Equations différentielles : stabilité

cours Analyse II réelle

Felice Ronga

le 3 mai 2005

Equation prédateur-proie (Lotke-Volterra)

Le système s'équations: $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = -y(1-x) \end{cases}$ exprime l'évolution du nombre d'individus de deux espèces, $x, y > 0$.

$x =$ nombre de proies

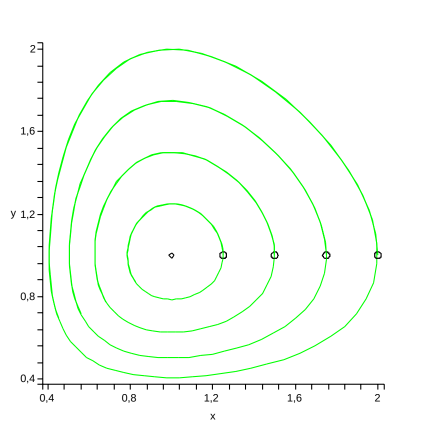
$y =$ nombre de prédateurs

La fonction suivante est une intégrale première :

$$F(x,y) = \log(x) - x + \log(y) - y$$

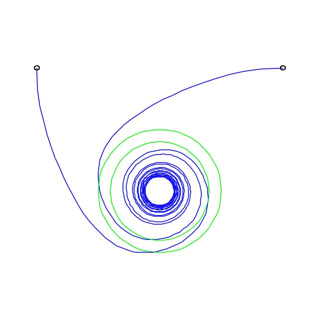
ce qui signifie que F est constante sur les trajectoires; ici en fait les niveaux $F(x,y) = cte$ coïncident avec les trajectoires. On vérifie que $F(1,1) = -2$ et que F admet un minimum strict de F. On peut alors regarder la fonction $L(x,y) = F(x,y) + 2$ comme une fonction de Liapounov pour le champ de vecteurs $\xi(x,y) = (x(1-y), -y(1-x))$ sur l'ouvert $x > 0, y > 0$, avec $L_\xi(x,y) = 0$, $\forall\, x, y > 0$.

Trajectoires de l'équation prédateur-proie



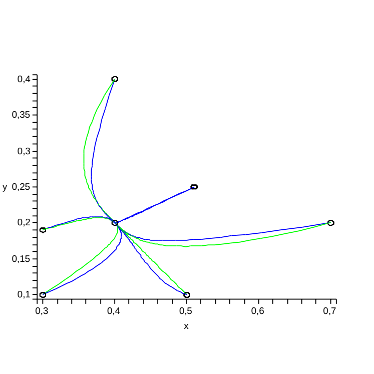
Les trajectoires coïncident avec les niveaux de la fonction $F(x, y) = \log(x) - x + \log(y) - y$.

Trajectoires de $\xi = (-y - x^3, x - y^3)$ près de $(0, 0)$



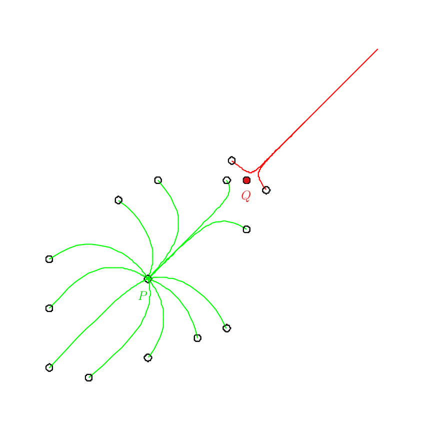
La partie linéaire de ξ en 0 est $(-y, x)$, dont les trajectoires sont des cercles. $L(x, y)) = x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapounov pour ξ, avec L_ξ définie négative. 0 est donc asymptotiquement stable, mais les trajectoires tendent vers 0 lentement, car elles sont un peu attirées par les cercles.

Trajectoires de $\xi = (x(1-2x-y), y(1-x-3y))$ (espèces en compétition)



$P = (1/5, 2/5)$ est le seul point critique dans le premier cadran (strict). On a représenté quelques trajectoires de ξ, ainsi que les trajectoires avec même point de départ de la partie linéaire de ξ en P

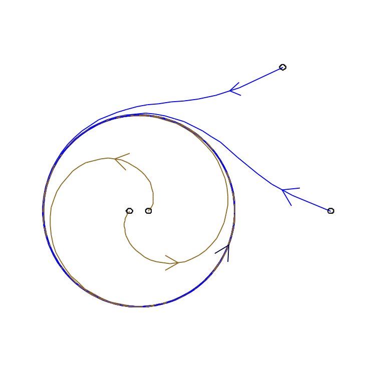
Trajectoires de $\xi = (-x + y^2, -y + x^2)$



$P = (0,0)$ et $Q = (1,1)$ sont les points critiques. P est asymptotiquement stable, Q n'est pas stable (de type selle). Si on part trop loin de P, la trajectoire s'éloigne de P.

Bifurcation de Hopf

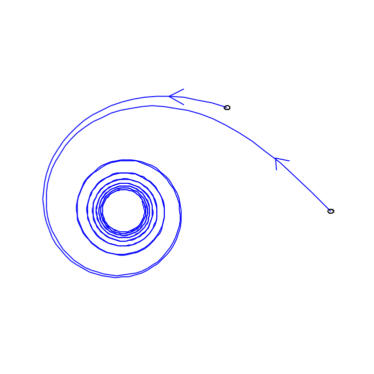
Trajectoires de $\begin{cases} x' = -y + x(\varepsilon - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(\varepsilon - x^2 - y^2) \end{cases}$ lorsque $\varepsilon = 1$.



Le cercle de rayon 1 centré à l'origine est un attracteur.

Bifurcation de Hopf

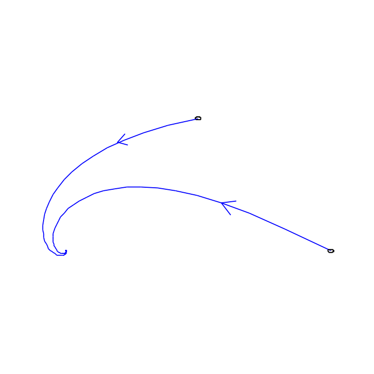
Trajectoires de $\begin{cases} x' = -y + x(\varepsilon - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(\varepsilon - x^2 - y^2) \end{cases}$ lorsque $\varepsilon = 0$.



L'origine est un attracteur faible.

Bifurcation de Hopf

Trajectoires de $\begin{cases} x' = -y + x(\varepsilon - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(\varepsilon - x^2 - y^2) \end{cases}$ lorsque $\varepsilon = -1$.



L'origine est un attracteur fort.