UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 23

18 mai 2004

---

1. Formule de Taylor avec reste. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant $\overline{D(0,R)}$. Pour $|z|<R$ et $n\in\mathbb{N}$, établir la formule

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+...+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}z^{n-1}+f_n(z)z^n,\quad \text{où}\quad f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta-z)}d\zeta.$$

`Indication` : Remplacer $\frac{1}{\zeta-z}$ par $\frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{\zeta^n}+\frac{z^n}{\zeta^n(\zeta-z)}$ dans la formule de Cauchy.

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3}dx,\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+6x+13},\quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx\ .$$

3. Etudier la convergence de $\prod_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$, $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+z^{2^n})$.

✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver les points singuliers du champ de vecteurs suivant et étudier leur stabilité par linéarisation :

$$\xi(x,y)=(x^2-y^2,xy-1)$$

5. Etudier les trajectoires de la famille de champs de vecteurs :

$$\xi_\varepsilon=(-y+x(\varepsilon-x^2-y^2),x+y(\varepsilon-x^2-y^2))$$

a) Etude à priori :
   - Montrer que la famille des trajectoires est invariante par rotation (indication: si R est une rotation, montrer que $\xi_\varepsilon(R(P))=R(\xi_\varepsilon(P))$, $P\in\mathbb{R}^2$).
   - Etudier la nature du point critique $(0,0)$, par linéarisation si $\varepsilon\neq 0$, à l'aide de la méthode directe de Liapounov si $\varepsilon=0$
   - Montrer que si $\varepsilon>0$, le cercle $x^2+y^2=\varepsilon$ est une trajectoire.

b) Par résolution explicite en passant en coordonnées polaires. On peut ensuite résoudre par séparation des variables.

6. Soit $\alpha\in A^2(\mathbb{R}^{2n})$ définie par

$$\alpha=dx_1\wedge dx_2+\cdots+dx_{2n-1}\wedge dx_{2n}$$

Calculer $\underbrace{\alpha\wedge\ldots\wedge\alpha}_{n fois}$.