UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 7

2 décembre 2003

---

1. Soit f une fonction continue sur $\gamma([a,b])$, où $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est rectifiable. On suppose que

$$|\int_\gamma f| = \sup |f| \cdot L(\gamma).$$

Montrer que $|f|$ est constante et trouver un exemple où f n'est pas constante.

2. Soit $\gamma_r(t) = re^{it}$, pour $r > 0$ et $t \in [0,1]$. Vérifier les formules

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| |dz| = 2\pi.$$

3. Calculer la série de Fourier de la fonction définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ dans le système $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Trouver la limite des suites de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ suivantes :
i) $X_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{n}{n-1}x^2 + ny^2 = 1\right\}$, $n \geqslant 1$
ii) $X_n = \{(x, x^n)\,, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

5. Soient $w_1(x) = x/3$, $w_2(x) = x/3 + 2/3$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Définissons la suite $\{x_n\}$ par récurrence :

$$x_1 = w_1(x_0) \quad , \quad x_2 = w_2(x_1) \quad , \ldots ,$$
$$x_{2n+1} = w_1(x_{2n}) \quad , \quad x_{2n+2} = w_2(x_{2n+1}) \quad .$$

Montrer que la suite x_n s'accumule vers l'ensemble $\{1/4, 3/4\}$.

6. Décrivez 2 transformations affines w_1 et w_2 telle que $L = w_1(L) \cup w_2(L)$, où L est la limace ci-contre :