1. Démontrer la formule de doublement de Legendre en utilisant la formule de Gauss pour $\Gamma(z)$ et $\Gamma(z+1/2)$ et constater que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!n^{1/2}}$ existe. Sa valeur $\sqrt{\pi}$ s'obtient en posant $z = 1/2$.

2. En choisissant bien z dans le produit infini de $\sin \pi z$, vérifier la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \times 2 \times \ldots \times (2n)^2}{1 \times 3 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)^2(2n+1)} = \prod_1^{+\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Observer que la limite considérée à l'exercice 1 donne le même résultat.

3. Si $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, montrer que $\psi(z+1) - \psi(z) = \dfrac{1}{z}$ et que $\psi(1-z) - \psi(z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $A : E \to F$ une application linaire. Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de E, $f_1, \ldots, f_p$ une base de F, et soient φ_i, $i = 1, \ldots, n$ et ψ_j, $j = 1, \ldots, p$ les bases duales respectives. Montrer que pour toute suite $1 \leqslant i_1 \cdots \leqslant i_r$ on a :

$$\Lambda^r(A)(\psi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \psi_{i_r}) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots \leqslant j_r} A_{i,j} \cdot \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_r}$$

où $A_{i,j}$ désigne le $r \times r$-mineur de la matrice $(a_{k,h})$ de A correspondant aux suite $(i_1, \ldots, i_r), (j_1, \ldots, j_r)$:

$$A_{i,j} = \text{dét}\,(a_{i_k,j_h})_{k,h=1,\ldots,r}$$