

1. Décrire le comportement de e^z quand z tend vers l'infini le long d'une droite.
2. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $z_1 z_2 \neq 0$. Vérifier que:

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) + 2i\pi n(z_1, z_2)$$

où:

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2\pi < \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \leq -\pi \\ 0 & \text{si } -\pi < \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \leq \pi \\ -1 & \text{si } \pi < \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

3. (De Moivre)

a) Pour $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, vérifier la formule:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^a = \cos(a\theta) + i \sin(a\theta)$$

- b) Constater que la restriction sur θ est nécessaire.
c) Remarquer que la formule est vraie $\forall \theta \in \mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{Z}$.



4. Soit $M(2, 2, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des 2×2 -matrices à coefficients dans \mathbb{R} . Pour tout $i = 0, 1, 2$, on considère les ensembles:

$$\Sigma^i = \{A \in M(2, 2, \mathbb{R}) \mid \text{rang}(A) = i\}$$

- a) Dire si les ensembles Σ^i , $i = 0, 1, 2$, sont ouverts, fermés ou ni l'un, ni l'autre.
b) Trouver leurs adhérences.

5. Définissons :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2/x_1 & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$, décrire l'ensemble $f^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon])$ et en déduire que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

6. Les applications suivantes :

$$I : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$
$$ev_0 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto f(0)$$

sont-elles continues, lorsqu'on prend sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ la norme $\| \cdot \|_\infty$? la norme $\| \cdot \|_1$?