UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 11 mai 2004

Section de mathématiques | Série 22

---

1. Par la méthode des résidus, vérifier les formules suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha}}{(1+x)^m} dx = \frac{\pi\alpha(\alpha+1)...(\alpha+m-2)}{(m-1)!\sin(\pi\alpha)} \quad , \quad m \geqslant 2, \quad 0 < \alpha < 1;$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{\log^2(a) - \log^2(b)}{2(a-b)} \quad , \quad a \neq b > 0;$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^b} = \frac{\pi}{b\sin(\frac{\pi}{b})} \quad , \quad b > 1.$

2. (Méthode de Cauchy) Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe ayant des pôles simples aux points $a_1, a_2, ... \in \mathbb{C}^*$ et soit $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tendant vers l'infini tels que $R_k \neq |a_n|$ pour tous k, n. On suppose que $\sup_{|z|=R_k} |f(z)| \leqslant M < \infty$ pour tout k. Montrer que :

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Res}(f, a_n) \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

`Indication:` Le théorème des résidus nous donne $f(z) = \sum_{|a_n|<R_k} \frac{\operatorname{Res}(f,a_n)}{z-a_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Poser $z = 0$ et faire la différence. En déduire :

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

3. Décomposer en série de fractions simples la fonction f donne par $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Dire quelle est la nature du point critique $(0,0)$, soit à l'aide d'une fonction de la forme $x^2 + ay^2$ (où a peut être positif ou négatif), soit par linéarisation :

$$\xi = (-2xy^2 - x^3, -y + x^2 y) \quad , \quad \xi = (2xy + x^3, -x^2 + y^3) \quad , \quad \xi = (x^3 + y^2, x^2 - y^3)$$

$$\xi = -(xy^2 + 2\sin(y), x - x^2 y - \sin(y)) \quad , \quad \xi = (y - \sin(x)^3, -4x - \sin(y)^3) \quad , \quad \xi = (e^y - 1, -\sin(x) - y)$$

5. L'équation du mouvement du pendule s'écrit .

$$\ddot{x} + k\sin(x) = 0$$

où x représente l'angle du bras du pendule avec la verticale et k est une constante positive. En posant $y = \dot{x}$ cette équation est équivalente au système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -k\sin(x) \end{cases}$$

Etudier les points critiques de ce système et leur stabilité. (Indication: en $(0,0)$, on peut utiliser la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, qui est constante sur les trajectoires; en $(\pm\pi, 0)$, on peut regarder la partie linéaire de l'équation).

6. L'équation du mouvement du pendule avec friction s'écrit :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k\sin(x) = 0$$

où c est une nouvelle constante positive. Ramener, en posant $y = \dot{x}$, à un système de deux équations d'ordre 1. Etudier la nature des points critiques par linéarisation. En déduire que l'équation étudiée sous 5 ci-dessus n'est pas structurellement stable.