UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II réelle
Série 9

14 décembre 2004

Pour les esquisses demandées dans les exercices 1 et 2, on peut utiliser Maple pour aider l'imagination

1. Calculer la dérivée de f et esquisser les ensembles $\Sigma(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{rang}(df_x) \leq 1\right\}$ et $f(\Sigma(f))$ dans le cas suivants :

a) $f(x, y) = (x^2, y^2)$ *b)* $f(x, y) = (x, y^3 - xy)$
c) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ *d)* $f(x, y) = (x^2/2 + y, y^2/2 + x)$

2. Calculer la dérivée de f et trouver les points où elle de rang ≤ 1 :

1. $f(x, y) = (x, xy, y^2)$, $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$
2. $f(x, y) = (x\cos(y), x\sin(y), \sin(y)^2)$, $-1 < x < 1$, $y \in \mathbb{R}$

Esquisser l'image de f dans $\mathbb{R}^3$ en regardant les images des droites $y =$ constante. Dans 1., l'image de f est appelée "parapluie de Whitney", dans 2. c'est une représentation du ruban de Moebius.

3. Soit $M(n)$ l'espace des $n \times n$-matrices à coefficients réels. Si $A \in M(n)$, on note par A^t sa transposée. L'espace des $n \times n$-matrices symétriques à coefficients réels sera désigné par $Sym(n)$:

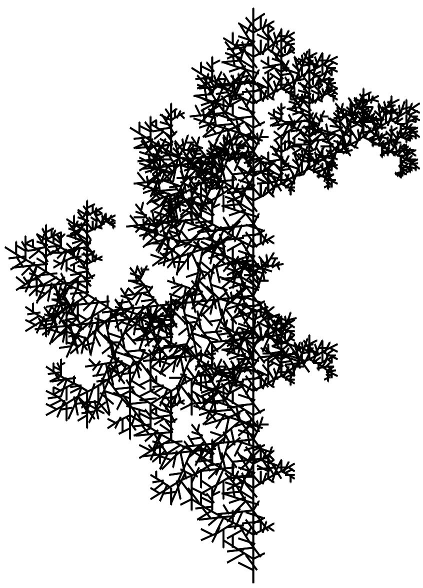
$$Sym(n) = \left\{A \in M(n) \mid A = A^t\right\} \quad .$$

Considérons l'application :

$$\varphi : M(n) \to Sym(n) \quad , \quad A \mapsto A \cdot A^t$$

et désignons par $\mathbb{I}_n \in M(n)$ la matrice de l'identité. Calculez la dérivée de φ.

Montrez que si $\varphi(A) = \mathbb{I}_n$ (i.e. A est orthogonale), alors $d\varphi_A$ est surjective.



Avec tous nos voeux pour les fêtes de Noël