

Le calcul de Schubert selon Schubert

Felice Ronga

1^{er} juin 2005

Résumé

We try to understand and justify Schubert calculus the way Schubert did it.

1 Introduction

Dans son célèbre livre [7] “Kalkül der abzählende Geometrie”, paru en 1879, le Dr. Hermann C. H. Schubert a développé et appliqué une méthode pour résoudre des problèmes de géométrie énumérative, que l’on appelle aujourd’hui “Calcul de Schubert”. Il suffit d’un peu d’aptitude au raisonnement mathématique, de l’intuition géométrique et une bonne connaissance de la langue allemande pour se délecter des nombreux problèmes énumératifs qui sont présentés et résolus dans ce livre.

Le 15^{ème} problème de Hilbert propose de donner des bases rigoureuses pour justifier les résultats de Schubert ; cela a été fait dans une large mesure, par la théorie de l’intersection (voir [5], [4], [2]), et la plupart des résultats des calculs de Schubert ont pu être confirmés.

Notre propos ici est de comprendre et justifier la méthode même que Schubert a utilisée. On retracera aussi ses calculs dans quelques cas typiques.

Voici sommairement en quoi consiste la méthode de Schubert. On distingue tout d’abord des éléments de base de l’espace projectif complexe : points, plans, droites (dans l’ordre de complexité des ensembles de ces éléments). On représente par des symboles, disons x , y , des conditions (en allemand : *Bedingungen*) que doivent satisfaire des objets géométriques ; le produit $x \cdot y$ de deux conditions représente la condition que x et y doivent être satisfaites, la somme $x + y$ représente la condition que x ou y est satisfaite. Les conditions que l’on peut mettre sur les éléments de base, à l’aide d’autres éléments de base (par exemple : les droites qui passent par un point) satisfont un certain nombre de formules, que l’on peut déterminer par des raisonnements géométriques simples. Ces formules sont essentielles dans le procédé décrit ci-dessous.

Pour résoudre un problème de géométrie énumérative, on s’efforce de l’exprimer en termes de conditions sur les éléments de base, en ayant éventuellement recours à des situations modérément dégénérées, géométriquement plus simples à traiter, quitte à devoir tenir compte de multiplicités des solutions. Par exemple : étant donné une conique et un point P dans un même plan, trouver le nombre de tangentes à la conique qui passent par P ; si on prend la conique dégénérée en deux droites distinctes se coupant en un point Q , on détecte immédiatement que la seule solution est la droite passant par P et Q ; elle doit être comptée comme solution double, ainsi que l’indique la figure 1¹. Si on prend la conique dégénérée en une droite double, toutes les droites par P peuvent être considérées comme des tangentes à la conique et on ne peut rien conclure.

Schubert justifie cette façon de procéder par le principe de la conservation du nombre (*Prinzip der Erhaltung der Anzahl*, [7, § 4, page 12]), qui dit en gros que dans les cas dégénérés, le nombre de solutions d’un problème énumératif est conservé, pourvu qu’il reste fini. Comme toute justification de ce principe, Schubert se base sur l’analogie algébrique : le nombre de solutions d’une équation polynomiale ne change pas lorsqu’on en fait varier les coefficients, sauf si elle devient une identité, auquel cas on a une infinité de solutions.

La force de la démarche de Schubert réside dans la notation symbolique et les opérations sur les symboles, qui contiennent en germe la notion d’anneau de cohomologie (ou si l’on préfère, l’anneau de Chow). Une condition x représente en fait une famille de conditions, que l’on peut interpréter comme une classe de

¹Dans les figures, les éléments qui servent à exprimer des conditions sont en noir, les autres en gris

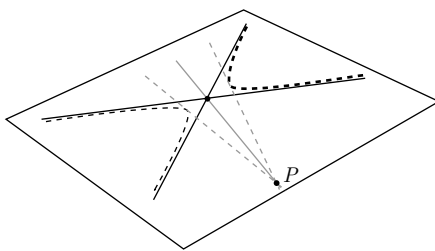


FIG. 1 – Une solution dégénérée qui compte double

cohomologie d'un espace de configurations. Il est sous-entendu que lorsqu'on fait un produit, disons $x \cdot y$, les ensembles des objets auxquels s'adressent ces conditions doivent être en position générale (ou tout au moins leur intersection doit avoir la bonne dimension, quitte à invoquer une multiplicité). Un exemple : p désigne la condition, adressée aux points de \mathbb{P}^3 , d'être contenus dans un plan ; p_g désigne la condition que les points soient sur la droite g ; on a alors : $p \cdot p = p_g$. En d'autres termes, le plan qui exprime la condition p est générique ; sans cela on aurait $p \cdot p = p$. En somme, l'ambiguïté éclairée du calcul avec les symboles est ce qui fait son efficacité.

Il faut relever qu'en utilisant quelques bons principes et des raisonnements géométriques simples, Schubert a obtenu une quantité de résultats remarquables, pour la justification desquels, selon les critères de rigueur actuels, de gros efforts ont été nécessaires. En plus des formules sur les éléments de base, un ingrédient important que Schubert a établi est ce qu'il a appelé *Coinzidenzformeln*, principalement la formule 1) de la page 44 de [7], qui est un prototype de formule d'intersection résiduelle, telle qu'on la trouve par exemple dans [2, théorème 9.2]. Elle lui a permis entre autres d'établir des formules de coïncidences multiples (*mehrfache Coinzidenzen*), avec une efficacité et une rigueur qui n'ont rien à envier à leurs analogues plus récents, que l'on trouve par exemple dans [3].

En terme de cohomologie, si X est un espace de configuration d'objets géométriques (par exemple les points d'une surface, l'espace des coniques), une condition x peut être représentée comme la classe duale à une classe d'homologie de cycles $[\Omega_x]$ de X . Alors la condition $x \cdot y$ représente la classe duale à $\Omega_x \cap \Omega_y$, pourvu que ces deux cycles soient en position générale. Les formules que Schubert démontre pour les éléments de base correspondent aux calculs des anneaux de cohomologie de l'espace projectif complexe \mathbb{P}^3 , de son dual $\check{\mathbb{P}}^3$, de la grassmannienne \mathcal{G} des droites de \mathbb{P}^3 , et finalement de l'espace \mathcal{PS} (Punkt und Strahl), constitué des paires formées d'une droite de l'espace projectif et d'un point sur la droite.

Se donner une droite de \mathbb{P}^3 revient à se donner un sous-espace vectoriel de dimension 2 de \mathbb{C}^4 , et donc on peut aussi regarder la grassmannienne \mathcal{G} comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de \mathbb{C}^4 ; on voit alors qu'on a un fibré vectoriel de rang 2 sur \mathcal{G} , appelé fibré tautologique, qui est constitué des paires (α, v) , où $\alpha \in \mathcal{G}$ et $v \in \alpha$. En fait, \mathcal{PS} n'est autre que le fibré projectif associé à η .

Remarquons que Schubert n'avait pas introduit de notation pour désigner les espaces \mathbb{P}^3 , $\check{\mathbb{P}}^3$, \mathcal{G} et \mathcal{PS} , puisqu'ils consistent en quelque sorte l'univers ambiant.

2 Formules pour les espaces de configurations de base

On introduit des symboles qui désignent des objets géométriques dans les divers espaces de base \mathbb{P}^3 , $\check{\mathbb{P}}^3$, \mathcal{G} ou \mathcal{PS} . Ces mêmes symboles désigneront aussi des conditions imposées aux objets de base. Les ensembles ainsi définis engendrent l'homologie des espaces de base ; dans le cas de \mathbb{P}^3 et \mathcal{G} ils forment même une décomposition cellulaire minimale. En exprimant leurs intersections en termes des éléments de base, on aura déterminé l'anneau de cohomologie de ces espaces.

Nous utiliserons évidemment la même notation que Schubert, basée sur les noms allemands des divers

objets. Aussi est-il utile de rappeler quelques mots de la langue allemande :

- Punkt : point
- Gerade : droite
- Ebene : plan
- Strahl : littéralement : rayon ; ici désigne le plus souvent l'ensemble des droites dans un plan fixé, passant par un point fixé, c'est-à-dire un pinceau de droites.
Parfois, ce mot est synonyme de droite, comme dans "Punkt und Strahl"

Notons enfin que, à défaut d'un mot plus précis, nous utiliserons le mot *condition*, traduction du mot allemand *Bedingung*, pour signifier une exigence à laquelle des objets géométriques sont soumis.

Nous travaillerons avec l'anneau de cohomologie, mais on peut tout aussi bien utiliser l'anneau de Chow. Lorsque des formules portent un numéro, c'est le même que dans [7].

2.1 L'espace projectif complexe \mathbb{P}^3

Voici les conditions de base (ou simples) que l'on peut mettre sur les points de l'espace :

Notation	Condition
p	le point doit être dans un plan donné
p_g	le point doit être sur une droite donnée
P	le point lui-même est donné

On vérifie facilement les relations :

$$1) p^2 = p_g \quad , \quad 2) p^3 = p \cdot p_g \quad , \quad 3) p \cdot p_g = P \quad , \quad 4) p^3 = P \quad .$$

A titre d'exemple, l'interprétation géométrique pédante de la première formule est la suivante : soient $e_1, e_2 \subset \mathbb{P}^3$ deux plans et

$$\Omega_{e_i} = \{P \in \mathbb{P}^3 \mid P \in e_i\} \quad , \quad i = 1, 2 \quad .$$

Alors p^2 désigne les points de l'intersection $\Omega_{e_1} \cap \Omega_{e_2}$ lorsque e_1 et e_2 sont en position générale, c'est-à-dire lorsque e_1 et e_2 se coupent en une droite ; la condition qu'un point se trouve sur cette droite est notée p_g .

Voici maintenant l'interprétation en cohomologie de ces formules. Désignons par $t \in H^2(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ la classe duale au cycle constitué par les points d'un plan de \mathbb{P}^3 ; alors t^2 est la classe duale à une droite et t^3 est la classe duale à un point de \mathbb{P}^3 .

Notons que si on choisit un drapeau $p \in g \subset e$, en notant par Ω_p, Ω_g et Ω_e les ensembles de points correspondants, on a que $\Omega_p \subset \Omega_g \subset \Omega_e \subset \mathbb{P}^3$ est une décomposition cellulaire de \mathbb{P}^3 .

On peut traiter de manière analogue le cas de \mathbb{P}^3 , l'espace des plans de \mathbb{P}^3 :

Notation	Condition
e	le plan doit passer par un point donné
e_g	le plan doit contenir une droite donnée
E	le plan lui-même est donné

On a les formules :

$$5) e^2 = e_g \quad , \quad 6) e^3 = e \cdot e_g \quad , \quad 7) e \cdot e_g = E \quad , \quad 8) e^3 = E \quad .$$

2.2 La grassmannienne \mathcal{G} des droites de \mathbb{P}^3

Voici les conditions de base :

Notation	Condition	Dimension
g	la droite doit couper une droite donnée	3
g_e	la droite doit se trouver dans un plan donné	2
g_p	la droite doit passer par un point donné	2
g_s	la droite doit appartenir à un pinceau donné	1
G	la droite elle-même est donnée	0

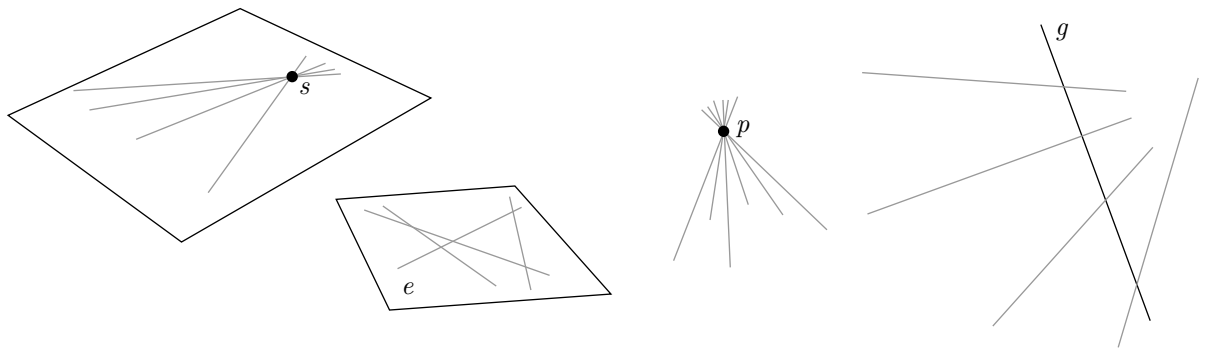


FIG. 2 – Les cycles de Schubert $\Omega_s, \Omega_e, \Omega_p, \Omega_g$

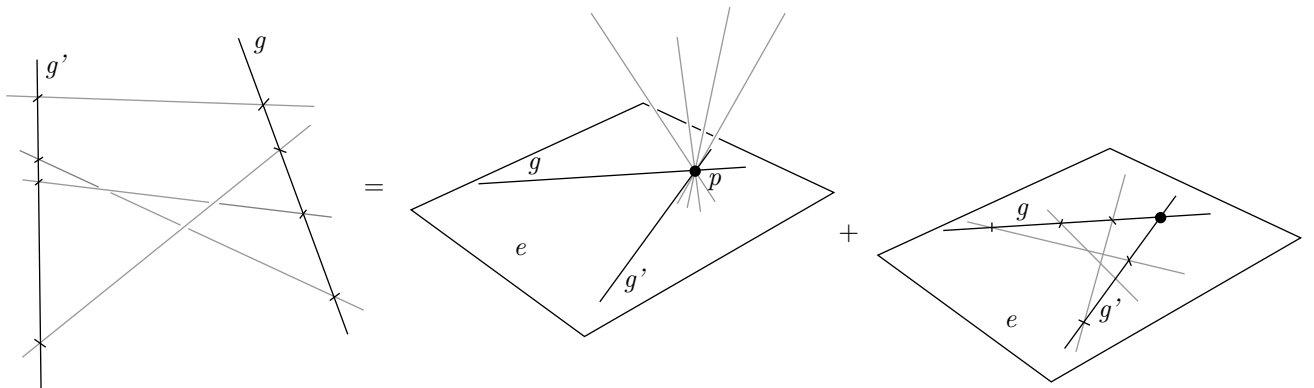
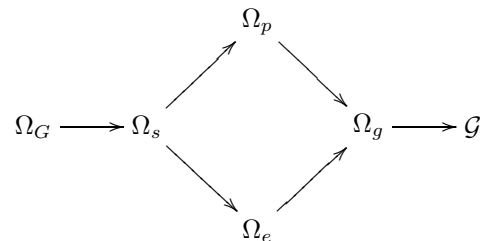


FIG. 3 – Comment voir que $g^2 = g_p + g_e$

Si on choisit un drapeau $P \in g \subset e \subset \mathbb{P}^3$, notons $\Omega_g, \Omega_e, \Omega_p, \Omega_s, \Omega_G = \{G\}$ les droites satisfaisant respectivement les conditions g, g_e, g_p, g_s, G . On a un diagramme d'inclusions :



et les Ω sont les cellules d'une décomposition cellulaire de \mathcal{G} (voir [6, § 6]). On appelle ces cellules *cycles de Schubert*. Pour exprimer g^2 en termes des conditions de base, on suppose que les deux droites données g et g' se coupent en un point P ; en prenant pour e le plan de g et g' on a :

$$\Omega_g \cap \Omega_{g'} = \Omega_p \cup \Omega_e$$

(voir figure 3) et de là Schubert conclut, en invoquant le principe de la conservation du nombre, la formule :

$$9) \quad g^2 = g_p + g_e \quad .$$

On va justifier cette formule de deux manières : d'abord, en exprimant les calculs en cohomologie. Ensuite, en montrant que Ω_g et $\Omega_{g'}$ se coupent transversalement en dehors du lieu Ω_s des droites du plan e passant par P , qui est de dimension 1; ceci justifie en fait la démarche même de Schubert : malgré que la situation où g et g' sont coplanaires soit dégénérée, il n'y a pas de multiplicité à prendre en compte dans l'intersection.

Notons que le groupe linéaire $\mathcal{G}\ell(4, \mathbb{C})$ agit transitivement sur \mathcal{G} . On peut donc l'utiliser pour mettre les cycles en position générale : si l'on prend des droites, des points ou des plans génériques, les cycles de Schubert correspondants sont transverses. On vérifie alors facilement les formules suivantes :

$$\begin{aligned} 10) \quad g \cdot g_p &= g_s \quad , \quad 11) \quad g \cdot g_e = g_s \\ 12) \quad g \cdot g_s &= G \quad , \quad 13) \quad g_p \cdot g_e = 0 \end{aligned}$$

En multipliant la formule 9) par g et en utilisant 10) et 11) on obtient :

$$14) \quad g^3 = g \cdot g_p + g \cdot g_e \quad , \quad 15) \quad g^3 = 2 \cdot g_s$$

En multipliant encore par g :

$$16) \quad g^4 = 2 \cdot g \cdot g_s = 2 \cdot g^2 \cdot g_e = 2 \cdot g^2 \cdot g_p = 2 \cdot g_p^2 = 2 \cdot g_e^2 = 2 \cdot G \quad .$$

Notons que la formule $g^4 = 2 \cdot G$ nous dit que le nombre de droites qui s'appuient sur 4 droites données est égal à 2. C'est un premier exemple, souvent cité, d'application du calcul de Schubert à la géométrie énumérative ; on y reviendra au § 2.2.2.

2.2.1 Cohomologie de \mathcal{G} et justification des formules de base

Regardons la grassmannienne \mathcal{G} comme l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de \mathbb{C}^4 . Soit $\eta = (E \xrightarrow{\pi} \mathcal{G})$ le fibré tautologique, fibré vectoriel de rang 2 :

$$E = \{(\alpha, v) \in \mathcal{G} \times \mathbb{C}^4 \mid v \in \alpha\} \quad , \quad \pi(\alpha, v) = \alpha \quad .$$

Soient $c_i(\eta) \in H^{2i}(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$, $i = 1, 2$, les classes de Chern de η , et $s_i(\eta) \in H^{2i}(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$, $i = 1, \dots, 4$, les classes de Segre (voir par exemple [2]). Elles sont liées par la relation :

$$(1 + c_1(\eta) + c_2(\eta)) \cdot (1 + s_1(\eta) + s_2(\eta) + s_3(\eta) + s_4(\eta)) = 1 \quad .$$

Désignons par \mathbb{I}^n le fibré trivial de rang n , de base un espace non spécifié qu'on peut déduire du contexte. Puisque $\eta \subset \mathbb{I}^4$, on peut poser $\eta' = \mathbb{I}^4/\eta$; alors $c(\eta') = s(\eta)$.

Soient maintenant x_1 et x_2 des variables formelles et soient $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ définis par la relation :

$$(1 + x_1 + x_2) \cdot (1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 1$$

ce qui revient à poser :

$$y_1 = -x_1 \quad , \quad y_2 = x_1^2 - x_2 \quad , \quad y_3 = 2x_1x_2 - x_1^3 \quad , \quad y_4 = x_1^4 - x_2^2 + 3x_1^2x_2$$

comme on vérifie facilement. On peut montrer (voir [8, proposition page 69]) que l'homomorphisme d'anneaux :

$$\mathbb{Z}[x_1, x_2] \rightarrow H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \quad , \quad x_i \mapsto c_i(\eta)$$

induit un isomorphisme d'anneaux :

$$\mathbb{Z}[x_1, x_2]/I(y_3, y_4) \xrightarrow{\simeq} H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$$

où $I(y_3, y_4)$ désigne l'idéal engendré par y_3 et y_4 . On voit que $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ est engendré en tant que groupe par :

$$c_1 \quad , \quad c_1^2 \quad , \quad c_2 \quad , \quad c_1c_2 \quad , \quad c_2^2$$

et la structure d'anneau est déterminée par les relations $2c_1c_2 - c_1^3 = 0$, $c_1^4 - c_2^2 + 3c_1^2c_2 = 0$, d'où on déduit encore que $2c_1^2c_2 - c_1^4 = 0$ et $c_1^2c_2 = c_2^2$.

Remarque. Dans [8, proposition page 69], on affirme que $H^*(\mathcal{G}) \simeq \mathbb{Z}[c_1, c_2]/I(\{s_j, j > 2\})$ où les s_j sont définies pour tout entier positif par la relation :

$$(1 + c_1 + c_2)(1 + s_1 + s_2 + \dots + s_j + \dots) = 1$$

à valoir dans l'anneau gradué $\mathbb{Z}[c_1, c_2]$. Mais on voit facilement que $s_j \in I(s_1, \dots, s_{j-1})$, et donc

$$I(\{s_j, j > 2\}) = I(s_3, s_4) \quad .$$

On va exprimer les classes duales par Poincaré des diverses cellules en termes des classes de Chern et de Segre de η . Voici déjà le résultat :

Notation symbolique	$-$	g	p	e	s	G
Cycle	\mathcal{G}	Ω_g	Ω_p	Ω_e	Ω_s	Ω_G
Classe duale	1	s_1	s_2	c_2	$s_1 c_2$	$c_2^2 = s_2^2$

Pour cela, appelons $v_i, i = 1, \dots, 4$ une base de \mathbb{C}^4 ; on désignera par $\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \rangle$ l'espace vectoriel engendré par v_{i_1}, \dots, v_{i_k} . On va exprimer les diverses conditions avec les éléments du drapeau

$$P = \langle v_1 \rangle \subset g = \langle v_1, v_2 \rangle \subset e = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{C}^4$$

Ω_g

Considérons le morphisme de fibrés $\varphi_g : \eta \rightarrow \mathbb{P}^4 / \langle v_1, v_2 \rangle$ induit par l'inclusion naturelle de η dans \mathbb{P}^4 . En se rappelant que g est la droite qui est le projectivisé de l'espace vectoriel $\langle v_1, v_2 \rangle$, on voit que

$$\Omega_g = \Sigma(\varphi_g)$$

où $\Sigma(\varphi_g) \subset \mathcal{G}$ désigne le lieu singulier de φ_g , à savoir l'ensemble des $\ell \in \mathcal{G}$ telles que la restriction de φ_g à la fibre au-dessus de ℓ n'est pas injective. Si on considère le morphisme $\Lambda^2(\varphi_g) : \Lambda^2(\eta) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{P}^4 / \langle v_1, v_2 \rangle)$ comme une section de $(\Lambda^2(\eta))^* \otimes \Lambda^2(\mathbb{P}^4 / \langle v_1, v_2 \rangle) \simeq (\Lambda^2(\eta))^*$, les zéros de cette section s'identifient à $\Sigma(\varphi_g)$, dont la classe duale vaut donc $c_1(\Lambda^2(\eta))^* = -c_1(\eta) = s_1(\eta)$.

Ω_e

On considère le morphisme naturel $\varphi_e : \eta \rightarrow \mathbb{P}^4 / \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, qui équivaut à une section σ de $\eta^* \otimes \mathbb{P}^4 / \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, et Ω_e est égal aux zéros de cette section, ce qui fait que sa classe duale vaut $c_2(\eta^*) = c_2(\eta)$.

Ω_p

Ici on prend le morphisme naturel $\varphi_p : \langle v_1 \rangle \rightarrow \mathbb{P}^4 / \eta$, qu'on peut voir comme section de \mathbb{P}^4 / η ; ses zéros constituent Ω_p , donc sa classe duale vaut $c_2(\mathbb{P}^4 / \eta) = s_2(\eta)$.

Ω_s et Ω_G

Soient e' le plan projectif correspondant à $\langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ et g' la droite projective correspondante à $\langle v_1, v_4 \rangle$. On remarque que $\Omega_s = \Omega_{g'} \cap \Omega_e$ et $\Omega_G = \Omega_e \cap \Omega_{e'}$, les intersections étant transverses. On en déduit que les classes duales sont respectivement $s_1 c_2$ et c_2^2 .

Par exemple, on peut retrouver la formule 9) en remarquant que $s_1^2 = c_1^2 = (c_1^2 - c_2) + c_2 = s_2 + c_2$. Aussi $s_1^4 = s_1(-c_1^3) = s_1(-2c_1 c_2) = 2c_1^2 c_2 = 2c_2^2$ nous redémontre que $g^4 = 2G$. On peut retrouver de façon analogue les autres formules.

2.2.2 Justification par le principe de la conservation du nombre

Pour introduire des coordonnées locales sur \mathcal{G} , on choisit un sous-espace vectoriel $\alpha_0 \subset \mathbb{C}^4$ de dimension 2 et un espace vectoriel supplémentaire α' . On désigne par $\text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$ l'espace des applications linéaires de α_0 dans α' ; on définit $\varphi : \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \rightarrow \mathcal{G}$ en associant à $A \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$ son graphe, ce qui définit une bijection sur l'ouvert

$$U_{\alpha_0, \alpha'} = \{\beta \in \mathcal{G} \mid \beta \cap \alpha' = \{0\}\} \quad .$$

On vérifie que l'on définit ainsi un atlas sur \mathcal{G} ; on notera par ℓ_A la droite projective correspondante à $A \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$.

Lemme. Soient $A, B \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$ et supposons que $\ell_A \in \Omega_{\ell_B}$. Alors il existe une droite vectorielle $\ell_0 \subset \alpha_0$ telle que $A|_{\ell_0} = B|_{\ell_0}$.

ℓ_A est un point régulier de Ω_{ℓ_B} si et seulement si $A \neq B$, et si c'est le cas, on a :

$$T(\Omega_{\ell_B})_{\ell_A} = \{\bar{A} \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \mid \bar{A}|_{\ell_0} : \ell_0 \rightarrow \alpha' / \text{Im}(A - B) \text{ est nulle} \}$$

Preuve: Au lieu de décrire Ω_{ℓ_B} au voisinage de ℓ_A , il est plus commode de se placer dans l'espace $\text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \times \text{Hom}(\ell_0, \ell')$, où ℓ' est une droite vectorielle supplémentaire à ℓ_0 dans α_0 . Désignons par $i_{\ell_0} : \ell_0 \subset \alpha_0$ l'inclusion, par $p : \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \times \text{Hom}(\ell_0, \ell') \rightarrow \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$ la projection ; l'équation

$$(A' - B) \circ (i_{\ell_0} + \lambda) = 0 \quad , \quad A' \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') , \lambda \in \text{Hom}(\ell_0, \ell')$$

définit un sous-ensemble $\tilde{\Omega}$ qui est en bijection par p avec $\Omega_B \cap U_{\alpha_0, \alpha'}$, sauf au-dessus de $A' = B$. Si on dérive cette équation en $A' = A$ on trouve :

$$\overline{A} \circ i_{\ell_0} + (A - B) \circ \overline{\lambda} = 0$$

où les symboles surlinés désignent des vecteurs tangents ; si $A \neq B$, $\text{Ker}(A - B) = \ell_0$ et alors

$$\exists \overline{\lambda} \text{ tel que } \overline{A} \circ i_{\ell_0} + (A - B) \circ \overline{\lambda} = 0 \iff \overline{A} \circ i_{\ell_0} : \ell_0 \rightarrow \alpha' / \text{Im}(A - B) \text{ est nulle}$$

q.e.d.

Proposition. Soient ℓ_{B_1} et ℓ_{B_2} deux droites distinctes, se coupant en un point $P_{1,2}$. Alors $\Omega_{\ell_{B_1}}$ et $\Omega_{\ell_{B_2}}$ se coupent transversalement en dehors de l'ensemble des droites par $P_{1,2}$ se trouvant dans le plan par ℓ_{B_1} et ℓ_{B_2} .

Preuve: Soit $\ell_A \in \Omega_{\ell_{B_1}} \cap \Omega_{\ell_{B_2}}$. Supposons d'abord que ℓ_A passe par $P_{1,2}$, et donc ne soit pas dans le plan de ℓ_{B_1} et ℓ_{B_2} . Soit $\ell_{1,2} \subset \alpha_0$ la droite vectorielle correspondante à $P_{1,2}$, c'est-à-dire telle que $B_1|_{\ell_{1,2}} = B_2|_{\ell_{1,2}} = A|_{\ell_{1,2}}$. Il suit du lemme que

$$T(\Omega_{\ell_{B_1}})_A \cap T(\Omega_{\ell_{B_2}})_A = \{ \overline{A} \mid \overline{A}|_{\ell_{1,2}} : \ell_{1,2} \rightarrow \alpha' / \text{Im}(A - B_i) \text{ est nulle } , i = 1, 2 \}$$

Puisque $A - B_1$ et $A - B_2$ ont même noyau $\ell_{1,2}$, si elles avaient même image on aurait :

$$A - B_1 = \lambda(A - B_2)$$

où λ est un scalaire, et $\lambda \neq 1$, sans quoi $B_1 = B_2$. On en déduirait que

$$A = \frac{1}{1 - \lambda} B_1 - \frac{\lambda}{1 - \lambda} B_2$$

et donc ℓ_A serait dans le plan par ℓ_{B_1} et ℓ_{B_2} , contradiction. On a donc bien que les deux conditions que $\overline{A}|_{\ell_0} \rightarrow \alpha' / \text{Im}(A - (B_i))$ soit nulle pour $i = 1, 2$ sont indépendantes, et donc on a transversalité.

Si ℓ_A est dans le plan de ℓ_{B_1} et ℓ_{B_2} mais ne passe pas par $P_{1,2}$, soient $P_1 = \ell_A \cap \ell_{B_1}$ et $P_2 = \ell_A \cap \ell_{B_2}$ et soient $\ell_1, \ell_2 \subset \alpha_0$ les droites déterminées par :

$$(A - B_1)|_{\ell_1} = 0 \quad , \quad (A - B_2)|_{\ell_2} = 0 \quad .$$

Alors :

$$T(\Omega_{\ell_{B_1}})_A \cap T(\Omega_{\ell_{B_2}})_A = \{ \overline{A} \mid \overline{A}|_{\ell_i} : \ell_i \rightarrow \alpha' / \text{Im}(A - B_i) \text{ est nulle } , i = 1, 2 \}$$

et comme $\ell_1 \neq \ell_2$, ces deux conditions sont indépendantes et on a transversalité.

q.e.d.

Comme corollaire, on a une justification du recours à une situation modérément dégénérée utilisé par Schubert pour démontrer la formule 9) : si g et g' sont distinctes, mais dans un même plan, les cycles Ω_g et $\Omega_{g'}$ sont transverses en dehors d'un ensemble de codimension 1, et donc l'intersection ensembliste de ces deux cycles a pour classe duale le produit des classes duales de chacun des cycles. Ce qui dans le monde de Schubert s'écrit : $g^2 = g_p + g_s$ (formule 9)), car $\Omega_g \cap \Omega_{g'} = \Omega_p + \Omega_e$.

Soient $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^3$ 4 points non coplanaires, dont 3 d'entre eux ne sont jamais alignés. Si on prend les quatre droites $\ell_{P,Q}$ par P et Q , $\ell_{Q,R}$, $\ell_{R,S}$ et $\ell_{S,P}$, on voit que les cycles de Schubert correspondants $\Omega_{\ell_{i,j}}$ se coupent transversalement en les deux droites $\ell_{P,R}$ et en $\ell_{Q,S}$. En effet, les intersections deux à deux sont transverses par la proposition 1, et la transversalité des intersections restantes est élémentaire à vérifier

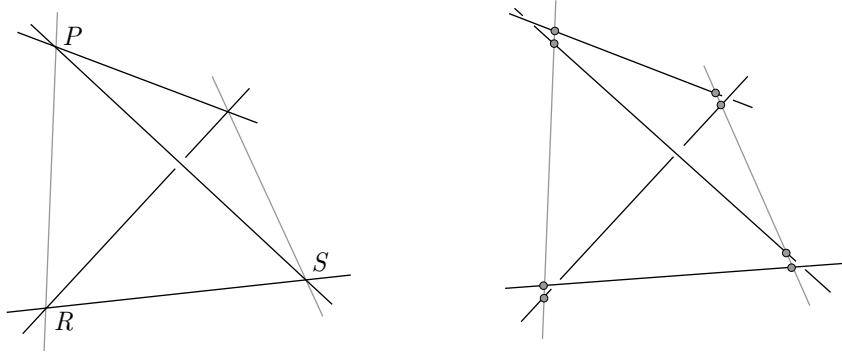


FIG. 4 – Les 2 droites qui coupent 4 droites données

(par exemple : intersection de l'ensemble des droites dans le plan par P, Q, S et l'ensemble des droites dans Q, R, S).

Le problème énumératif de trouver le nombre de droites s'appuyant sur quatre droites données est souvent cité en exemple pour illustrer les méthodes de Schubert (voir [5]). Ce qui précède permet de justifier le recours au cas un peu dégénéré, où les 4 droites données se coupent par paires. Puisque les intersections sont transverses, il n'y a pas de multiplicité à prendre en compte ; ce fait peut se percevoir avec un peu d'imagination, en voyant que, après avoir bougé légèrement les 4 droites noires, il n'y a qu'une solution au voisinage de chacune des droites grises (figure 4).

Par contre, voici une situation très dégénérée, malgré les apparences, qui m'a été suggérée par mon collègue Alexandre Gabard. Sur une quadrique lisse de \mathbb{P}^3 il y a deux systèmes de droites, qui correspondent aux droites horizontales et verticales si on identifie la quadrique à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Si on prend 4 droites du même système, toute droite de l'autre système rencontre ces quatre droites, et il y a donc une infinité de solutions : les 4 droites données ne sont pas en position générale du point de vue de ce problème.

Pour voir un cas dégénéré ayant une seule solution avec multiplicité 2, on peut prendre pour ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 trois droites du même système sur une quadrique lisse, pour ℓ_4 une droite tangente en un point P à la quadrique (mais pas contenue dedans). La seule solution est alors la droite par P qui appartient à l'autre système de droites.

2.3 L'espace \mathcal{PS} des points sur les droites de \mathbb{P}^3

Rappelons que l'espace \mathcal{PS} est constitué des couples formés par un point sur une droite de l'espace. Pour exprimer des conditions, on va utiliser des symboles de la forme xy , où x est un symbole qui exprime une condition sur les points, y sur les droites. Ainsi, le symbole pg désigne les couples formés d'un point et une droite, le point étant astreint à se trouver dans un plan, la droite devant s'appuyer sur une droite donnée ; si on note Ω_{pg} l'ensemble de ces couples, et encore g une droite et e un plan provisoirement fixés :

$$\Omega_{pg} = \{(\ell, Q) \in \mathcal{PS} \mid \ell \cap g \neq \emptyset, Q \in e\} .$$

D'après le principe de la conservation du nombre, on peut prendre la droite g dans le plan e , auquel cas :

$$\Omega_{pg} = \{(\ell, Q) \in \mathcal{PS} \mid Q \in g\} \cup \{(\ell, Q) \in \mathcal{PS} \mid \ell \subset e\}$$

(voir figure 5) d'où on déduit la formule ([7, page 25])² :

$$\text{I) } pg = p_g + g_e = p^2 + g_e .$$

Cette formule est fondamentale, dans le sens que toute autre formule est conséquence de celle-ci et des formules déjà obtenues dans \mathcal{G} et \mathbb{P}^3 ; la raison en est expliquée au § suivant. Établissons tout de même

²Il y a une erreur de frappe dans [7, page 25] : on y trouve la formule $pg = p_g + g$

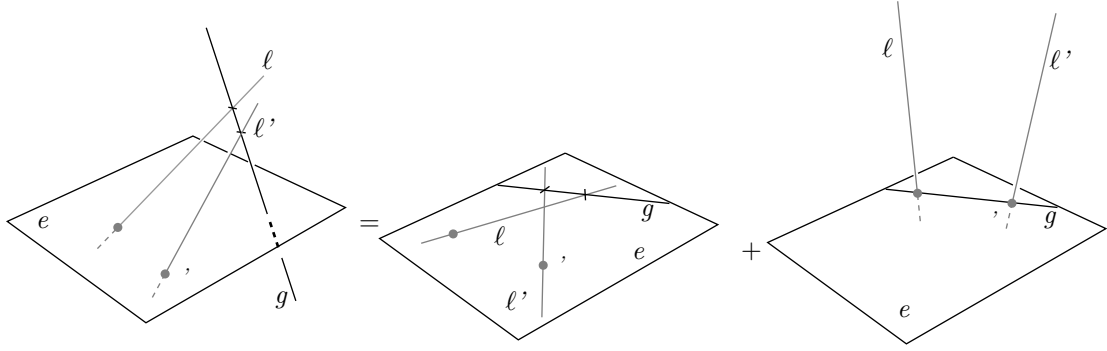


FIG. 5 – Comment voir que $pg = g_e + p_g$

quelques autres formules pour \mathcal{PS} ; en multipliant I) par p , puis par g on obtient :

$$\begin{aligned} p^2g &= pp_g + pg_e = p^3 + pg_e \\ pg_e + pg_p &= pg^2 = p_gg + g_e g = p_gg + g_s = p^2g + g_s \end{aligned}$$

et en ajoutant les extrémités gauches et droites de ces deux lignes on a la formule

$$\text{II) } pg_p = p^3 + g_s$$

et de manière analogue on trouve encore la formule (voir [7, page 26]) :

$$\text{III) } pg_s = p^2g_p = G + p^3g = G + p^2g_e \quad .$$

Justification par la cohomologie Si on regarde \mathcal{G} comme l'espace des 2-plans de \mathbb{C}^4 , \mathcal{PS} est le fibré en projectif associé au fibré tautologique η de rang 2 sur \mathcal{G} . On peut définir le fibré en droite tautologique $\gamma = (F \xrightarrow{\pi} \mathcal{PS})$ par

$$F = \{(\alpha, \ell, v) \in \mathcal{G} \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^4 \mid \ell \subset \alpha, v \in \ell\} \quad , \quad \pi(\alpha, \ell, v) = (\alpha, \ell) \quad .$$

Posons $s = c_1(\gamma)$; remarquons que $H^*(\mathcal{PS})$ est un $H^*(\mathcal{G})$ -module via l'homomorphisme induit par la projection naturelle $\mathcal{PS} \rightarrow \mathcal{G}$. On sait (voir [8, théorème page 62]) que l'homomorphisme d'anneaux

$$H^*(\mathcal{G})[t] \rightarrow H^*(\mathcal{PS}) \quad , \quad s \mapsto c_1(\gamma)$$

induit un isomorphisme

$$H^*(\mathcal{G})[s]/I(s^2 - sc_1(\eta) + c_2(\eta)) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathcal{PS})$$

où $I(s^2 - sc_1(\eta) + c_2(\eta))$ désigne l'idéal engendré par le polynôme $s^2 - sc_1(\eta) + c_2(\eta)$, qui d'ailleurs n'est autre que $c_2(\eta/\gamma)$ si on fait la substitution $s = c_1(\gamma)$. Il est nul parce que γ est un sous-fibré de η .

Prenons la liberté d'exprimer par le même symbole une condition sur les éléments de base et la classe duale par Poincaré du cycle que cette condition définit ; par exemple, on pourra écrire, d'après le § 2.2.1, $g = s_1(\eta) = -c_1(\eta)$. On écrira aussi s pour $c_1(\gamma)$, de sorte que $p = -s$.

Il suit de la définition même que $pg = (-s)(-c_1(\eta))$. D'autre part, $p_g = s^2$ et on a vu au § 2.2.1 que $g_e = c_2(\eta)$. On a la relation

$$sc_1(\eta) = s^2 + c_2(\eta)$$

que l'on peut écrire encore :

$$pg = p^2 + p_g$$

qui est la formule I). Donc cette formule est exactement la relation par laquelle il faut quotienter $H^*(\mathcal{G})[s]$ pour obtenir $H^*(\mathcal{PS})$.

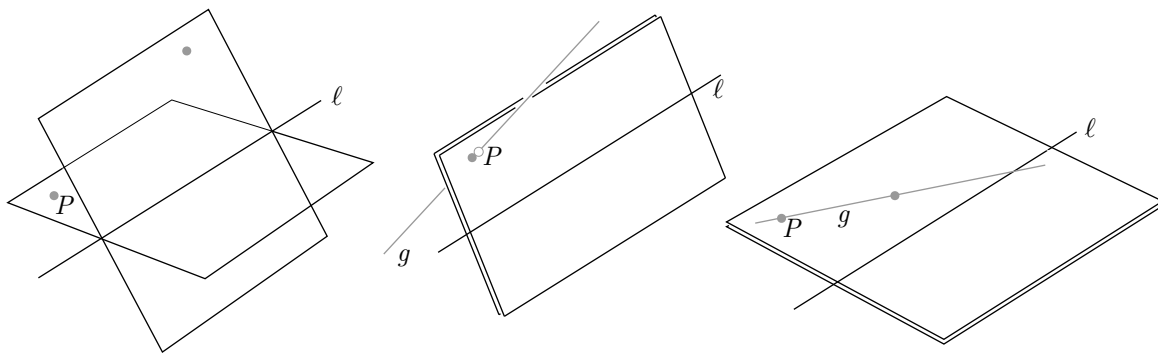


FIG. 6 – L'espace Y et les conditions ε and g

3 Les formules de coïncidence

Si $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est une courbe de bidegré (p, q) , la restriction de son équation à la diagonale est de degré $p + q$, et donc X rencontre cette diagonale en $p + q$ points, comptés avec leur multiplicité. On peut exprimer ce calcul en disant que X est une famille à un paramètre de paires de points sur la droite, et qu'il y a $p + q$ paires dont les points viennent à coïncider ; c'est ce qu'on appelle le *Principe de correspondance* de Chasles [1, Lemme I, page 1175].

On va généraliser cette formule en suivant [7, pages 42 et suivantes], en respectant la notation et sa fructueuse ambiguïté. On considère les paires de points de l'espace, en imaginant que si deux points d'une même paire viennent à coïncider, la droite qui les joint est encore bien déterminée. On appelle p et q les deux points d'une paire, g la droite qui les joint et ε la condition que p et q sont infiniment proches, mais déterminent encore la droite qui les joint.

On suppose donné un système à un paramètre X de telles paires de points. Notons que si on désigne encore par p le nombre de paires $(P, Q) \in X$ telles que P soit dans un plan donné (condition que l'on note aussi p), par q le nombre de paires telles que Q soit dans un plan donné (condition que l'on note aussi q), alors X est de bidegré (p, q) .

Maintenant on se donne une droite ℓ et on considère les paires de plans qui contiennent ℓ , telles que le premier plan contient p et le deuxième q . Ces paires de plans forment une courbe Y dans l'espace des paires de plans par ℓ (qui s'identifie à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; Y est aussi de bidegré (p, q)), de sorte que, par le principe de correspondance de Chasles, il y a

$$p + q$$

plans qui contiennent les deux points p et q d'une même paire. Parmi ces plans, on trouve d'une part les ε plans par ℓ qui contiennent une paire du système X , dans laquelle les deux points de la paire coïncident, et d'autre part aussi les plans par ℓ qui contiennent une droite g qui joint les deux points distincts d'une paire de X (i.e. la droite qui joint les deux points de la paire doit couper une droite fixée, à savoir la droite ℓ : on note g une telle condition, comme d'habitude). On a donc la formule :

$$(\spadesuit) \quad \varepsilon = p + q - g \quad .$$

Cette formule est la formule de départ d'une série de formules appelées *Coinzidenz Formeln* par Schubert. Elle se révèle très utile pour établir des formules énumératives concernant les positions spéciales de droites par rapport à une surface, entre autres. Par exemple, Schubert l'utilise pour montrer qu'une surface générique possède

$$\frac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3 + 6n^2 + 7n - 30)$$

tangentes en 4 points distincts (voit [7, page 237, formule 21]). Nous suivrons la démarche de Schubert pour montrer cette formule : ce sera notre troisième exemple, et le plus conséquent, d'applications de la formule de coïncidence qui vont suivre.

Pour justifier \spadesuit , considérons l'espace $\mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3$ obtenu en éclatant la diagonale Δ dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. L'application qui à $(P, Q) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \setminus \Delta$ associe la droite par P et Q s'étend en une application $\varphi : \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathcal{G}$, qui est

telle que

$$\varphi^*(\Lambda^2(\eta)) = \gamma^* \otimes (\mathcal{O}(1)_1 \otimes \mathcal{O}(1)_2)$$

où γ désigne le fibré en droites associé à la diagonale éclatée, $\mathcal{O}(1)_i$ le pull-back par la projection de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ sur le i -ème facteur de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ du fibré des 1-formes homogènes sur \mathbb{P}^3 . On peut s'en convaincre par exemple en utilisant le plongement de Plücker ψ de la grassmannienne \mathcal{G} dans \mathbb{P}^5 , qui est défini ainsi : si $g \in \mathcal{G}$, on choisit $P, Q \in g$ distincts ; si $P = [x_1, \dots, x_4]$, $Q = [y_1, \dots, y_4]$, et $x = (x_1, \dots, x_4)$, $y = (y_1, \dots, y_4)$, on pose

$$\psi(g) = [x \wedge y] \in \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)) \simeq \mathbb{P}^5 \quad .$$

On vérifie que ψ est bien défini et qu'elle définit un plongement, dont l'image est

$$\{[P \wedge Q] \in \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)) \mid P \wedge Q \neq 0\} \quad ,$$

et on peut l'identifier à \mathcal{G} ; notons que le fibré $\mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))}$ des 1-formes homogènes sur $\mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ est transporté par ψ sur $\Lambda^2(\eta^*)$. Considérons l'application

$$\Phi : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \quad , \quad (x, y) \mapsto x \wedge y \quad .$$

Sa dérivée par rapport à x , en un point (y, y) , $y \neq 0$, s'écrit $v \mapsto v \wedge y$, qui a pour noyau la droite par y . Il suit facilement de là que Φ induit un morphisme

$$\varphi : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathcal{G} \quad \text{avec} \quad \varphi^*(\Lambda^2(\eta^*)) = \gamma^* \otimes (\mathcal{O}(1)_1 \otimes \mathcal{O}(1)_2) \quad .$$

Avec un effort supplémentaire, on peut même montrer que $\varphi^*(\eta) = (\gamma^* \otimes \mathcal{O}_1(-1)) \oplus \mathcal{O}_2(-1)$, mais nous n'en aurons pas besoin.

On se souvient maintenant que la classe duale à Ω_g est $s_1(\eta) = -c_1(\eta)$; or

$$\varphi^*(-c_1(\eta)) = c_1(\gamma^* \otimes \mathcal{O}(1)_1 \otimes \mathcal{O}(1)_2)$$

et en posant $t_i = c_1(\mathcal{O}(1)_i)$, $i = 1, 2$, $\varepsilon = c_1(\gamma)$, on obtient :

$$\varphi^*(-c_1(\eta)) = t_1 + t_2 - \varepsilon \quad .$$

Pour retrouver la formule de coïncidence de Schubert, il faut encore remarquer que ce qu'on a noté g , i.e. la condition que la droite par P et Q touche une droite donnée g , correspond dans ce contexte à $\varphi^*(s_1(\eta)) = \varphi^*(-c_1(\eta))$, et que p et q correspondent à t_1 et t_2 respectivement, c'est-à-dire à la classe duale à un hyperplan du premier facteur \mathbb{P}^3 , respectivement le deuxième.

3.1 Calculs de coïncidences des intersections d'une droite avec une surface donnée

On va présenter 3 exemples de calculs avec la formule de coïncidence. On justifiera le premier aussi par un calcul en cohomologie ; les deux autres seront traités seulement à la Schubert, suivant [7, page 229 et suivantes].

Soit $F \subset \mathbb{P}^3$ une surface lisse de degré n ; on désigne par p_1, p_2, \dots, p_n les points d'intersection d'une droite g avec F . On note ε_2 la condition que 2 de ces points coïncident. Alors, il suit de la formule de coïncidence que

♣

$$\varepsilon_2 = p_1 + p_2 - g$$

Comme d'habitude, nous avons utilisé la même notation pour la condition p (être dans un plan) et son récipiendaire (un point).

3.1.1 Premier exemple : la classe d'une courbe plane

En multipliant par g_s la formule ♣ on obtient :

$$\varepsilon_2 g_s = p_1 g_s + p_2 g_s - G$$

et en utilisant la formule III) :

$$\varepsilon_2 g_s = G + p_1^3 g + G + p_2^3 g - G = G$$

car $p^3 = 0$ (l'intersection générique de 3 plans et une surface est vide). Il reste à interpréter le symbole G dans ce contexte : ce sont les paires de points distincts sur l'intersection d'une droite générique et la surface, ce qui donne $n(n-1)$ paires. On retrouve ainsi la formule de la classe d'une courbe plane lisse de degré n ; en effet, $\varepsilon_2 g_s$ représente les droites tangentes à la surface appartenant à un pinceau donné, ce qui revient au même que de considérer les droites du pinceau tangentes à la courbe intersection du plan du pinceau avec la surface, c'est-à-dire les droites par le sommet du pinceau tangentes à cette courbe.

Justification avec la cohomologie Désignons par $F \tilde{\times} F$ l'éclatement de $F \times F$ le long de la diagonale. On a que $F \tilde{\times} F \subset \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3$, et on aimerait connaître sa classe duale ; le résultat suivant va nous y aider. Si Z est une variété lisse, on notera par TZ son fibré tangent, et par TZ_x sa fibre au-dessus de $x \in Z$.

Proposition. *Soit X une variété lisse, $A, Y \subset X$ des sous-variétés lisses, telles que $A \cap Y$ est lisse et que pour tout $x \in A \cap Y$, $TA_x \cap TY_x = T(A \cap Y)_x$, de sorte que l'on a une suite exacte de fibrés :*

$$0 \rightarrow T(A \cap Y) \rightarrow TA|_{A \cap Y} \oplus TY|_{A \cap Y} \rightarrow TX|_{A \cap Y} \rightarrow E \rightarrow 0$$

où E est défini par cette suite exacte ; on l'appelle fibré excès et on note k son rang. Alors, en désignant par :

$\delta_{U,V}$	la classe duale à U dans V
\tilde{X}	l'éclaté de X le long de Y
\tilde{A}	le transformé strict de A
ε	la classe duale au diviseur exceptionnel dans \tilde{X}
$p : \tilde{X} \rightarrow X$	la projection de l'éclatement
$j : \tilde{Y} \subset \tilde{X}$	l'inclusion naturelle

on a :

$$\delta_{\tilde{A}, \tilde{X}} = p^*(\delta_{A,X}) - \cdot j! \left((p|_{\tilde{Y}})^*(\delta_{A \cap Y, Y}) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \varepsilon^i c_{k-i-1}(E)}_{=c_{k-1}(E/\gamma)} \right)$$

C'est un cas particulier de [2, Theorem 6.7].

Comme application, on considère les sous-variétés $F \times F$ et Δ de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. Dans ce cas, le fibré excès s'identifie au fibré normal à F dans \mathbb{P}^3 , qui est $\mathcal{O}(n)_\Delta$, et $\delta_{F, \mathbb{P}^3} = nt$, donc $\delta_{F \times F, \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3} = nt_1 \cdot nt_2 = n^2 t_1 t_2$. Il en suit que

$$(\heartsuit) \quad \delta_{F \tilde{\times} F, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3} = n^2 t_1 t_2 - nt\varepsilon$$

où t désigne indifféremment t_1 ou t_2 , puisque $\varepsilon t_1 = \varepsilon t_2$. On peut aussi se convaincre de cette égalité de la façon suivante ; on désigne par $p : \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ la projection d'éclatement et $\tilde{\Delta}_F = \tilde{\Delta} \cap^{-1} (F \times F \cap \Delta)$. Alors :

$$p^{-1}(F \times F) = F \tilde{\times} F \cup \tilde{\Delta}_F \quad .$$

En passant aux classe duales, on voit que

$$\delta_{F \times F, \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3} = \delta_{F \tilde{\times} F, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3} + \delta_{\tilde{\Delta}_F, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3}$$

et

$$\delta_{\tilde{\Delta}_F, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3} = \delta_{\tilde{\Delta}_F, \tilde{\Delta}} \cdot \delta_{\tilde{\Delta}, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3} = (nt) \cdot \varepsilon$$

d'où la formule ♡.

En particulier, en prenant $n = 1$, i.e. F est un plan, on obtient que

$$\delta_{\varphi^{-1}(\Omega_e)} = t_1 t_2 - t\varepsilon \quad .$$

Or $g_s = gg_e$, donc $\varphi^*(g_s) = \varphi^*(g)\varphi^*(g_e) = (t_1 + t_2 - \varepsilon)(t_1 t_2 - t\varepsilon)$. Pour calculer $\varepsilon_2 g_s$ on doit encore multiplier $\varphi^*(g_s)\varepsilon$ par $\delta_{F \tilde{\times} F, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3}$ et évaluer cette classe sur $\mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3$, ce qui revient à évaluer $\delta_{F \tilde{\times} F, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3} \varphi^*(g_s)$ sur $\tilde{\Delta}$; or

$$\langle \delta_{F \tilde{\times} F, \mathbb{P}^3 \tilde{\times} \mathbb{P}^3} \cdot \varphi^*(g_s), \tilde{\Delta} \rangle = \langle (n^2 t_1 t_2 - nt\varepsilon)(t_1 t_2 t\varepsilon)(t_1 t_2 - \varepsilon), \tilde{\Delta} \rangle = \langle (n^2 t^2 - nt\varepsilon)(t^2 - t\varepsilon)(2t - 2), \tilde{\Delta} \rangle$$

et comme $t^4 = 0$, $(n^2 t^2 - nt\varepsilon)(t^2 - t\varepsilon)(2t - 2) = t^2(-n\varepsilon^3 + \varepsilon^2(n^2 t + 3nt))$. Au lieu d'évaluer sur $\tilde{\Delta}$, on peut appliquer $\pi_!$ et évaluer sur \mathbb{P}^3 , où $\pi : \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{P}^3$ est la projection naturelle, qui n'est autre que la projection du fibré en projective associé à $T\mathbb{P}^3$, et $\pi_!$ l'homomorphisme de Gysin associé à π ; on a :

$$\pi_!(\varepsilon^2) = 1 \quad , \quad \pi_!(\varepsilon^3) = c_1(T\mathbb{P}^3) = 4t$$

(cela suit par exemple de la définition même des classes de Segre dans [2, § 3.1]) et donc

$$\langle t^2(-n\varepsilon + \varepsilon^2(n^2 t + 3nt)), \tilde{\Delta} \rangle = \langle t^3(-4n + n^2 + 3n), \mathbb{P}^3 \rangle = n(n-1) \quad .$$

3.1.2 Deuxième exemple : droites bitangentes à une courbe plane

Nous traiterons cet exemple, ainsi que le suivant, à la Schubert uniquement ([7, page 229]). On note par ε_{22} la condition qu'une droite est tangente en deux points de la surface F ; c'est donc la condition que, parmi les points p_1, \dots, p_n , intersection de la droite avec F , deux paires coïncident, disons p_1, p_2 et p_3, p_4 . Il suit du principe de coïncidence que :

$$2 \cdot \varepsilon_{22} = (p_1 + p_2 - g)(p_3 + p_4 - g)$$

le coefficient 2 venant du fait que l'on peut échanger le rôle de (p_1, p_2) et (p_3, p_4) ; soit :

$$2 \cdot \varepsilon_{22} = p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 - g p_1 - g p_2 - g p_3 - g p_4 + \underbrace{g^2}_{=g_e + g_p} \quad .$$

Les symboles $p_i p_j$, $i \neq j$, ont tous la même signification, de même que les symboles $g p_i$; on peut donc écrire :

$$2 \cdot \varepsilon_{22} = 4p_1 p_3 - 4g p_1 + g_e + g_p \quad .$$

On multiplie maintenant par g_e : $\varepsilon_{22} g_e$ désigne les droites bitangentes à la surface, situées dans un plan donné; il s'agit donc des droites bitangentes à la courbe plane intersection de la surface avec le plan. On a :

$$2 \cdot \varepsilon_{22} g_e = 4p_1 p_3 g_e - 4p_1 g g_e + g_p g_e = 4p_1 p_3 g_e - 4p_1 g_s + G \stackrel{(\text{par III})}{=} 4p_1 p_3 g_e - 4p_1^3 g - 3G \quad .$$

Déterminons $p_1 p_3 g_e$. En fait, nous sommes en train de travailler dans

$$(F \tilde{\times} F) \times (F \tilde{\times} F) \times \mathcal{G}$$

dont un élément générique peut être représenté par $((P_1, P_2), (Q_1, Q_2), g)$, avec $P_i, Q_i \in F \cap g$. La condition p_i demande que P_i soit dans un plan e_i , $i = 1, 3$, et g_e demande que g soit dans un plan e . Or $e \cap e_i$ coupe F en n points, $i = 1, 3$; donc la droite des configurations satisfaisant $p_1 p_3 g_e$ est déterminée par l'une des n^2 paires de points, P_1 sur $e \cap e_1 \cap F$ et P_3 sur $e \cap e_3 \cap F$; pour un tel choix de P_1 et P_3 , on peut encore choisir P_2 et P_4 parmi les $n - 2$ points restants sur la droite. Il y a donc

$$n^2(n-2)(n-3)$$

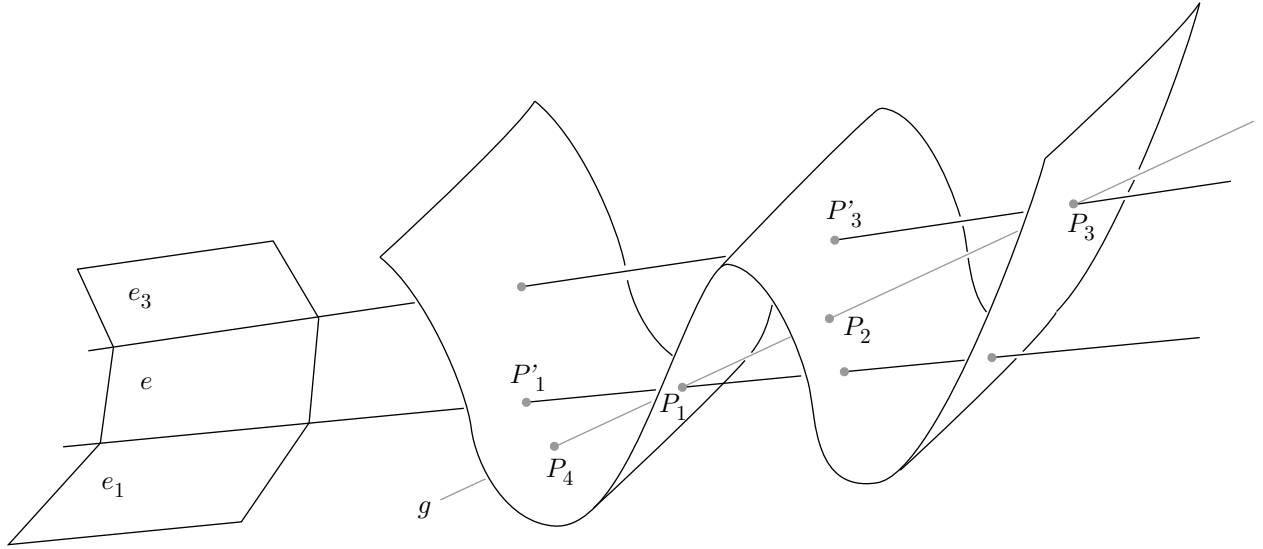


FIG. 7 – Comment calculer $p_1 p_3 g_e$

configurations possibles. Pour déterminer G , il faut remarquer que pour une droite g fixée, il y a en tout $n(n-1)(n-2)(n-3)$ paires de points distincts dans $g \cap F$. Enfin, $p_1^3 = 0$. On obtient alors

$$2\varepsilon_{22}g_e = 4n^2(n-2)(n-3) - 3n(n-1)(n-2)(n-3)$$

et donc

$$\varepsilon_{22}g_e = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3) \quad .$$

ce qui donne le nombre de bitangente à une courbe plane de degré n .

3.1.3 Troisième exemple : le nombre de droites quadritangentes à une surface

On note ε_{2222} la condition qu'une droite est tangente à une surface F de degré n en quatre points distincts ; cela revient à dire que parmi les n points p_1, \dots, p_n , intersection de la droite avec F , quatre paires coïncident, disons (p_1, p_2) , (p_3, p_4) , (p_5, p_6) et (p_7, p_8) . Pour une surface générique, il y a un nombre fini de telles droites, que l'on va calculer en procédant de manière analogue au deuxième exemple ; il s'agit de la formule 21) dans [7, pages 232 et suivantes]. Nous allons repérer certaines équations à l'aide de lettres, qui n'ont pas de correspondant dans [7].

Il suit de la formule de coïncidence que

$$4!\varepsilon_{2222} = (p_1 + p_2 - g)(p_3 + p_4 - g)(p_5 + p_6 - g)(p_7 + p_8 - g)$$

où le coefficient $4!$ vient du fait que l'on peut échanger les rôles des 4 paires de points qui viennent coïncider : (p_1, p_2) , (p_3, p_4) , (p_5, p_6) et (p_7, p_8) . Les symboles $p_i p_j$, $i \neq j$ ayant tous même signification, en développant on en déduit :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 4!\varepsilon_{2,2,2,2} &= 2^4 p_1 p_2 p_3 p_4 - 2^3 \cdot 4 g p_1 p_2 p_3 + 2^2 \binom{4}{2} g^2 p_1 p_2 - 2 \binom{4}{3} g^3 p_1 + g^4 \\ &= 16 p_1 p_2 p_3 p_4 - 32 g p_1 p_2 p_3 + 24 g^2 p_1 p_2 - 8 g^3 p_1 + g^4 \end{aligned}$$

(Dans [7, page 234] il y a une faute de frappe : il est écrit g_4 au lieu de g^4 .)

On déduit de la formule I) que :

$$\text{(b)} \quad g p = p_g + g_e \implies g p_1 p_2 p_3 = p_1^2 p_2 p_3 + g_e p_1 p_2$$

D'autre part :

$$(c) \quad g^2 \stackrel{9)}{=} g_p + g_e \implies g^2 p_1 p_2 = \underbrace{g_p p_1 p_2 + g_e p_1 p_2}_{=G}$$

et

$$(d) \quad g^3 p_1 \stackrel{9)}{=} (g_e + g_p) g p_1 \stackrel{10)}{=} \stackrel{11)}{=} 2g_s p_1 = 2G$$

et donc en remplaçant (b), (c) et (d) dans (a), on trouve :

$$(e) \quad 4!e_{2222} = 16p_1 p_2 p_3 p_4 - 32p_1^2 p_2 p_3 - 8g_e p_1 p_2 + 10G$$

On calcule séparément chacun des termes de droites dans (e) ; on travaille dans

$$(F \tilde{\times} F) \times (F \tilde{\times} F) \times (F \tilde{\times} F) \times (F \tilde{\times} F) \times \mathcal{G}$$

1. \boxed{G}

Cela représente le nombre d'octets de points distincts P_1, \dots, P_8 que l'on peut choisir dans l'intersection d'une droite générique avec la surface F qui est de degré n , soit :

$$G = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$

2. $\boxed{g_e p_1 p_2}$

Dans le deuxième exemple, en travaillant avec 2 paires de points, nous avons vu la formule $g_e p_1 p_3 = n^2(n-2)(n-3)$. Dans le cas présent, nous avons encore à choisir 4 points, parmi les $n-4$ restant dans l'intersection de la droite et la surface. On trouve donc :

$$g_e p_1 p_2 = n^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$

3. $\boxed{p_1^2 p_2 p_3}$

Appelons e_1, e'_1 les plans exprimant la condition p_1^2 , de sorte que P_1 sera parmi les n points de $F \cap e_1 \cap e'_1$. Soient e_2 et e_3 les plans exprimant p_2 et p_3 respectivement, et ℓ la droite qui contient P_1, \dots, P_8 . Le point P_2 doit se trouver sur le cône sur la courbe $F \cap e_2$ de sommet P_1 , que nous noterons $C_{P_1}(F \cap e_2)$, et qui est de degré n . Le point P_3 doit se trouver sur $C_{P_1}(F \cap e_2)$ et sur la courbe $F \cap e_3$, qui est de degré n . Pour P_1 fixé, il y a donc n^2 choix possibles pour ℓ, P_2 et P_3 ; il faut écarter les choix qui correspondent aux n points de l'intersection $e_2 \cap e_3 \cap F$, car pour ceux-là on aurait $P_2 = P_3$. Il reste donc $n^2 - n = n(n-1)$ solutions.

Comme il y a n choix possibles pour P_1 , cela nous donne $n^2(n-1)$ possibilités pour P_1, P_2, P_3 . Il reste à choisir P_4, \dots, P_8 parmi les $(n-3)$ points restant sur $\ell \cap F$; on obtient donc :

$$p_1^2 p_2 p_3 = n^2(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$

4. $\boxed{p_1 p_2 p_3 p_4}$

On suppose en un premier temps qu'il n'y a que les 4 points P_1, \dots, P_4 . Soient e_1, e_2, e_3, e_4 les plans exprimant respectivement les conditions p_1, p_2, p_3, p_4 . Cherchons le degré de la surface réglée F' formée par les droites ℓ s'appuyant sur $e_2 \cap F, e_3 \cap F, e_4 \cap F$; pour cela, il faut calculer l'intersection de cette surface avec une droite générique, ce qui revient à calculer $g p_2 p_3 p_4 = (g_e + p_2^2) p_3 p_4$. Or nous savons par les formules ci-dessus que $g_e p_2 p_3 = n^2(n-2)$ et $p_2^2 p_3 p_4 = n^2(n-1)$, ce qui fait que F' est de degré $n^2(2n-3)$. Par Bézout³, l'intersection $F \cap F' \cap e_1$ est alors constituée de $n^3(2n-3)$ points, dont, d'après 3) ci-dessus :

- $n^2(n-1)$ sont dans e_2
- $n^2(n-1)$ sont dans e_3

³Schubert déduit le théorème de Bézout de la formule de coïncidence ([7, page 46]).

- $n^2(n-1)$ sont dans e_4
 les restants $n^3(2n-3) - 3n^2(n-1) = n^2(2n^2 - 6n + 3)$ constituent $p_1p_2p_3p_4$. Si on compte encore les choix possibles pour P_4, \dots, P_8 parmi les $n-4$ points restant, on obtient :

$$p_1p_2p_3p_4 = n^2(2n^2 - 6n + 3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$

Remarque. *Suivant [7, page 236], remarquons que pour $n=3$, si on se limite à compter les choix possibles pour P_1 à P_4 , on retrouve le fameux résultat qu'il y a 27 droites qui coupent une surface cubique en 4 points, et donc sont contenues dans la cubique. Ces droites quadrisécantes sont dégénérées, puisqu'elles sont entièrement dans la cubique; le fait qu'il n'y ait pas de multiplicité à prendre en compte peut se déduire de ce que, si $\ell \subset F$, le plan tangent à F en un point $x \in \ell$ varie avec x*

Il ne reste plus qu'à remplacer les formules qui précèdent dans (e) :

$$4!\varepsilon_{2222} = 16n^2(2n^2 - 6n + 3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) - 32n^2(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) - 8n^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) + 10 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$

d'où l'on tire :

$$\varepsilon_{2222} = \frac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3 + 6n^2 + 7n - 30)$$

ce qui représente le nombre de droites tangentes à F en 4 points distincts.

Références

- [1] Michel Chasles. Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance du 15 février-...-Procédés généraux de démonstration. *Comptes Rendus Acad. Sc.*, 58 :1167–1175, 1864.
- [2] William Fulton. *Intersection theory*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [3] Maxim E. Kazarian. Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry. *Uspekhi Math. Nauk*, 4(58) :665–724, 2003.
- [4] Steve L. Kleiman. Rigorous foundations of Schubert's enumerative calculus. In *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, volume 28 of *Proc. Sympos. Pure Math*, pages 445–482. Amer. Math. Soc., 1976.
- [5] Steve L. Kleiman and Dan Laksov. Schubert calculus. *American Mathematical Monthly*, 79 :1061–1082, 1972.
- [6] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*, volume 76 of *Annals of Mathematical Studies*. Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [7] Hermann Schubert. *Kalkül der abzählende Geometrie*. Teubner Verlag, Leipzig, 1789.
- [8] Robert Stong. *Notes on Cobordism Theory*. Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, 1968.