UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II réelle
Série 2

26 octobre 2004

1. Soit n un entier positif et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Calculer $\|f_n\|_\infty$, $\|f_n\|_1$, $\|f_{n+k} - f_n\|_\infty$, $\|f_{n+k} - f_n\|_1$.

2. Considérons la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calculer les normes $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ de f_n. Etudier la convergence de cette suite de fonctions selon les diverses normes.

3.

a) Soit $f_n(x) = (x \cdot (1-x))^n$. Calculer $\sup\{f_n(x), 0 \leq x \leq 1\}$ et en déduire que f_n tend uniformément vers 0, pour $x \in [0,1]$.

b) Soit $P[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, c'est-à-dire les fonctions de la forme $\sum_{h=0}^d a_h x^h$. Montrer que

$$\left\| \sum_{h=0}^d a_h x^h \right\|_* = \sum_{0 \leq h \leq d} |a_h|$$

définit une norme sur $P[0,1]$.

Montrer que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_*$, pour tout $f \in P[0,1]$. Néanmoins, déduire de a) que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

c) Montrer que si $f_n(x) = \sum_{h=0}^d a_h^n x^h$, $n = 1, \ldots, \infty$ est une suite dans $P[0,1]$ vérifiant $\deg(f_n) \leq d$, $\forall n \geq 1$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x)|, 0 \leq x \leq 1\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_h^n = 0 \quad , \quad \forall h = 0, \ldots, d.$$

4. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ et $\varphi : D \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = \overline{z} = x - i \cdot y$, si $z = x + i \cdot y$. Montrer qu'il n'est pas possible d'approcher φ, au sens de la norme $\| \ \|_\infty$, par des fonctions de la forme $\sum_{h=0}^d a_h z^h$ (polynômes en z). *Indication : si $f_n(z)$ est une suite de polynômes qui approche φ, considérer la suite $z \cdot f_n(z)$ et l'intégrale de ces fonctions sur le cercle unité.*