UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 24

25 mai 2004

---

1. Vérifier les formules suivantes :

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-\frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad \pi \tan \pi z = 2z \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad \cos \pi z = \prod_{1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

2. a) Constater que le produit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+i/n)$ converge et que le produit $\prod_{n=1}^{\infty}|1+i/n|$ diverge.
b) Établir la formule $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n(1-z^n)}\right)$, pour $|z| < 1$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soient $\omega \in A^1(E)$, $\omega \neq 0$, et $\alpha \in A^r(E)$. Montrer que pour qu'il existe $\beta \in A^{r-1}(E)$ telle que $\alpha = \beta \wedge \omega$, il faut et il suffit que $\alpha \wedge \omega = 0$.

5.
a) Soit $f_1, \ldots, f_n$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sa base duale. Montrer que

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n = \pm dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et que le signe détermine l'orientation de $f_1, \ldots, f_n$.
b) Montrer que l'isomorphisme :

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 \mapsto a_1dx_2 \wedge dx_3 + a_2dx_3 \wedge dx_1 + a_3dx_1 \wedge dx_2$$

ne dépend que de l'orientation et de la métrique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que si au lieu de prendre la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ et sa duale dx_1, dx_2, dx_3 on prend une autre base orthonormale, de même orientation, et sa duale, on obtient le même isomorphisme.

6. Définissons la $(n-1)$-forme ω sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par :

$$\omega(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{n}{2}}}$$

Montrer que $d\omega = 0$. Calculer $\omega \wedge df$, où $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.