Définition et propriétés de la dérivée

cours Analyse II réelle

Felice Ronga

December 27, 2004

Définition de la dérivabilité

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application.

Définition de la dérivabilité

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application.
Soit $a \in \Omega$. On dit que f est dérivable (ou différentiable) au point a s'il existe une application linéaire $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\|$ assez petit :

[width=5cm]

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + r(h) \quad , \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + r(h) \quad , \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Autrement dit :

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|} \right\| \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0$$

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + r(h) \quad , \quad \text{avec} \ \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Autrement dit :

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|} \right\| \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0$$

ou encore :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon \ \text{tel que} \ \|h\| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(a+h) - f(a) - A(h)\| \leq \varepsilon \cdot \|h\| \quad .$$

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + r(h) \quad , \quad \text{avec} \ \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Autrement dit :

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|} \right\| \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0$$

ou encore :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon \text{ tel que } \|h\| \le \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(a+h) - f(a) - A(h)\| \le \varepsilon \cdot \|h\| \quad .$$

Si l'on pose $\phi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)-A(h)}{\|h\|}$, cela veut encore dire que :

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + \phi(h) \cdot \|h\| \quad , \quad \text{avec} \quad \phi(h) \to 0 \text{ si } h \to 0$$

Propriétés de la dérivées

- Si f est dérivable au point a, elle est continue en ce point, mais la réciproque est fausse: penser à $|x|$ en 0.
- Si f est dérivable au point $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, la limite suivante existe :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = A(v)$$

On appelle $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ la *dérivée de f dans la direction du vecteur v au point a*. Ainsi on voit que A est entièrement déterminée par f; on l'appelle la dérivée de f au point a, et on la note

$$df_a \qquad \text{ou} \qquad f'(a)$$

- Si $f = (f_1, \ldots, f_p) : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est dérivable au point $a \in \Omega$, la matrice de sa dérivée $df_a = f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est appelée *matrice jacobienne* (inventée par Carl Jacobi, 1804–1851); elle s'écrit :

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$$

où

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f_i(a)}{t}$$

Par abus de langage, on écrit souvent $df_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$. Les $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ sont appelées *dérivées partielles de f au point a*.

On a le résultat fondamental :

Proposition

Si les $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ *existent pour* x *dans un voisinage de* a*, et sont continues sur ce voisinage, alors* f *est dérivable au point* a*.*

D'autres propriétés :

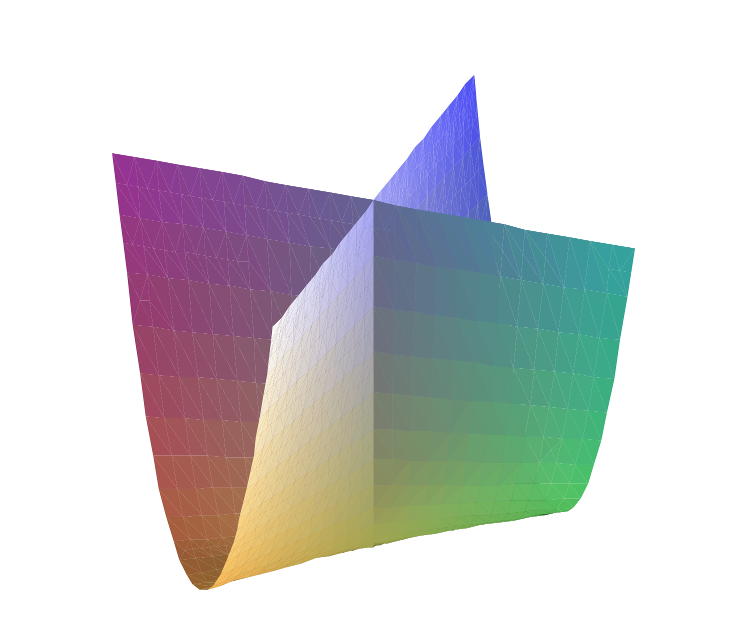
- Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire sa dérivée en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ coincide avec A elle-même, en effet :

$$A(x + h) = A(x) + A(h)$$

  et donc les conditions de la définition de dérivabilité sont satisfaites avec $r(h) \equiv 0$. La matrice jacobienne dans ce cas n'est autre que la matrice de l'application linéaire A.
- Dérivation de fonctions composées : si f est dérivable en a, $b = f(a)$, et g est dérivable en b, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et

$$d(g \circ f)_a = dg_b \circ df_a$$

Le parapluie de Whitney... :



...et le ruban de Moebius