UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II réelle
Série 1

19 octobre 2004

---

1. Soit M un nombre réel et n un entier naturel. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$$

de manière directe.

2. Etudier la convergence des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$$

3. Soient x, b des nombres réels, avec $x > 0$. Etudier la fonction

$$x \to x^b$$

selon que $b < 0$, $b = 0$ ou $b > 0$, et en particulier trouver $\lim_{x\to\infty} x^b$. Que se passe-t-il si $x < 0$?

4. On considère les ensembles suivants :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x+y \leq 1\right\} \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (x^2-1)(x^2-4) = 0\right\}$$
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2y\right\} \qquad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos(z)\,, y = \sin(z)\right\}$$

Lesquels sont fermés, ouverts, bornés, compacts ?

5. Soit n un entier positif. Dessiner le graphe de la fonction suivante, définie pour $0 \leq x \leq 1$; montrer qu'elle est continue et trouver son supremum :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \quad .$$