dasn le disque $D(0, R)$.
Pour $0 \leqslant r < R$, on définit $M(r) = \sup\{|f(z)| \mid |z| = r\}$. Montrer que
a) la fonction $r \mapsto M(r)$ est continue et croissante;
b) cette fonction est strictement croissante si, et seulement si, $f$ n'est pas constante.

**2.** On définit la fonction Arctg par

$$\operatorname{Arctg} z = \int_{\gamma_z} \frac{d\,\zeta}{1+\zeta^2}, \quad \text{pour} \quad |z| < 1,$$

où $\gamma_z$ est un chemin rectifiable reliant 0 à $z$ dans le disque $D(0, 1)$. Vérifier que la définition est cohérente et

$$\operatorname{Arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \pm \ldots \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

**3.**
a) Montrer que toute courbe fermée dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est homotope à une courbe tracée sur le cercle unité.
b) Donner toutes les valeurs possibles de $\int_\gamma \frac{d\,z}{1+z^2}$ où $\gamma$ est une courbe fermée rectifiable tracée dans $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

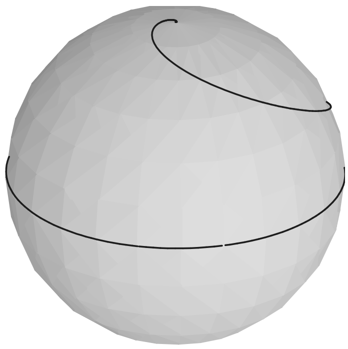
✠✠✠✠✠✠✠✠✠

**4.** Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété, $U \supset X$ un ouvert et $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs tangent à $X$, c'est-à-dire tel que :

$$y \in X \Longrightarrow \xi(y) \in TX_y$$

où $TX_y$ désigne l'espace tangent à $X$ au point $y$. Montrer que si $\varphi : I \to U$ est une trajectoire de $\xi$, et que $\varphi(t_0) \in X$ pour un $t_0 \in I$, alors $\varphi(t) \in X$ pour tout $t \in I$ (utiliser les équations locales de $X$). Montrer que si $X$ est compacte, les trajectoires maximales de $\xi$ sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**5.** Montrer que le champ $\xi = (-y + xz^2, x + yz^2, -z(x^2 + y^2))$ est tangent à la sphère. Esquisser ses trajectoires (On pourra utiliser la transformation $(\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \sqrt{1-\rho^2})$ pour se ramener à un champ dans le plan).



**6.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \quad .$$

Trouver un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y' = A(y)$ et en déduire une solution particulière de l'équation inhomogène $y' = A(y) + b(t)$. Trouver la solution qui a pour conditions initiales $t_0 = 0$, $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.