UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 2

28 octobre 2003

---

1. Décrire le comportement de e^z quand z tend vers l'infini le long d'une droite.

2. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $z_1 z_2 \neq 0$. Vérifier que:

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) + 2i\pi n(z_1, z_2)$$

où:

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leqslant -\pi \\ 0 & \text{si } -\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leqslant \pi \\ -1 & \text{si } \pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leqslant 2\pi \end{cases}$$

3. (De Moivre)
a) Pour $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, vérifier la formule:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^a = \cos(a\theta) + i\sin(a\theta)$$

b) Constater que la restriction sur θ est nécessaire.
c) Remarquer que la formule est vraie $\forall \theta \in \mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{Z}$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soit $M(2, 2, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des 2×2-matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout $i = 0, 1, 2$, on considère les ensembles:

$$\Sigma^i = \{A \in M(2, 2, \mathbb{R}) \mid \mathrm{rang}(A) = i\}$$

a) Dire si les ensembles Σ^i, $i = 0, 1, 2$, sont ouverts, fermés ou ni l'un, ni l'autre.
b) Trouver leurs adhérences.

5. Définissons :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2/x_1 & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$, décrire l'ensemble $f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ et en déduire que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

6. Les applications suivantes :

$$I : \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$
$$ev_0 : \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto f(0)$$

sont-elles continues, lorsqu'on prend sur $\mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ la norme $\| \ \|_\infty$? la norme $\| \ \|_1$?