

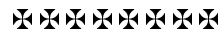
1. Démontrer la formule de doublement de Legendre en utilisant la formule de Gauss pour $\Gamma(z)$ et $\Gamma(z+1/2)$ et constater que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! n^{1/2}}$ existe. Sa valeur $\sqrt{\pi}$ s'obtient en posant $z = 1/2$.

2. En choisissant bien z dans le produit infini de $\sin \pi z$, vérifier la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 2 \times \dots \times (2n)^2}{1 \times 3 \times 3 \times \dots \times (2n-1)^2 (2n+1)} = \prod_1^{+\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Observer que la limite considérée à l'exercice 1 donne le même résultat.

3. Si $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, montrer que $\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}$ et que $\psi(1-z) - \psi(z) = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$.



4. Soient E et F des espaces vectoriels sur \mathbb{R} et $A : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient e_1, \dots, e_n une base de E , f_1, \dots, f_p une base de F , et soient φ_i , $i = 1, \dots, n$ et ψ_j , $j = 1, \dots, p$ les bases duales respectives. Montrer que pour toute suite $1 \leq i_1 \dots \leq i_r$ on a :

$$\Lambda^r(A)(\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r} A_{i,j} \cdot \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_r}$$

où $A_{i,j}$ désigne le $r \times r$ -mineur de la matrice $(a_{k,h})$ de A correspondant aux suite $(i_1, \dots, i_r), (j_1, \dots, j_r)$:

$$A_{i,j} = \det (a_{i_k, j_h})_{k,h=1, \dots, r}$$