

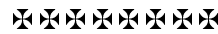
1. Démontrer la formule de doublement de Legendre en utilisant la formule de Gauss pour  $\Gamma(z)$  et  $\Gamma(z+1/2)$  et constater que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! n^{1/2}}$  existe. Sa valeur  $\sqrt{\pi}$  s'obtient en posant  $z = 1/2$ .

2. En choisissant bien  $z$  dans le produit infini de  $\sin \pi z$ , vérifier la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 2 \times \dots \times (2n)^2}{1 \times 3 \times 3 \times \dots \times (2n-1)^2 (2n+1)} = \prod_1^{+\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Observer que la limite considérée à l'exercice 1 donne le même résultat.

3. Si  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ , montrer que  $\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}$  et que  $\psi(1-z) - \psi(z) = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$ .



4. Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire. Soient  $e_1, \dots, e_n$  une base de  $E$ ,  $f_1, \dots, f_p$  une base de  $F$ , et soient  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $\psi_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  les bases duales respectives. Montrer que pour toute suite  $1 \leq i_1 \cdots \leq i_r$  on a :

$$\Lambda^r(A)(\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r} A_{i,j} \cdot \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_r}$$

où  $A_{i,j}$  désigne le  $r \times r$ -mineur de la matrice  $(a_{k,h})$  de  $A$  correspondant aux suite  $(i_1, \dots, i_r), (j_1, \dots, j_r)$  :

$$A_{i,j} = \det (a_{i_k j_h})_{k,h=1,\dots,r}$$