UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 4 novembre 2003
Section de mathématiques | Série 3

---

1. Étudier la transformation de Joukowski (1847-1921) donné par

$$J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \ :$$

domaine de définition, prolongement à $\hat{\mathbb{C}}$, préimages d'un point, image du cercle unité, du disque unité, image du cercle centré en $0.2 + 0.3i$ passant par -1.
http://jwilson.coe.uga.edu/olive/Joukowski.Web/Joukowski.Paper.html

2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Est-elle à variation bornée? Même question pour la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \sqrt{x}\sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

3. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ satisfait une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$. Notation $f \in \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$. Montrer les assertions suivantes:
(1) $\alpha > 1 \Rightarrow Lip_\alpha([a,b]) = \mathbb{C}$, (2) $\mathrm{Lip}_1([a,b]) \subsetneq \mathcal{VB}([a,b])$, (3) $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b]) \setminus \mathcal{VB}([a,b]) \neq \emptyset$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soit $B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ le k-ième polynôme de Bernstein de degré n. Trouver ses extrema pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et esquisser son graphe.

5. Montrer que l'on a :

$$\left(B_n^k\right)'(x) = n\left(B_{n-1}^{k-1}(x) - B_{n-1}^k(x)\right)$$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Déduire de la relation précédente que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

6. Considérons la suite de fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$, définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 - 1/n \\ nx - n/2 + 1 & \text{si } 1/2 - 1/n \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Esquisser le graphe de ces fonctions. Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$. Montrer que si cette suite possède une limite f dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$, alors $f(x) = 0$ si $0 \leqslant x < 1/2$ et $f(x) = 1$ si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$. En déduire que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ n'est pas complet.