UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 5

18 novembre 2003

---

**1.** On donne une fonction $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante, tendant vers 0 à l'infini, et une fonction $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ localement intégrable dont l'intégrale sur tout intervalle fini est majorée par une constante. À l'aide du deuxième théorème de la moyenne, montrer que $\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx$ existe. Application à $\int_0^\infty \sin x/x\,dx$.

**2.** Soient $0 < a < b$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Calculer $\int_a^b x^s(\log x)^2 dx$ en différentiant $\int_a^b x^s dx$.

**3.** On suppose que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à variation bornée sur $[0, b]$ pour tout $b > 0$, et que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Montrer que :

$$\lim_{y\to 0^+} y\left(\int_0^\infty e^{-xy} f(x)dx\right) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

*Indication*: Intégrer par parties.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

**4.** Trouver les solutions de l'équation intégrale :

$$\phi(x) = x - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$$

par itérations successives, en partant de la fonction $\phi_0(x) \equiv 0$.

**5.** Soit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire ayant pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x, y)\| = \sup\{|x|, |y|\}$. Montrer que $A$ n'est pas contractante. Trouver $N$ tel que $A^N$ soit contractante.

**6.** Soient

$$f(x) = x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Montrer que $t(0) = 1/\sqrt{2}$ et $t(1/\sqrt{2}) = 0$. Appliquer l'exercice 5, série 4 à la fonction $g(x) = t(t(x))$, pour montrer l'existence d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que, si on applique la méthode de Newton à $f(x)$, avec $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et un point de départ dans $U$, on obtienne une suite qui ne converge pas. Expliquer ce paradoxe : le deuxième itéré $t^2$ de $t$ est contractant sur un voisinage de 0, mais 0 n'est pas point fixe de $t$.