UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 9

16 décembre 2003

---

1. On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = 0$, si $0 \leqslant x < 1/n$ et $f_n(x) = x^{-1/4}$, si $1/n < x \leqslant 1$. Vérifier que cette suite est de Cauchy dans $\big(\mathcal{R}([0,1]), ||\cdot||_2\big)$ mais qu'elle na pas de limite dans cet espace en observant que pour tout $\varepsilon > 0$, $f_n \to f$ uniformment sur $[\varepsilon, 1]$, où $f(x) = x^{-1/4}$ pour $x \in]0,1]$.

2. Pour $x \in [0,1]$, montrer les formules

$$x - x^2 = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n^2}.$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période 2π et $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$. Vérifier les implications suivantes:

a) $f \in \mathcal{C}^1$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f = 0 \quad \Rightarrow \quad ||f||_2 \leqslant ||f'||_2$ et $||f||_\infty \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{12}}||f'||_2$;

b) $f \in \mathcal{C}^m \quad \Rightarrow \quad \sum_k k^{2m}|c_k(f)|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_k k^{m-1}|c_k(f)| < \infty$.

c) $f \in \mathcal{C}^m \quad \Rightarrow \quad \exists C > 0$ tel que $||f - s_n(f)||_\infty \leqslant \dfrac{C}{n^{m-1/2}}$, $\forall n > 0$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Calculer la dérivée de f et dessiner les ensembles $\Sigma(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{rang}(df_x) \leqslant 1\big\}$ et $f(\Sigma(f))$ dans le cas suivants :

a) $f(x,y) = (x^2, y^2)$ *b)* $f(x,y) = (x^2 + y^3, x^3 + y^2)$
c) $f(x,y) = (x, y^3 - xy)$ *d)* $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

5. Soit $M(n)$ l'espace des $n \times n$-matrices à coefficients réels. Si $A \in M(n)$, on note par A^t sa transposée. L'espace des $n \times n$-matrices symétriques à coefficients réels sera désigné par $Sym(n)$:

$$Sym(n) = \big\{A \in M(n) \mid A = A^t\big\} \quad .$$

Considérons l'application :

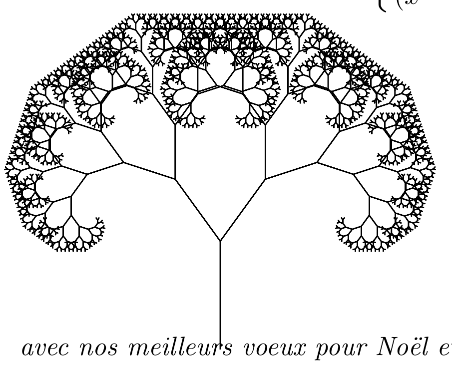
$$\varphi : M(n) \to Sym(n) \quad , \quad A \mapsto A \cdot A^t$$

et désignons par $\mathbb{I}_n \in M(n)$ la matrice de l'identité. Calculez la dérivée de φ.

Montrez que si $\varphi(A) = \mathbb{I}_n$ (i.e. A est orthogonale), alors $d\varphi_A$ est surjective.

6. Trouver en quels points on ne peut pas resoudre explicitement les équations suivantes, et esquisser les lieux décrits par ces équations (ici les varaibles jouent des rôles équivalents) :

$$y^2 + (x^2-1)x^2 = 0 \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ (x - 1/2)^2 + y^2 - 1/4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad y^2 - x^2(x-1);$$



avec nos meilleurs voeux pour Noël et la nouvelle année