UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 6

25 novembre 2003

---

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \geqslant 0$, soit

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}, \\ -x + 2\sqrt{y} & \text{si } \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{y}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prolonge f à $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -f(x,-y)$ pour $y < 0$. Calculer $F(y) = \int_{-1}^{1} f(x,y)dx$. Vérifier que F est différentiable et que $F'(0) \neq \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\,dx$.

2. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} e^{-x^2} dx.$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait l'équation différentielle $2g'(y) + yg(y) = 0$. En déduire

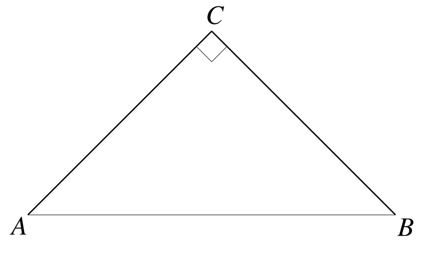
$$g(y) = \sqrt{\pi} e^{-y^2/4},$$

grâce à la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

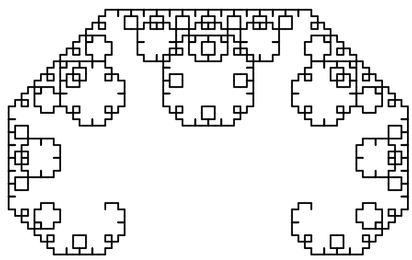
3. Montrer le lemme suivant:
On suppose $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}_+)$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Si $\int_a^b f\,dg = 0$, alors $f = 0$.
En déduire que, pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $\int_a^b f\,dg = f(\xi)\int_a^b dg$.

✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le fractal défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un ségment $\overline{AB}$ dans le plan, et on construit le triangle isocèle $\Delta(ABC)$ ayant $\overline{AB}$ pour base et un angle droit au sommet C; puis on recommence avec $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$, et ainsi de suite (voir figure ci-desous).

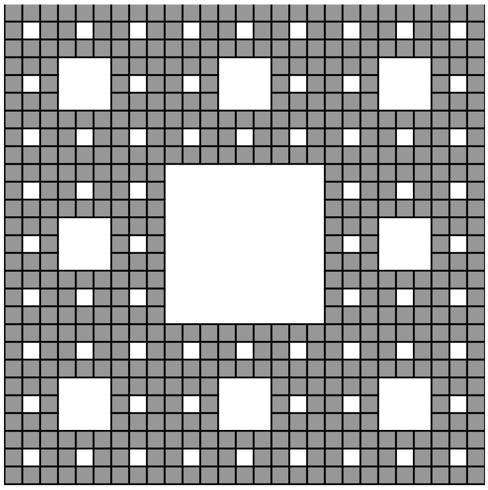


après 10 étapes :



Trouvez 2 transformations affines contractantes w_1 et w_2 telles que $D = w_1(D) \cup w_2(D)$. Calculez la dimension de Hausdorff de D.

5. Soit $TS \subset \mathbb{R}^2$ défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un carré de sommets A, B, C, D dans le plan. On le partage en 9 carrés égaux, de coté égal au tiers du côté du carré de départ, on enlève le carré du milieu. Puis on recommence avec les 8 carrés restants, et ainsi de suite. La figure ci-contre montre le résultat après 3 étapes (on appelle ce fractal le "tapis de Sierpinski").



Trouvez des transformations affines contractantes w_i, $i = 1, \ldots, N$ telles que $TS = w_1(TS) \cup \ldots \cup w_N(TS)$. Calculez la dimension de Hausdorff de TS.

Des expériences en Maple 7 sur la méthode de Newton et les fractals vous ont proposées sur la page Web :

`http://www.unige.ch/math/folks/ronga/lyse_II/2002-2003/`

6. Trouver la distance de Hausdorff entre A et B:

i) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+3)^2 = 9\right\}$

ii) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sup\{|x|, |y|\} = 1\right\}$

iii) $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $B =$ ensemble de Cantor

iv) $A = [-1, +1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{n}{n-1}x^2 + ny^2 = 1\right\}$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.