UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 19

20 avril 2004

---

1. Polynômes de Legendre. Donner les trois premiers termes du développement de Taylor de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{(1-2\alpha z+z^2)^{1/2}}$ en 0, pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. a) Vérifier que si $|a|<1$, l'homographie $z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est une bijection holomorphe du disque unité $\mathbb{D}$.
b) Montrer que toute fonction holomorphe bijective $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ est de la forme

$$f(z) = b\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

avec $|a|<1$ et $|b|=1$.
Indication: Se ramener au cas où $f(0)=0$ avec a), puis utiliser le lemme de Schwarz pour f et pour f^{-1}.

3. En intégrant la fonction $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{z}$ sur le contour formé du segment $[r,R]$, suivi du demi-cercle supérieur γ_R de rayon R, suivi du segment $[-R,-r]$, terminé par le demi-cercle de rayon r, montrer la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indication. Utiliser le lemme de Jordan suivant: $\int_{\gamma_R} |e^{iz}\,dz| \leqslant \pi$.

✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver les solutions :

$$y''+3y'-10y=6e^{4x} \quad , \quad y''+4y=3\sin(x) \quad , \quad y''-2y'+5y=25x^2+12$$

5. Trouver les solutions :

$$2t^2y''+3ty'-y=0 \quad , \quad t^2y''+5ty'+4y=0 \quad , \quad t^2y''+ty'+y=0$$

6. Montrer que l'origine est un point singulier régulier et calculer 2 solutions indépendantes :

$$4ty''+2y'+y=0$$