UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 20

27 avril 2004

---

1. On considère les lacets γ_1 et γ_2 définis par $\gamma_1(t) = -1 + e^{it}$, $\gamma_2(t) = 1 - e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. En suivant continûment la "fonction" $z \mapsto f(z) := \sqrt{\mathrm{Log}\, \frac{1}{2}(z+1)}$ qui vaut $i\sqrt{\log 2}$ en $z = 0$ le long du lacet $\gamma := \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$, constater que la valeur de f obtenue à la fin du lacet γ est différente de celle du début.

2. Classer les singularités des fonctions $\dfrac{\sin z}{z}$, $\dfrac{1}{\cos z}$, $\dfrac{\log(1+z)}{z^2}$, $z^n \sin(\dfrac{1}{z})$.

3. Donner les développements de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes :

$$C_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}, \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\} \quad , \quad C_2 = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\} \quad , \quad C_3 = \{z \in \mathbb{C}, 2 < |z|\} \ .$$

✠✠✠✠✠✠✠✠

4. $F(a, b, c, t)$ désigne la fonction hypergéométrique. On rappelle que :

$$F(a, b, c, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{c(c+1)\cdots(c+k-1)} t^k \quad .$$

Montrer que :

$$F(-p, b, b, -x) = (1+x)^p (\text{ p entier} > 0 \text{ }) \quad , \quad \log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x) \ .$$

5. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

6. Résoudre $y' = A(y)$ en calculant e^{tA} :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$