

Justifiez vos réponses

1. Calculez l'exponentielle de la matrice $t \cdot A$, où $t \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Donnez un système fondamental des solutions de l'équation différentielle $y' = A(y)$, où $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

2. Trouver les points critiques du champ de vecteurs $\xi = (-x + y^3, -y + x^3)$ et étudier leur stabilité par linéarisation.

• *Question bonus* (Donne un point supplémentaire en cas de réponse correcte.)

Esquissez le cône paramétré par $\psi(s, t) = (s \cdot \cos(t), s \cdot \sin(t), s)$ et calculez son aire.

Correction :

1. On a :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=C}$$

et B et C commutent, car $B = 2 \cdot I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité, qui commute avec toutes les matrices. De même, $t \cdot A = t \cdot B + t \cdot C$, et ces deux matrices commutent. On sait alors que

$$e^{tA} = e^{tB} \cdot e^{tC} = e^{2t} \cdot e^{tC} .$$

On va calculer e^{tC} à partir de la série qui définit l'exponentielle d'une matrice e^X :

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots + \frac{1}{k!}X^k + \dots .$$

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $tC = t \cdot J$. On calcule que $J^2 = -I$, d'où $J^3 = -J$, $J^4 = I$. On en déduit que

$$e^{tC} = I + t \cdot J - \frac{t^2}{2!} \cdot I - \frac{t^3}{3!} \cdot J + \frac{t^4}{4!} \cdot I + \dots = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

et donc

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Por avoir un système fondamentale de solutions, on prend 2 conditions initiales de la forme $(0, y_1)$ et $(0, y_2)$, où $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$ forment une base de \mathbb{R}^2 ; on sait alors que les solutions correspondantes φ_1, φ_2 forment une base de l'espace vectoriel de toutes les solutions, ce qui veut dire par définition qu'elles forment un système fondamental de solutions. Le plus simple est de prendre $y_1 = (1, 0)$ et $y_2 = (0, 1)$, et on obtient alors $\varphi_1(t) = e^{2t}(\cos(t), -\sin(t))$, $\varphi_2(t) = e^{2t}(\sin(t), \cos(t))$.

2. Les points singuliers sont les solutions du système d'équations :

$$-x + y^3 = 0 \quad , \quad -y + x^3 = 0 \quad .$$

On tire de la première équation que $x = y^3$, qui remplacé dans la deuxième donne $-y + (y^3)^3 = -y(1 - y^8) = 0$, d'où l'on tire $y = 0$, $y = -1$ ou $y = 1$. Comme $x = y^3$, on trouve les 3 point singuliers :

$$(0, 0) \quad , \quad (-1, -1) \quad , \quad (1, 1) \quad .$$

Pour étudier leur stabilité, on prend la dérivée du champ ξ . On trouve :

$$A_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & 3y^2 \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Puisque $A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on voit tout de suite que la seule valeur propre est -1 , réelle négative, donc $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

$A_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique vaut $(\lambda + 1)^2 - 9 = (\lambda - 2)(\lambda + 4)$. Comme il y a une racine réelle positive, $(1, 1)$ est instable.

$A_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ aussi, donc $(-1, -1)$ est aussi instable.

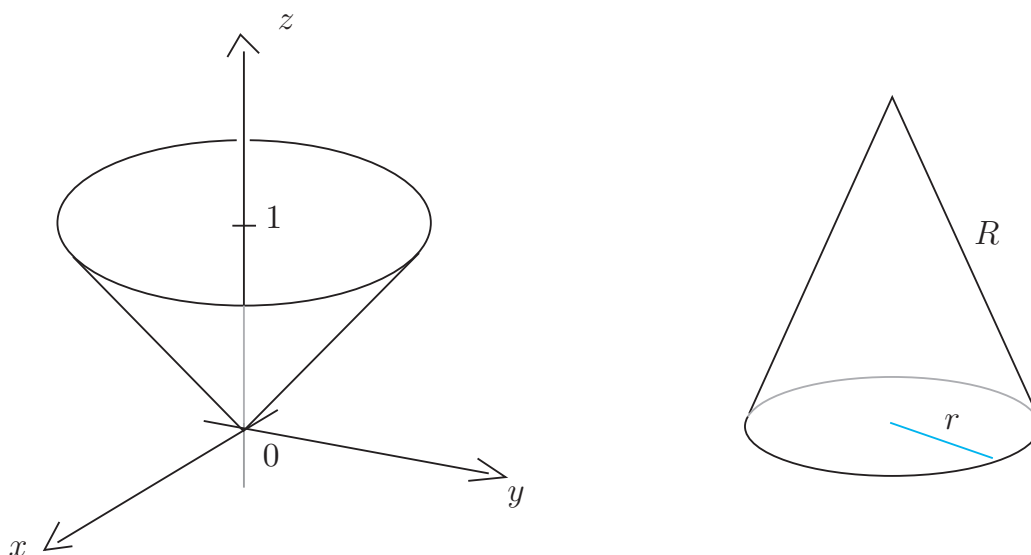


FIG. 1 – Cône paramétré par $(s, t) \mapsto (s \cos(t), s \sin(t), s)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ et cône à base circulaire quelconque

• *Question bonus*

On a omis de préciser que $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq s \leq a$, où $a > 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= (\cos(t), \sin(t), 1) \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-s \sin(t), s \cos(t), 0) \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (-s \cos(t), s \sin(t), s) \quad , \quad \left\| \frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\| = \sqrt{2} \cdot s \quad , \quad \nu = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial s} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos(t), \sin(t), 1) \end{aligned}$$

L'aire \mathcal{A} du cône est obtenue en intégrant le déterminant 3×3 dont les lignes sont constituées par ν , $\frac{\partial \psi}{\partial s}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$:

$$a(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -\cos(t) & \sin(t) & 1 \\ \cos(t) & \sin(t) & 1 \\ -s \sin(t) & s \cos(t) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (s - (-s)) = \sqrt{2} s \quad (\text{on développe par rapp. à la dernière colonne})$$

Enfin :

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \sqrt{2}s \, ds \right) dt = 2\pi \int_0^a \sqrt{2}s \, ds = \pi\sqrt{2}a^2$$

En général, l'aire latérale d'un cône à base circulaire, dont le rayon de la base vaut r et la longueur de la génératrice vaut R , est égale à πRr . Dans notre cas, $r = 1$ et $R = \sqrt{2}$.

(On trouvera [ici](#) une autre approche du cône)