UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II réelle
Série 25

31 mai 2005

Considérons la 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\omega(x,y,z) = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \quad .$$

Soit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ l'équation de la sphère standard $\mathbb{S}^2$.

Montrer que $\omega \wedge df = 2(x^2+y^2+z^2)dx \wedge dy \wedge dz$. En déduire que l'intégrale de ω sur $\mathbb{S}^2$ est égale à l'aire de la sphère.

Calculez cette aire, par exemple en paramétrant la sphère par l'application :

$$\varphi(s,t) = \big(\sin(s)\cdot\cos(t), \sin(s)\cdot\sin(t), \cos(s)\big) \quad , \quad 0 \leq s \leq \pi \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

et en calculant l'intégrale de $\varphi^*(\omega)$ sur le rectangle $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$.