3.5 Equations d'ordre deux à points singuliers réguliers

Considérons l'équation :

$$a_0(t) \cdot y'' + a_1(t) \cdot y' + a_2(t) \cdot y = 0 \tag{3-12}$$

où $a_0(t)$, $a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont des fonctions analytiques (i.e. développables en série au voisinage de tout point), définies pour t dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que $t_0 \in I$ est un point singulier de cette équation si $a(t_0) = 0$. Posons :

$$P(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \quad , \quad Q(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \quad ;$$

alors l'équation

$$y'' + P(t) \cdot y' + Q(t) \cdot y = 0 \tag{3-13}$$

est définie et a les mêmes solutions que (3-12) en dehors des points singuliers. Il suit de **2.4** que les solutions maximales sont définies sur tout intervalle contenu dans I ne contenant pas de point singulier, et sur un tel intervalle elles forment un espace vectoriel de dimension 2 d'après **3.1**.

On dit que le point singulier t_0 est régulier si les fonctions

$$(t - t_0) \cdot P(t) \quad \text{et} \quad (t - t_0)^2 \cdot Q(t)$$

sont analytiques au voisinage de t_0.

En quelque sorte, les points singuliers réguliers sont singuliers, mais pas trop. Nous verrons dans ce qui suit comment décrire des solutions de l'équation (3-13) au voisinage des points singuliers réguliers à l'aide des développements en série de $(t - t_0) \cdot P(t)$ et $(t - t_0)^2 \cdot Q(t)$ au point t_0. On commence par l'équation d'Euler, qui est un cas relativement simple, puis on passe au cas général.

L'équation d'Euler

Il s'agit de l'équation

$$t^2 \cdot y'' + \alpha \cdot t \cdot y' + \beta \cdot y = 0 \tag{3-14}$$

où α et β sont des constantes. On vérifie immédiatement que $t = 0$ est un point singulier régulier. Cherchons une solution au voisinage de ce point, tout d'abord pour $t > 0$, de la forme :

$$\varphi(t) = t^r$$

où r est une valeur à déterminer. On a :

$$\varphi'(t) = r \cdot t^{r-1} \quad , \quad \varphi''(t) = r(r-1) \cdot t^{r-2}$$

et en remplaçant dans (3-14) :

$$r(r-1) \cdot t^2 \cdot t^{r-2} + \alpha \cdot t \cdot r \cdot t^{r-1} + \beta \cdot t^r = 0$$

ce qui se ramène à l'équation :

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

qui s'appelle *équation indicielle*. Les solutions sont :

$$r_1 = \frac{-(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{-(\alpha-1) - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad .$$

Trois cas se présentent :

i) $(\alpha-1)^2-4\beta>0$. Dans ce cas r_1 et r_2 sont réels, distincts. Alors t^{r_1} et t^{r_2} sont des solutions et on vérifie qu'elles sont linéairement indépendantes.

ii) $(\alpha-1)^2-4\beta<0$. Dans ce cas, si $r=\lambda+i\cdot\mu$ est l'une des racines de l'équation indicielle, $\mu\neq 0$ et l'autre est $\lambda-i\cdot\mu$. On a :

$$t^r=e^{(\lambda+i\cdot\mu)\log(t)}=t^\lambda(\cos(\mu\cdot\log(t))+i\sin(\mu\cdot\log(t)))$$

et en prenant les parties réelles et imaginaires on obtient les deux solutions linéairement indépendantes :

$$t^\lambda\cos(\mu\cdot\log(t)) \quad , \quad t^\lambda\sin(\mu\cdot\log(t)) \quad .$$

iii) $(\alpha-1)^2-4\beta=0$. Dans ce cas on obtient seulement la solution t^{r_1}. Mais $F(r)=(r-r_1)^2$, donc $F(r_1)=F'(r_1)=0$ et si on considère ce cas comme cas limite des précédents, cela suggère de dériver t^r par rapport à r pour obtenir une deuxième solution. Posons :

$$\psi(t)=\frac{\partial}{\partial r}(t^r)_{r=r_1}=(\log(t)\cdot t^r)_{r=r_1}=\log(t)\cdot t^{r_1}$$

Pour vérifier que c'est une solution, définissons l'opérateur L sur les fonctions $\varphi(t)$ par :

$$L(\varphi)=t^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\alpha\cdot t\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\beta\cdot\varphi$$

et remarquons qu'il commute avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial r}$; ainsi :

$$L\Big(\frac{\partial t^r}{\partial r}\Big)=\frac{\partial}{\partial r}\big(L(t^r)\big)=\frac{\partial}{\partial r}\big(t^r\cdot F(r)\big)=t^r\cdot\log(t)\cdot F(r)+t^r\cdot F'(r)$$

et si on pose $r=r_1$ cette dernière expression est nulle, ce qui montre bien que $\psi(t)=\log(t)\cdot t^{r_1}$ est une solution, dont on vérifie facilement qu'elle est linéairement indépendante de t^{r_1}.
Pour lever la restriction que $t>0$, il suffit de remplacer dans les solution ci-dessus t par $|t|$.

Le cas général

On se place dans le cas d'une équation d'ordre deux à point singulier régulier en $t=0$, soit :

$$y''+P(t)\cdot y'+Q(t)\cdot y$$

où $t\cdot P(t)=\alpha(t)$ et $t^2\cdot Q(t)=\beta(t)$ sont développables en série au voisinage de $t=0$. On a donc :

$$\alpha(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cdot t^k \quad , \quad \beta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\cdot t^k \quad , \quad \text{pour} \quad |t|<\rho$$

et l'équation peut s'écrire :

(3-15) . $$t^2\cdot y''+t\cdot\alpha(t)\cdot y'+\beta(t)\cdot y=0$$

On travaille de nouveau avec $t>0$ pour commencer; on va chercher une solution de la forme

$$\varphi(t)=t^r\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot t^k$$

où $c_0 \neq 0$ (sinon on devrait remplacer r par $r+1$...). Il s'agit donc de déterminer r et les coefficients c_k. Pour cela, remplaçons dans (3-15) :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^{k+r} \quad , \quad \beta(t)\cdot\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+r}\Big(\sum_{j=0}^{k} c_j \cdot \beta_{k-j}\Big)$$

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (k+r)\cdot t^{k+r-1} \quad , \quad t\cdot\alpha(t)\cdot\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+r}\Big(\sum_{j=0}^{k} c_j \cdot \alpha_{k-j}\cdot(j+r)\Big)$$

$$\varphi''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (k+r)\cdot(k+r-1)\cdot t^{k+r-2} \quad , \quad t^2\cdot\varphi''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot(k+r)\cdot(k+r-1)\cdot t^{k+r}$$

et en remplaçant dans (3-15) on obtient :

$$t^r\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} t^k\Big[(k+r)(k+r-1)\cdot c_k + \Big(\sum_{j=0}^{k} c_j\cdot\alpha_{k-j}\cdot(j+r)\Big) + \sum_{j=0}^{k} c_j\cdot\beta_{k-j}\Big]\Big\} = 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$\text{(3-16)}\quad t^r\Big\{\Big((r(r-1)+\alpha_0\cdot r+\beta_0\Big)\cdot c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k\Big[(k+r)(k+r-1)\cdot c_k + \sum_{j=0}^{k}\big((j+r)\cdot\alpha_{k-j}+\beta_{k-j}\big)\cdot c_j\Big]\Big\} = 0\ .$$

Si l'on pose

$$F(r) = r(r-1) + \alpha_0\cdot r + \beta_0$$

en annulant les coefficients de t^k dans (3-16) on obtient les équations :

$$F(r) = 0$$

que l'on appelle encore équation indicielle, ainsi que

$$\text{(3-17)}\qquad F(z+k)\cdot c_k + \sum_{j=0}^{k-1}[(j+r)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j}]\cdot c_j = 0 \quad .$$

Choisissons $c_0 \neq 0$. Soient z_1 et z_2 les racines (éventuellement non réelles) de l'équation indicielle, numérotées de sorte que la partie réelle de z_1 soit au moins égale à celle de z_2; cela assure que $F(z_1) = 0$, mais $F(z_1+k) \neq 0$ pour tout entier positif k. On peut alors résoudre les équations (3-17) dans lesquelles on a remplacé $z = z_1$, par induction sur k, pour exprimer c_k en fonction des α_j et β_j, $j \leq k$.

On peut montrer, mais nous ne le ferons pas ici, que la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ ainsi trouvée converge, sur le même domaine $|t| < \rho$ que les séries de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

Si $t < 0$, en posant $\varphi(t) = (-t)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ et en remplaçant dans (3-15), on trouve le même système d'équations (3-17) pour les c_k. On trouve ainsi une première solution de (3-15) sous la forme :

$$\varphi_1(t) = |t|^{z_1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot t^k \quad .$$

Si on suppose en plus que $z_1 - z_2$ n'est ni zéro, ni un entier positif, on obtient une deuxième solution en remplaçant $z = z_2$ dans (3-17); si on choisit à nouveau $c'_0 \neq 0$ et on appelle c'_k, $k \geq 1$ les solutions de (3-17), la fonction

$$\varphi_2 = |t|^{z_2}\sum_{k=0}^{\infty} c'_k\cdot t^k$$

est une deuxième solution de (3-15), linéairement indépendante de $\varphi_1(t)$.

3.24 Exemple - L'équation hypergéométrique de Gauss.
Il s'agit de l'équation :

$$t(1-t)\cdot y'' + [c-(a+b+1)t]\cdot y' - ab\cdot y = 0 \tag{3-18}$$

où a, b, c sont des constantes. On peut la mettre sous la forme :

$$y'' + P(t)\cdot y' + Q(t)\cdot y = 0 \quad \text{avec} \quad P(t) = \frac{c-(a+b+1)t}{t(1-t)} \quad , \quad Q(t) = -\frac{ab}{t(1-t)}$$

et donc $t=0$ et $t=1$ sont des points singuliers. On a :

$$\alpha(t) = t\cdot P(t) = [c-(a+b+1)t](1+t+t^2+\cdots) \quad , \quad \beta(t) = t^2\cdot Q(t) = -abt(1+t+t^2+\cdots) \tag{3-19}$$

d'où l'on déduit que $t=0$ est un point singulier régulier. On montre de manière semblable que $t=1$ est un points singulier régulier. On va se concentrer sur $t=0$; on déduit de (3-19) que $\alpha_0 = c$, $\beta_0 = 1$ et l'équation indicielle s'écrit alors :

$$r(r-1) + c\cdot r = 0$$

et les racines sont $r_1 = 0$ et $r_2 = 1-c$. Supposons que c ne soit pas un entier négatif ou nul. Ce qui précède montre alors que l'on a une solution de (3-18) de la forme :

$$\varphi(t) = t^0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

où les c_k peuvent être déterminés en remplaçant $y = \varphi(t)$ dans (3-18). Cela nous donne :

$$(t-t^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + [c-(a+b+1)t]\sum_{k=1}^{\infty} kc_k t^{k-1} - ab\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \equiv 0$$

on en tire le coefficient de t^k, $k \geq 1$:

$$-k(k-1)c_k + k(k+1)c_{k+1} - (a+b+1)kc_k + c(k+1)c_{k+1} - abc_k = 0$$

et de là la formule de récurrence pour déterminer les c_k :

$$c_{k+1} = c_k \frac{k(k-1)+k(a+b+1)+ab}{(k+1)(c+k)} = c_k \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)} \quad .$$

Si on choisit $c_0 = 1$, on trouve :

$$c_1 = \frac{ab}{c} \quad , \quad c_2 = \frac{ab}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} \quad , \quad c_3 = \frac{ab}{c}\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}$$

et alors

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{c(c+1)\cdots(c+k-1)}$$

On pose

$$F(a,b,c,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{c(c+1)\cdots(c+k-1)} t^k$$

et on l'appelle fonction hypergèométrique. Notons que

$$F(1,b,b,t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

et on retrouve donc la série géométrique de raison t (qui converge pour $|t| < 1$). Pour d'autres valeurs de a, b et c on retrouve toute sorte de fonctions intéressantes. Si a ou b sont des entiers négatifs ou nuls, c'est un polynôme, puisque tous les termes d'ordre supérieurs ou égaux à $|a|$ ou $|b|$ sont nuls.