

1. Polynômes de Legendre. Donner les trois premiers termes du développement de Taylor de la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1 - 2\alpha z + z^2)^{1/2}}$ en 0, pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. a) Vérifier que si $|a| < 1$, l'homographie $z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ est une bijection holomorphe du disque unité \mathbb{D} .
b) Montrer que toute fonction holomorphe bijective $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est de la forme

$$f(z) = b \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

avec $|a| < 1$ et $|b| = 1$.

Indication: Se ramener au cas où $f(0) = 0$ avec a), puis utiliser le lemme de Schwarz pour f et pour f^{-1} .

3. En intégrant la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ sur le contour formé du segment $[r, R]$, suivi du demi-cercle supérieur γ_R de rayon R , suivi du segment $[-R, -r]$, terminé par le demi-cercle de rayon r , montrer la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indication. Utiliser le lemme de Jordan suivant: $\int_{\gamma_R} |e^{iz} dz| \leq \pi$.



4. Trouver les solutions :

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x} \quad , \quad y'' + 4y = 3 \sin(x) \quad , \quad y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$$

5. Trouver les solutions :

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0 \quad , \quad t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0 \quad , \quad t^2 y'' + ty' + y = 0$$

6. Montrer que l'origine est un point singulier régulier et calculer 2 solutions indépendantes :

$$4ty'' + 2y' + y = 0$$