UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 9 décembre 2003

Section de mathématiques | Série 8

---

1. Soit $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction g constante par morceaux sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b |f-g| < \varepsilon$ et $||g||_\infty \leqslant ||f||_\infty$. Même question pour $g \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C})$ puis $g \in \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$.
Indication. Commencer par f à valeurs réelles.

2. Établir les inégalités suivantes:

$$||f||_2^2 \leqslant ||f||_\infty ||f||_1, \quad ||f||_1 \leqslant (b-a)^{1/2}||f||_2, \quad \forall f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{C}).$$

En déduire que $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C})$ pour la norme $||\cdot||_2$. Donner une suite de Cauchy de $(\mathcal{R}([a,b];\mathbb{C}), ||\cdot||_1)$ qui n'est pas une suite de Cauchy pour $||\cdot||_2$.

3. Vérifier que

$$(\pi - |x|)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

3. Soient $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que

$$\|B \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$$

où $B \circ A$ dénote la composition.

4. Soit $\phi(t) = (t^2, t^3)$. Montrer qu'il n'existe pas de $\xi \in [0,1]$ tel que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi)$.

5. Calculer la dérivée de l'application

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \quad , \quad (A, B) \mapsto B \circ A$$

sans utiliser l'expression de A et B en termes de matrices. En déduire la dérivée des applications :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad , \quad A \mapsto A \circ A \quad \text{et } A \mapsto A \circ A \circ A \quad .$$