UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II réelle
Série 5

16 novembre 2004

---

1. Soit $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Comme on le devine sur son graphe, ce polynôme possède une racine près de $x_0 = 2$. Calulez-la à l'aide de la méthode de Newton, avec $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$, à 2 décimales près. (*Indication : vérifiez que l'on peut prendre* $x_0 = 2$, $r = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{5}$.)

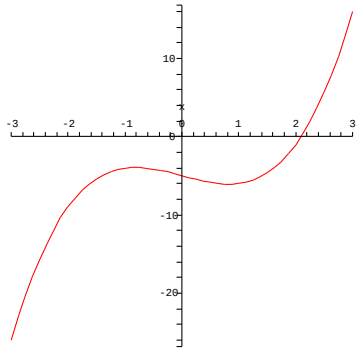

FIG. 1 – Graphe de $x^3 - 2x - 5$

2. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application continue, admettant une dérivée continue. Supposons que $f(\omega) = \omega$ et $|f'(\omega)| < 1$, pour un $\omega \in]a, b[$. Utiliser le théorème des accroissements finis pour en déduire l'existence d'un $r > 0$ tel que $[\omega - r, \omega + r] \subset]a, b[$ et tel que le théorème du point fixe s'applique à $f|_{[\omega - r, \omega + r]}$. Montrer que si $|f'(x_0)| > 1$ un tel r n'existe pas.

3. Soit $f(x) = \frac{1}{2}x(1 - x)$. Trouver les points fixes de f. Pour chaque point fixe ω dire, à l'aide de l'exercice précédent, s'il existe un voisinage V tel que si $x \in V$, les itérés de $f^n(x)$ convergent vers ω ou non ; representez graphiquement ces itérés, comme sur le dessin ci-contre. Même question pour $f(x) = 2x(1 - x)$

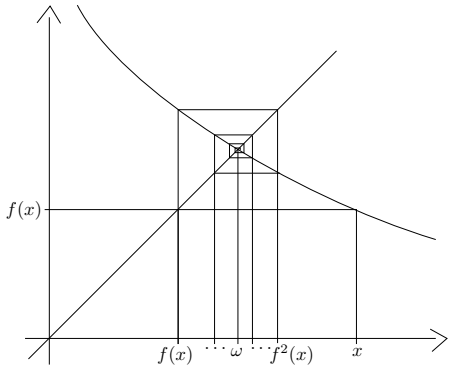

FIG. 2 – Itérations de $x \mapsto f(x)$

4. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe (*Indication : considérer la fonction* $g(x) = f(x) - x$).