UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II réelle
Série 19

19 avril 2005

---

1. Résoudre les équations $y' = A(y)$ en calculant l'exponentielle, dans les 2 cas suivants :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$$

Dans le cas b), écrire $A = \mu \cdot I + \alpha \cdot J$, où I est la matrice identité et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observer que $J^2 = -I$ et calculer l'exponentielle de $(t - t_0) \cdot J$ à partir de la série qui la définit.

2. Soit I_n la matrice identité de rang n, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ et N la matrice $n \times n$ matrice nilpotente :

$$N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n} \quad .$$

Posons $A = \lambda I_n + \cdot N$. Montrer que :

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. On désigne par $M(n, n, \mathbb{R})$ l'espace des $n \times n$-matrices à coefficients réels et par $\mathcal{G}\ell(n, \mathbb{R})$ celles qui sont inversibles.

- Soit $\varphi : M(n, n, \mathbb{R}) \to \mathcal{G}\ell(n, \mathbb{R})$, $\varphi(A) = e^A$. Montrer que la dérivée de φ en 0 est donnée par

$$d\varphi_0(A) = A$$

- Soit $Asym(n) = \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\}$ (matrices antisymétriques). Montrer que l'application ψ qui est la restriction de φ à $Asym(n)$ est une paramétrisation locale du groupe orthogonal $\mathcal{O}(n) = \{R \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid R^t R = I\}$ au voisinage de I =identité. *(Indication : montrer que ψ est à valeur dans $\mathcal{O}(n)$ et que l'image de la dérivée $d\psi_0$ est égale à l'espace tangent à $O(n)$ au point I)*
- Soient $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$d\psi_0(\Omega) \cdot x = \Omega \cdot x = \omega \times x \quad \text{(produit vectorirel)}$$
