

1. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(a, r) \setminus \{a\}$ telle que :

$$\int \int_{D(a,r)^*} |f(x, y)|^2 dx dy < +\infty$$

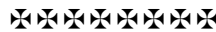
alors f se prolonge holomorphiquement à $D(a, r)$.

2. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$. Vérifier que cette série converge pour $|z| < 1$ et que f satisfait la relation $f(z) = z + f(z^2)$. En déduire que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de 1, ni au voisinage de $-1, i, -i$. Et finalement, f ne s'étend à aucun ouvert contenant strictement $D(0, 1)$.

3. Par la méthode des résidus, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2} dx, \quad \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta$$

où a est un nombre réel tel que $a^2 < 1$



4. Résoudre les équations $y' = A(y)$ en calculant l'exponentielle, dans les 2 cas suivants :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$$

Dans le cas b), écrire $A = \mu \cdot I + \alpha \cdot J$, où I est la matrice identité et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observer que $J^2 = -I$ et calculer l'exponentielle de $(t - t_0) \cdot J$ à partir de la série qui la définit.

5. Soit $A \in M(2, 2, \mathbb{C})$. Montrer que

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) \quad , \quad \text{où } \text{Tr}((a_{i,j})) = a_{1,1} + a_{2,2}$$

Indication: traiter d'abord le cas où A est diagonalisable, puis ramener à ce cas le cas général par passage à la limite.

6. Soient $Asym(n) = \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\}$ (matrices antisymétriques). Montrer que l'application

$$\varphi : Asym(n) \rightarrow M(n, n, \mathbb{R}) \quad , \quad \varphi(A) = e^A$$

est une paramétrisation locale du groupe orthogonal $\mathcal{O}(n) = \{R \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid R^t R = I\}$ au voisinage de $I = \text{identité}$.