UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences — Analyse II — 4 mai 2004

Section de mathématiques — Série 21

---

1. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(a,r)\setminus\{a\}$ telle que :

$$\int\int_{D(a,r)^*} |f(x,y)|^2 dxdy < +\infty$$

alors f se prolonge holomorphiquement à $D(a,r)$.

2. Soit $f=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$. Vérifier que cette série converge pour $|z|<1$ et que f satisfait la relation $f(z)=z+f(z^2)$. En déduire que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de 1, ni au voisinage de -1, i, $-i$. Et finalement, f ne s'étend à aucun ouvert contenant strictement $D(0,1)$.

3. Par la méthode des résidus, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}dx \quad , \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2acos\theta+a^2}d\theta$$

où a est un nombre réel tel que $a^2<1$

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Résoudre les équations $y'=A(y)$ en calculant l'exponentielle, dans les 2 cas suivants :

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A=\begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$$

Dans le cas b), écrire $A=\mu\cdot I+\alpha\cdot J$, où I est la matrice identité et $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observer que $J^2=-I$ et calculer l'exponentielle de $(t-t_0)\cdot J$ à partir de la série qui la définit.

5. Soit $A\in M(2,2,\mathbb{C})$. Montrer que

$$\det(\exp(A))=\exp(\mathrm{Tr}(A)) \quad , \quad \text{où } \mathrm{Tr}((a_{i,j}))=a_{1,1}+a_{2,2}$$

Indication: traiter d'abord le cas où A est diagonalisable, puis ramener à ce cas le cas général par passage à la limite.

6. Soient $Asym(n)=\{A\in M(n,n,\mathbb{R}) \mid A+A^t=0\}$ (matrices antisymétriques). Montrer que l'application

$$\varphi : Asym(n)\to M(n,n,\mathbb{R}) \quad , \quad \varphi(A)=e^A$$

est une paramétrisation locale du groupe orthogonal $\mathcal{O}(n)=\{R\in M(n,n,\mathbb{R}) \mid R^tR=I\}$ au voisinage de I =identité.