UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 11 novembre 2003

Section de mathématiques | Série 4

---

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, continue en b et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. On suppose que, pour tout $b' \in [a, b[$, la restriction de f à $[a, b']$ est $g-$intégrable sur $[a, b']$. Montrer que f est $g-$intégrable sur $[a, b]$ et que

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f \,\mathrm{d}\, g.$$

2. Donner une preuve de l'énoncé c) de la Proposition 3.7.

3. Utiliser la formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Stieltjes pour montrer, quand $s \in \mathbb{C}$:

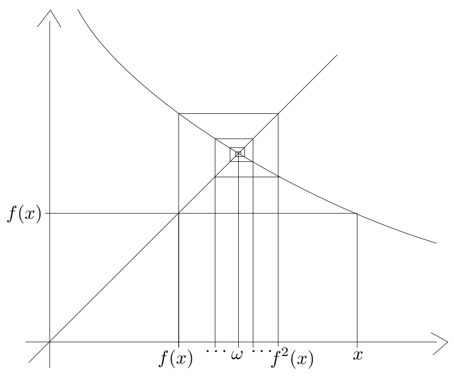
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s \int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}\, x, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^s} = s \int_1^{2n} \frac{2[x/2] - [x]}{x^{s+1}} \,\mathrm{d}\, x.$$

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soit $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Il possède une racine près de $x_0 = 2$. Calulez-la à l'aide de la méthode de Newton, avec $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$, à 2 décimales près. (Indication: vérifiez que l'on peut prendre $x_0 = 2$, $r = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{5}$.)

5. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application continue, admettant une dérivée continue. Supposons que $f(\omega) = \omega$ et $|f'(\omega)| < 1$, pour un $\omega \in]a, b[$. Utiliser le théorème des accroissements finis pour en déduire l'existence d'un $r > 0$ tel que $[\omega - r, \omega + r] \subset]a, b[$ et tel que le théorème du point fixe s'applique à $f|_{[\omega - r, \omega + r]}$. Montrer que si $|f'(x_0)| > 1$ un tel r n'existe pas.

6. Soit $f(x) = \frac{1}{2}x(1 - x)$. Trouver les points fixes de f. Pour chaque point fixe ω dire, à l'aide de l'exercice précédent, s'il existe un voisinage V tel que si $x \in V$, les itérés de $f^n(x)$ convergent vers ω ou non; representez graphiquement ces itérés, comme sur le dessin ci-dessous.



Même question pour $f(x) = 2x(1 - x)$

7. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe (Indication: considérer la fonction $g(x) = f(x) - x$.)